

Langford 系统 Hopf 分岔极限环幅值控制*

崔岩^{1)2)†} 刘素华²⁾ 葛晓陵¹⁾

1) (华东理工大学机械与动力工程学院, 上海 200237)

2) (上海工程技术大学高等职业技术学院, 上海 200437)

(2011 年 8 月 6 日收到; 2011 年 10 月 20 日收到修改稿)

系统地研究了 Langford 系统 Hopf 分岔极限环幅值非线性反馈控制问题. 根据中心流形定理和规范型降维理论, 推导含控制增益项的非线性曲率系数控制公式和幅值近似解. 通过数值仿真验证并绘制极限环幅控关系曲线. 所推导的控制公式为 Langford 系统极限环幅值控制提供了方便有效的控制方法.

关键词: 幅值控制, Langford 系统, 极限环, Hopf 分岔

PACS: 02.30.Yy

1 引言

在工程实际应用方面, 极限环幅值控制问题越来越受到研究者的普遍关注. 一方面, 减小幅值可以抑制系统的振动行为; 另一方面, 增大幅值可以使振动现象为人们所利用. 在极限环幅值控制方面, 现已有一些研究成果. 在国外, 1998 年, Bern 等^[1] 阐述了极限环幅值控制的基本思想, 从 Hopf 分岔产生机理出发, 采用谐波平衡近似方法研究了获得小幅值近似解的控制算法; 1999 年, Oueini 和 Nayfeh^[2] 设计简单的非线性控制律抑制了悬臂梁的一阶振动; 2000 年, Berns 等^[3] 采用速度非线性控制器实现极限环幅值的反馈控制; 2005 年, Angulo 等^[4] 通过设计适当的转换控制器利用非光滑分岔理论研究了光滑平面系统极限环的产生、幅值及其稳定性的控制; 2006 年, Tang 和 Chen^[5] 设计各种平方与立方非线性控制器, 利用多尺度法研究了 van de Pol 振子以及通有的 van de Pol 振子的极限环幅值控制, 分别得到了幅值 - 增益控制方程. 在国内, 1999 年, 刘向东和黄文虎^[6] 提出了平面系统 Hopf 分岔所产生的极限环幅值可控的充分条件, 采用非线性状态反馈控制来抑制 Hopf 分岔引起

的自激振动; 在 2005 年和 2007 年, 钱长照和符文彬^[7], 唐驾时和萧寒^[8] 分别对 van der Pol-Duffing 系统和耦合的 van der Pol 振子采用摄动法和多尺度法研究了极限环幅值控制. 刘素华及合作者研究了四维 Qi 系统的 Hopf 分岔反控制与幅值控制问题^[9,10], 关于 Langford 系统, 也做了一些较为系统的研究工作, 包括 Hopf 分岔现象分析及其线性反馈控制^[11]、混沌控制^[12]、周期解到二次 Hopf 分岔不变环的控制等^[13]. 本文针对 Langford 系统 Hopf 分岔极限环, 研究其幅值非线性反馈控制问题.

参系数 Langford 系统为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (\mu - a)x_1 - bx_2 + x_1x_3 \\ &\quad + cx_1(1 - x_3^2), \\ \dot{x}_2 &= bx_1 + (\mu - a)x_2 + x_2x_3 \\ &\quad + cx_2(1 - x_3^2), \\ \dot{x}_3 &= \mu x_3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).\end{aligned}\quad (1)$$

其中 a, b, c 分别为正的实数, μ 为系统的分岔参数. 容易得到, 对于任意的分岔参数 μ , 系统 (1) 有两个平衡点 $S_1 = (0, 0, 0)$ 和 $S_2 = (0, 0, \mu)$; Hopf 分岔点 $\mu = \mu_0$ 为^[14]

* 国家自然科学基金 (批准号: 10672053) 资助的课题.

† E-mail: cuiyan0320@sohu.com

- (i) 如果 $c = 0$, 则 $\mu_0 = \frac{1}{2}a$;
- (ii) 如果 $c \neq 0$ 同时 $c < a < \frac{1+c^2}{c}$, 则 $\mu_0 = \frac{1}{c}(1 - \sqrt{1 - ac + c^2})$.

2 三维非线性系统控制器的设计及其极限环幅控关系

设计非线性状态反馈控制器 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu) = (u_1, u_2, u_3)^T$, 施加到三维非线性系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$ 中, 即

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu), \quad (2)$$

控制器 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu)$ 不改变系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$ 的平衡点, 也不改变其 Hopf 分岔值, 应满足条件 $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0(\mu_0), \mu_0) = \mathbf{0}$. 拟设计控制器 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu)$ 为包含所有平方项和立方项的多项式形式:

$$u_p = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}^p (x_i - x_{i0})(x_j - x_{j0}) + \sum_{i,j,k=1}^3 B_{ijk}^p \times (x_i - x_{i0})(x_j - x_{j0})(x_k - x_{k0}), \quad (3)$$

其中 $p(p = 1, 2, 3)$ 表示控制器所施加的子系统, $\mathbf{x}_0(\mu) = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$ 是原系统的一个平衡点, A_{ij}^p 和 B_{ijk}^p 分别是平方项控制增益和立方项控制增益, 即

$$A_{ij}^p = \frac{1}{2}(A_{ij}^p + A_{ji}^p), \quad (4)$$

$$B_{ijk}^p = \frac{1}{6}(B_{ijk}^p + B_{ikj}^p + B_{kij}^p + B_{jik}^p + B_{jki}^p + B_{kji}^p), \quad (5)$$

容易验证, $u_p(\mathbf{x}^0(\mu); \mu) = 0$ 且 $u_p(\mathbf{x}^0(\mu_0); \mu_0) = 0$, 即控制器不改变原系统平衡点和 Hopf 分岔值.

对受控系统 (2) 做线性变换 $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = \mu + y_3$, 得到如下规范型

$$\dot{\mathbf{y}} = J(\mu)\mathbf{y} + \mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mu) + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \mu), \quad (6)$$

其中 $J(\mu)$ 和 $\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mu)$ 为原系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$ 的变换形式, 而 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \mu) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)^T$ 称作转换后的控制器, 它由受控系统 (2) 中非线性控制器 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu)$ 转

换而来. 在 $\mu = \mu_0$ 处系统 (6) 具有如下标量形式:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\omega_0 y_2 + Q_1(y_1, y_2, y_3, \mu_0) + \tilde{u}_1, \\ \dot{y}_2 = \omega_0 y_1 + Q_2(y_1, y_2, y_3, \mu_0) + \tilde{u}_2, \\ \dot{y}_3 = \lambda_3(\mu_0) y_3 + Q_3(y_1, y_2, y_3, \mu_0) + \tilde{u}_3, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\tilde{u}_p(p = 1, 2, 3)$ 可表示为

$$\tilde{u}_p = \sum_{i,j=1}^3 C_{ij}^p y_i y_j + \sum_{i,j,k=1}^3 D_{ijk}^p y_i y_j y_k (p = 1, 2, 3), \quad (8)$$

其中 C_{ij}^p 和 D_{ijk}^p 分别是控制器 (3) 经线性变换而得到的平方项和立方项控制增益, 与 (4) 式和 (5) 式类似, 有

$$C_{ij}^p = \frac{1}{2}(C_{ij}^p + C_{ji}^p), \quad (9)$$

$$D_{ijk}^p = \frac{1}{6}(D_{ijk}^p + D_{ikj}^p + D_{kij}^p + D_{jik}^p + D_{jki}^p + D_{kji}^p). \quad (10)$$

由系统 (7), 得到受控系统 (6) 的特征量如下 [15]:

$$g_{20} = g_{20}^o + \frac{1}{2}(C_{11}^1 - C_{22}^1 + C_{12}^2 + i(C_{11}^2 - C_{22}^2 - C_{12}^1)), \quad (11)$$

$$g_{11} = g_{11}^o + \frac{1}{2}(C_{11}^1 + C_{22}^1 + i(C_{11}^2 + C_{22}^2)), \quad (12)$$

$$G_{110} = G_{110}^o + \frac{1}{2}(C_{13}^1 + C_{23}^2 + i(C_{13}^2 - C_{23}^1)), \quad (13)$$

$$G_{101} = G_{101}^o + \frac{1}{2}(C_{13}^1 - C_{23}^2 + i(C_{13}^2 + C_{23}^1)), \quad (14)$$

$$G_{21} = G_{21}^o + \frac{1}{4}(3D_{111}^1 + D_{122}^1 + D_{112}^2 + 3D_{222}^2 + i(3D_{111}^2 + D_{122}^2 - D_{112}^1 - 3D_{222}^1)), \quad (15)$$

$$w_{11} = w_{11}^o - \frac{1}{2\lambda_3(\mu_0)}(C_{11}^3 + C_{22}^3), \quad (16)$$

$$w_{20} = w_{20}^o + \frac{1}{2(2i\omega_0 - \lambda_3(\mu_0))}(C_{11}^3 - C_{22}^3 - iC_{12}^3), \quad (17)$$

其中, 带有上标 “o” 的特征量为相应于未控原系统的特征量, 由此, 进一步得到曲率系数 σ_1 的控制公式 [14]

$$\sigma_1 = \sigma_1^o + \text{Re}\{\psi\} + \phi, \quad (18)$$

其中 σ_1^o 为未控原系统的极限环曲率系数; “Re” 表示取 ψ 的实部, ψ 和 ϕ 分别为

$$\psi = \frac{w_{20}^o}{4}(C_{13}^1 - C_{23}^2) + \frac{w_{20}^o}{4}(C_{13}^2 + C_{23}^1)i + \frac{g_{11}^o}{4\omega_0}(C_{12}^1 + iC_{12}^2) - \frac{g_{11}^o + g_{20}^o}{4\omega_0}(C_{11}^2 - iC_{11}^1)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{g_{11}^o - g_{20}^o}{4\omega_0}(C_{22}^2 - iC_{22}^1) \\
 & - \frac{G_{110}^o}{2\lambda_3(\mu_0)}(C_{11}^3 + C_{22}^3) \\
 & + G_{101}^o(\lambda_3(\mu_0) + 2\omega_0 i)(C_{22}^3 - C_{11}^3) \\
 & + G_{101}^o(\lambda_3(\mu_0) i - 2\omega_0)C_{12}^3 \\
 & /4(4\omega_0^2 + \lambda_3^2(\mu_0)), \tag{19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi = & \frac{1}{8}(3D_{111}^1 + D_{122}^1 + D_{112}^2 + 3D_{222}^2) \\
 & + \frac{w_{11}^o}{2}(C_{13}^1 + C_{23}^2) + \frac{1}{4\omega_0}(C_{22}^1 C_{22}^2 - C_{11}^1 C_{11}^2) \\
 & + \frac{1}{8\omega_0}(C_{12}^1(C_{11}^1 + C_{22}^1) - C_{12}^2(C_{11}^2 + C_{22}^2)) \\
 & - \frac{1}{4\lambda_3(\mu_0)}(C_{11}^3 + C_{22}^3)(C_{13}^1 + C_{23}^2) \\
 & - \frac{\lambda_3(\mu_0)C_{12}^3 + 2\omega_0(C_{22}^3 - C_{11}^3)}{8(4\omega_0^2 + \lambda_3^2(\mu_0))}(C_{13}^2 + C_{23}^1) \\
 & + \frac{C_{12}^3 + \lambda_3(\mu_0)(C_{22}^3 - C_{11}^3)}{8(4\omega_0^2 + \lambda_3^2(\mu_0))}(C_{13}^1 - C_{23}^2). \tag{20}
 \end{aligned}$$

对于 $\mu < \mu_0$ 或 $\mu > \mu_0$, 且 $|\mu - \mu_0| \ll 1$, 极限环的幅控关系为

$$r \doteq \sqrt{-\alpha'(0)(\mu - \mu_0)/\sigma_1}. \tag{21}$$

根据曲率系数 σ_1 控制公式 (18), 保留对幅值控制有作用的增益项, 则控制器 \tilde{u}_p 可由 (8) 式简化为

$$\begin{cases}
 \tilde{u}_1 = D_{111}^1 y_1^3 + D_{122}^1 y_1 y_2^2 + C_{11}^1 y_1^2 + C_{22}^1 y_2^2 \\
 \quad + C_{12}^1 y_1 y_2 + C_{23}^1 y_2 y_3 + C_{13}^1 y_1 y_3, \\
 \tilde{u}_2 = D_{222}^2 y_2^3 + D_{112}^2 y_1^2 y_2 + C_{11}^2 y_1^2 + C_{22}^2 y_2^2 \\
 \quad + C_{12}^2 y_1 y_2 + C_{23}^2 y_2 y_3 + C_{13}^2 y_1 y_3, \\
 \tilde{u}_3 = C_{11}^3 y_1^2 + C_{22}^3 y_2^2 + C_{12}^3 y_1 y_2.
 \end{cases} \tag{22}$$

3 Langford 系统极限环幅值近似解与特征量计算

Langford 系统 (1) 极限环幅值的精确解可以得到, 然而, 在对系统实施控制之后往往得不到其幅值的精确解, 只能近似求解. 对受控系统的极限环的幅控关系求解, 需要首先对原系统进行幅值近似求解, 得到原系统的一些特征量.

引入线性坐标变换 $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = \mu + y_3$, 则系统 (1) 的平衡点 $S_2 = (0, 0, \mu)$ 移至原

点, 系统 (1) 转化为如下规范型

$$\begin{cases}
 \dot{y}_1 = (2\mu - a + c(1 - \mu^2))y_1 \\
 \quad - by_2 + Q_1(\mathbf{y}, \mu), \\
 \dot{y}_2 = by_1 + (2\mu - a \\
 \quad + c(1 - \mu^2))y_2 + Q_2(\mathbf{y}, \mu), \\
 \dot{y}_3 = -\mu y_3 + Q_3(\mathbf{y}, \mu),
 \end{cases} \tag{23}$$

其中

$$\begin{cases}
 Q_1(\mathbf{y}, \mu) = (1 - 2c\mu)y_1 y_3 - cy_1 y_3^2, \\
 Q_2(\mathbf{y}, \mu) = (1 - 2c\mu)y_2 y_3 - cy_2 y_3^2, \\
 Q_3(\mathbf{y}, \mu) = -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.
 \end{cases} \tag{24}$$

通过 $Q_p(\mathbf{y}, \mu) (p = 1, 2, 3)$ 在 Hopf 分岔点 $\mu = \mu_0$ 的值, 得到如下特征量 [15]

$$\begin{aligned}
 g_{20}^o &= g_{11}^o = G_{21}^o = 0, \\
 G_{110}^o &= 1 - 2c\mu_0, G_{101}^o = 0, \\
 w_{20}^o &= 0, w_{11}^o = -\frac{1}{\mu_0}
 \end{aligned} \tag{25}$$

其中上标 “o” 代表相应于未控系统 (1) 的特征量, 则系统 (1) 的曲率系数 σ_1^o 为 [15]

$$\sigma_1^o = -\frac{1 - 2c\mu_0}{\mu_0}. \tag{26}$$

此外, 系统 (1) 在平衡点 $S_2 = (0, 0, \mu)$ 的 Jacobian 矩阵有一对虚数特征根 $\lambda_{1,2} = 2\mu - a + c(1 - \mu^2) \pm ib$, 其实部为 $\alpha(\mu) = 2\mu - a + c(1 - \mu^2)$, 则 $\alpha(\mu)$ 对 μ 在 $\mu = \mu_0$ 处的导数为

$$\alpha'(0) = 2(1 - c\mu_0). \tag{27}$$

将 (26) 和 (27) 式代入极限环的幅值近似解析解 $r \doteq \sqrt{-\frac{\alpha'(0)}{\sigma_1}(\mu - \mu_0)}$ 得到, 当 $\mu > \mu_0$ 且 $|\mu - \mu_0| \ll 1$ 时, 系统 (1) 极限环幅值的近似解析解

$$r_0 \doteq \sqrt{\frac{2\mu_0(1 - c\mu_0)}{1 - 2c\mu_0}(\mu - \mu_0)}. \tag{28}$$

4 Langford 系统极限环幅值的非线性控制

4.1 非线性控制公式

拟设计非线性反馈控制器 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu) = (u_1, u_2, u_3)^T$ 如 (3) 式, 其中 (x_{10}, x_{20}, x_{30}) 为系统 (1) 在 $\mu = \mu_0$ 时的平衡点 $S_2 = (0, 0, \mu)$, 即 $x_{10} = 0, x_{20} = 0, x_{30} = \mu_0$; 控制器 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu)$

不改变系统的 Hopf 分岔值 μ_0 和平衡点 S_2 . 受控系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\mu - a)x_1 - bx_2 + x_1x_3 \\ \quad + cx_1(1 - x_3^2) + u_1, \\ \dot{x}_2 = bx_1 + (\mu - a)x_2 + x_2x_3 \\ \quad + cx_2(1 - x_3^2) + u_2, \\ \dot{x}_3 = \mu x_3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + u_3. \end{cases} \quad (29)$$

对受控系统 (29) 做平移变换, 则在 $\mu = \mu_0$ 时, 受控系统 (29) 转化为如下规范型

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\omega_0 y_2 + Q_1(\mathbf{y}, \mu) + \tilde{u}_1, \\ \dot{y}_2 = \omega_0 y_1 + Q_2(\mathbf{y}, \mu) + \tilde{u}_2, \\ \dot{y}_3 = \lambda_3(\mu_0) y_3 + Q_3(\mathbf{y}, \mu) + \tilde{u}_3, \end{cases} \quad (30)$$

其中 $Q_p(\mathbf{y}, \mu)$ ($p = 1, 2, 3$) 为原系统 (1) 非线性项的规范型转化项, 见 (24) 式, 控制器 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu)$ 转换后为

$$\begin{aligned} \tilde{u}_p = & \sum_{i,j=1}^3 A_{pij} y_i y_j \\ & + \sum_{i,j,k=1}^3 B_{pijk} y_i y_j y_k \quad (p = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (31)$$

由转换后控制器 \tilde{u}_p 的各控制增益项 A_{pij} , B_{pijk} 以及原系统的特征量 (25), 得到受控系统 (29) 曲率系数

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & \sigma_1^0 + \left(\frac{1}{2\mu_0} - c \right) (A_{311} + A_{322}) \\ & - \frac{1}{2\mu_0} (A_{113} + A_{223}) \\ & + \frac{1}{4b} (A_{122}A_{222} - A_{111}A_{211}) \\ & + \frac{1}{8b} A_{112} (A_{111} + A_{122}) \\ & - \frac{1}{8b} A_{212} (A_{211} + A_{222}) \\ & + \frac{1}{4\mu_0} (A_{311} + A_{322}) (A_{113} + A_{223}) \\ & + \frac{\mu_0 A_{312} + 2b(A_{311} - A_{322})}{8(4b^2 + \mu_0^2)} (A_{213} + A_{123}) \\ & + \frac{A_{312} + \mu_0(A_{311} - A_{322})}{8(4b^2 + \mu_0^2)} (A_{113} - A_{223}) \\ & + \frac{1}{8} (3B_{1111} + B_{1122} + B_{2112} + 3B_{2222}), \end{aligned} \quad (32)$$

式中 σ_1^0 为原系统 (1) 的曲率系数, 见 (26) 式; 该式与三维系统普适性表达式 (18) 相比较要简化得多; 式中某些控制增益之间依然存在一定的耦合关系.

受控系统 (29) 极限环的幅控关系 (即极限环幅值与控制增益之间的近似解析关系) 为

$$r \doteq \sqrt{-2(1 - c\mu_0)(\mu - \mu_0)/\sigma_1}. \quad (33)$$

可见, 曲率系数 σ_1 是预测和控制极限环幅值大小的重要因素; 在预设的非线性多项式控制器 (3) 中, 不是所有的控制增益项都对幅值控制起作用. 保留存在于曲率系数 σ_1 控制公式中的控制增益项, 删去无益于幅值控制的项, 则预设的控制器 (3) 简化为

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = A_{111}y_1^2 + A_{122}y_2^2 + A_{112}y_1y_2 \\ \quad + A_{123}y_2y_3 + A_{113}y_1y_3 \\ \quad + B_{1111}y_1^3 + B_{1122}y_1y_2^2, \\ \tilde{u}_2 = A_{211}y_1^2 + A_{222}y_2^2 + A_{212}y_1y_2 \\ \quad + A_{223}y_2y_3 + A_{213}y_1y_3 \\ \quad + B_{2222}y_2^3 + B_{2112}y_1^2y_2, \\ \tilde{u}_3 = A_{311}y_1^2 + A_{322}y_2^2 + A_{312}y_1y_2. \end{cases} \quad (34)$$

有效控制器 (17) 在形式组成上与对三维系统普适性控制器设计的依据 (22) 式相同. 对 (17) 式做反向平移变换, 得到施加于系统 (1) 的非线性控制器

$$\begin{cases} u_1 = A_{111}x_1^2 + A_{122}x_2^2 + A_{112}x_1x_2 \\ \quad + A_{123}x_2x_3 + A_{113}x_1x_3 \\ \quad + B_{1111}x_1^3 + B_{1122}x_1x_2^2, \\ u_2 = A_{211}x_1^2 + A_{222}x_2^2 + A_{212}x_1x_2 \\ \quad + A_{223}x_2x_3 + A_{213}x_1x_3 \\ \quad + B_{2222}x_2^3 + B_{2112}x_1^2x_2, \\ u_3 = A_{311}x_1^2 + A_{322}x_2^2 + A_{312}x_1x_2. \end{cases}$$

由上述公式, 在给定幅值控制目标下, 首先计算曲率系数 σ_1 的大小, 再依据 (32) 式, 优化选取控制增益, 进而确定控制器 u_p , 实现 Langford 系统极限环幅值的优化控制.

4.2 非线性控制公式的几种简化情形

只考虑对 Langford 系统一个或两个方程进行控制, 可以得到上述控制公式的 6 种简化情形, 它们可以在很大程度上方便 Langford 系统幅值控制问题的具体解决. 作为示例, 以下列出 2 种简化情形.

情形 1 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \mu) = (\tilde{u}_1, 0, 0)^T$, 其中 $\tilde{u}_1 =$

$$\sum_{i,j=1}^3 A_{1ij}y_iy_j + \sum_{i,j,k=1}^3 B_{1ijk}y_iy_jy_k.$$

此时, $A_{pij} = B_{pijk} = 0$ ($p = 2, 3$), 由 (32) 式得到简化的曲率系数 σ_1 控制公式

$$\sigma_1^k = \sigma_1^o - \frac{1}{2\mu_0}A_{113} + \frac{1}{8b}A_{112}(A_{111} + A_{122}) + \frac{1}{8}(3B_{1111} + B_{1122}), \quad (35)$$

根据控制公式 (35), 去掉对幅值控制无作用的增益项, 则控制器 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \mu) = (\tilde{u}_1, 0, 0)^T$ 简化为

$$\tilde{u}_1 = A_{111}y_1^2 + A_{122}y_2^2 + A_{112}y_1y_2 + A_{113}y_1y_3 + B_{1111}y_1^3 + B_{1122}y_1y_2^2, \quad (36)$$

通过平移变换, 得到施加于原系统的控制器 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu) = (u_1, 0, 0)^T$,

$$u_1 = A_{111}x_1^2 + A_{122}x_2^2 + A_{112}x_1x_2 + A_{113}x_1x_3 + B_{1111}x_1^3 + B_{1122}x_1x_2^2. \quad (37)$$

情形 2 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \mu) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, 0)^T$, 其中

$$\tilde{u}_1 = \sum_{i,j=1}^3 A_{1ij}y_iy_j + \sum_{i,j,k=1}^3 B_{1ijk}y_iy_jy_k,$$

$$\tilde{u}_2 = \sum_{i,j=1}^3 A_{2ij}y_iy_j + \sum_{i,j,k=1}^3 B_{2ijk}y_iy_jy_k.$$

则曲率系数

$$\sigma_1 = \sigma_1^o - \frac{1}{2\mu_0}(A_{113} + A_{223}) + \frac{1}{4b}(A_{122}A_{222} - A_{111}A_{211}) + \frac{1}{8b}(A_{112}(A_{111} + A_{122}) - A_{212}(A_{211} + A_{222})) + \frac{1}{8}(3B_{1111} + B_{1122} + B_{2112} + 3B_{2222}). \quad (38)$$

控制器 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \mu) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, 0)^T$ 简化为

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = A_{111}y_1^2 + A_{122}y_2^2 + A_{112}y_1y_2 + A_{113}y_1y_3 + B_{1111}y_1^3 + B_{1122}y_1y_2^2, \\ \tilde{u}_2 = A_{211}y_1^2 + A_{222}y_2^2 + A_{212}y_1y_2 + A_{223}y_2y_3 + B_{2222}y_2^3 + B_{2112}y_1^2y_2. \end{cases} \quad (39)$$

控制器 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu) = (u_1, u_2, 0)^T$ 为

$$\begin{cases} u_1 = A_{111}x_1^2 + A_{122}x_2^2 + A_{112}x_1x_2 + A_{113}x_1(x_3 - \mu_0) + B_{1111}x_1^3 + B_{1122}x_1x_2^2, \\ u_2 = A_{211}x_1^2 + A_{222}x_2^2 + A_{212}x_1x_2 + A_{223}x_2(x_3 - \mu_0) + B_{2222}x_2^3 + B_{2112}x_1^2x_2 \end{cases} \quad (40)$$

5 非线性控制公式的应用

直接应用上述简化的控制器设计依据、极限环曲率系数公式以及极限环幅值控制的近似解析式可以很方便地获得 Langford 系统极限环的幅值控制.

5.1 对控制公式简化情形 1 的直接应用

根据 4.2 节中的简化情形 1, 参考 (37) 式, 设计控制器为 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu) = (u_1, 0, 0)^T$, 其中

$$u_1 = k_1x_1^3, \quad (41)$$

这里 k_1 为控制增益. 按照情形 1 的计算步骤, 首先得到规范型 (30) 下的控制律 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \mu) = (\tilde{u}_1, 0, 0)^T$, 其中 $\tilde{u}_1 = k_1y_1^3$, 直接应用 (35) 式并代入 (26) 式, 得到曲率系数为

$$\sigma_{11} = 2c - \frac{1}{\mu_0} + \frac{3}{8}k_1. \quad (42)$$

因此, 在 $\mu > \mu_0$ 且 $|\mu - \mu_0| \ll 1$ 时极限环的幅控关系为

$$r \doteq 4\sqrt{-\frac{\mu_0(1 - c\mu_0)}{-8 + 16c\mu_0 + 3\mu_0k_1}(\mu - \mu_0)}, \quad (43)$$

当 $k_1 = 0$ 时, 近似解 (43) 退化为原系统 (1) 的极限环幅值的近似解 (28). 显然, 对于在 $\mu > \mu_0$ 且 $|\mu - \mu_0| \ll 1$ 范围内的某 μ 值, 极限环的幅值随着控制增益 k_1 的变化而变化. 依据曲率系数 $\sigma_{11} < 0$, 推得极限环稳定的条件是 $k_1 < \frac{8}{3}\left(\frac{1}{\mu_0} - 2c\right)$.

(i) 当 $a = 1, c = 0$ 时, 对于 $\mu > 0.5$ 且 $|\mu - 0.5| \ll 1$, 极限环幅控关系为

$$r \doteq 4\sqrt{\frac{1}{16 - 3k_1}(\mu - 0.5)}. \quad (44)$$

(ii) 当 $a = 3, c = 0.2$ 时, 对于 $\mu > 1.6834$ 且 $|\mu - 1.6834| \ll 1$, 极限环幅控关系为

$$r \doteq 2.6147\sqrt{\frac{1}{1 - 1.9325k_1}(\mu - 1.6834)}. \quad (45)$$

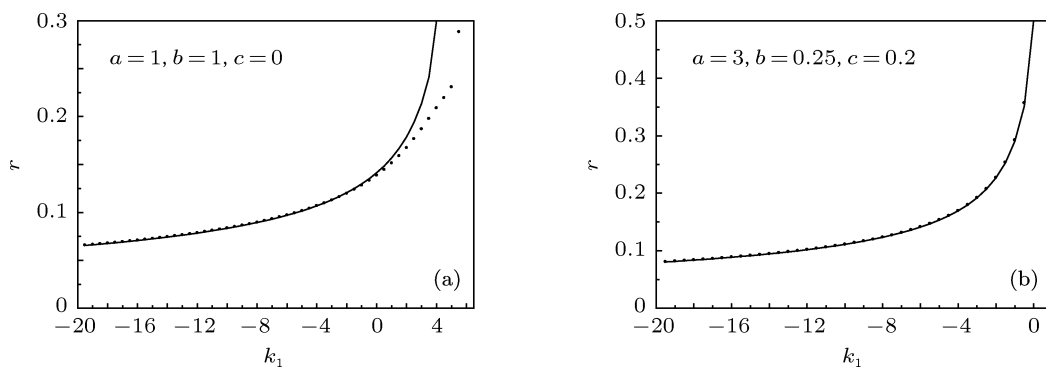


图1 受控系统(29) ($u_1 = k_1 x_1^3, u_2 = u_3 = 0$) 的控制增益-幅值 (k_1 - r) 曲线 (a) $\mu = 0.52$; (b) $\mu = 1.72$

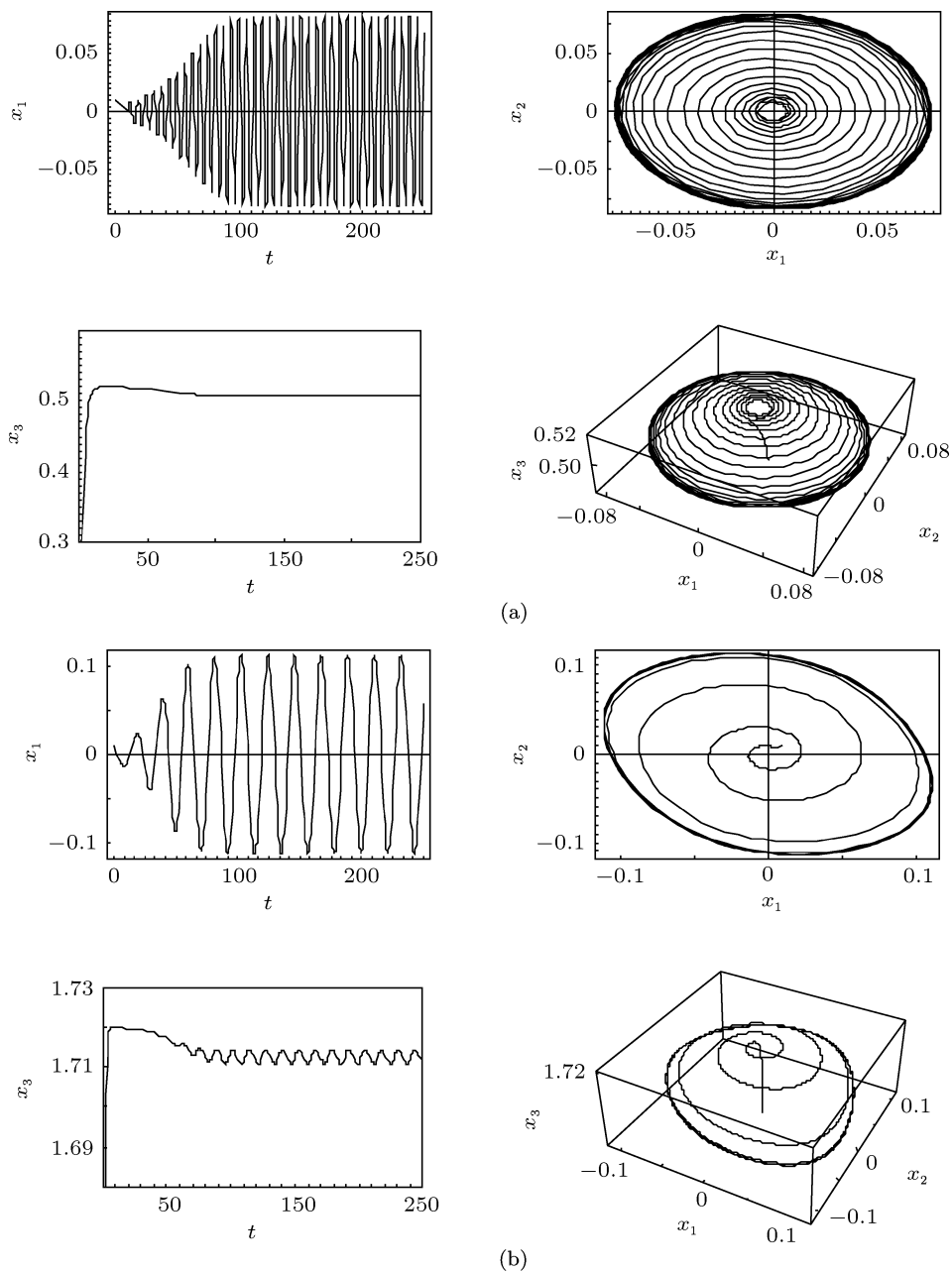


图2 受控系统(29) 在控制器 $u_1 = k_1 x_1^3$ ($u_2 = u_3 = 0$) 作用下的数值模拟 ($k_1 = -10$) (a) $a = 1, b = 1, c = 0; \mu = 0.52$; (b) $a = 3, b = 0.25, c = 0.2; \mu = 1.72$

图 1 为控制增益 - 幅值 (k_1 - r) 曲线, 它反映了受控系统 (29) 在非线形控制器 $u_1 = k_1 x_1^3$ ($u_2 = u_3 = 0$) 作用下控制增益与极限环幅值解之间的关系. 一方面, 当控制增益 k_1 值沿正向增加时, 极限环幅值增加; 另一方面, 在 k_1 值略为远离其右端极限值时, 幅控关系 (44), (45) (用实线表示) 与数值解 (用虚线表示) 符合很好, 且随着 k_1 值沿负向变化, 符合程度越来越高, 但是, 在 k_1 的绝对值很大时, 它对幅值改变的调节作用不大.

在立方控制器 $u_1 = k_1 x_1^3$ ($u_2 = u_3 = 0$) 作用下受控系统 (29) ($k_1 = -10$) 的数值模拟如图 2 所示.

5.2 对控制公式简化情形 2 的直接应用

根据 4.2 节中的简化情形 2, 参考 (40) 式, 设计控制器为 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu) = (u_1, u_2, 0)^T$, 其中

$$\begin{cases} u_1 = k_2 x_1^3 + k_3 x_1 x_2^2, \\ u_2 = k_4 x_2^3 + k_5 x_1^2 x_2, \end{cases} \quad (46)$$

$$r \doteq 4 \sqrt{-\frac{\mu_0(1-c\mu_0)}{-8+16c\mu_0+\mu_0(3k_2+k_3+3k_4+k_5)}(\mu-\mu_0)}, \quad (50)$$

上式可以提供多种控制参数的选取方案. 当令 $k_2 = k_3 = k_4 = k_5$ 时, 幅控关系简化为

$$r \doteq \sqrt{\frac{2\mu_0(1-c\mu_0)}{1-2c\mu_0-\mu_0 k_2}}(\mu-\mu_0). \quad (51)$$

(i) 当 $a = 1, c = 0$ 时, 对于 $\mu > 0.5$ 且 $|\mu - 0.5| \ll 1$, 幅控关系 (51) 式改写为

$$r \doteq \sqrt{\frac{1}{1-0.5k_2}}(\mu-0.5), \quad (52)$$

$$r^2 = \frac{-1+2ac-2c^2-c\mu+k_2(2a-2c-3\mu+c\mu^2)+|c\mu-1|\sqrt{\Psi}}{2(c+k_2)^2} (k_2 \neq 0), \quad (54)$$

其中

$$\Psi = 1+4c^2-4a(c+k_2)+6k_2\mu+k_2^2\mu^2+4c(k_2+\mu). \quad (55)$$

(iii) 当 $a = 1, c = 0$ 时, 幅值精确解 (54) 式简化为

$$r^2 = \frac{-1+k_2(2-3\mu)+\sqrt{1-4k_2+6k_2\mu+k_2^2\mu^2}}{2k_2^2} (k_2 \neq 0). \quad (56)$$

(iv) 当 $a = 3, c = 0.2$ 时, 幅值精确解 (54) 式简化为

$$r^2 = \frac{3-5\mu+5k_2(28-15\mu+\mu^2)+|\mu-5|\sqrt{-31+20\mu+25k_2^2\mu^2+10k_2(-28+15\mu)}}{2(1+5k_2)^2}. \quad (57)$$

k_2, k_3, k_4 和 k_5 均为控制增益, 则受控系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\mu-a)x_1 - bx_2 + x_1x_3 \\ \quad + cx_1(1-x_3^2) + k_2x_1^3 + k_3x_1x_2^2, \\ \dot{x}_2 = bx_1 + (\mu-a)x_2 + x_2x_3 \\ \quad + cx_2(1-x_3^2) + k_4x_1^2x_2 + k_5x_2^3, \\ \dot{x}_3 = \mu x_3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \end{cases} \quad (47)$$

首先得到规范型 (30) 下的控制律 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \mu) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, 0)^T$, 其中

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = k_2 y_1^3 + k_3 y_1 y_2^2, \\ \tilde{u}_2 = k_4 y_2^3 + k_5 y_1^2 y_2, \end{cases} \quad (48)$$

直接应用 (38) 式并代入 (26) 式, 得到曲率系数为

$$\sigma_{112} = 2c - \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{8}(3k_2 + k_3 + 3k_4 + k_5). \quad (49)$$

因此, 在 $\mu > \mu_0$ 且 $|\mu - \mu_0| \ll 1$ 时极限环的幅控关系为

极限环稳定的条件为 $k_2 < 2$.

(ii) 当 $a = 3, c = 0.2$ 时, 对于 $\mu > 1.6834$ 且 $|\mu - 1.6834| \ll 1$, 幅控关系 (51) 式改写为

$$r \doteq 2.6147 \sqrt{\frac{1}{1-5.1535k_2}}(\mu-1.6834), \quad (53)$$

极限环稳定的条件为 $k_2 < 0.1940$.

当 $k_2 = k_3 = k_4 = k_5$ 时, 通过做圆柱坐标变换, 可以得到受控系统 (47) 极限环幅值的精确解为

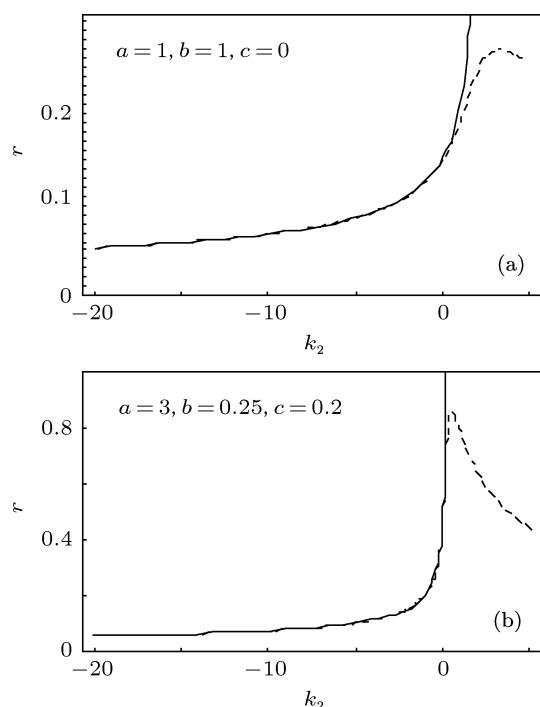


图3 受控系统(42) ($k_2 = k_3 = k_4 = k_5$) 控制增益与幅值关系 (k_2-r) 曲线 (a) $\mu = 0.52$; (b) $\mu = 1.72$

显然, 受控系统(47) ($k_2 = k_3 = k_4 = k_5$) 幅值控制的精确解(54)式比其近似解(51)式要复杂得

多, 相对来说, 近似解更便于应用, 特别是在 Hopf 分岔域内近似误差很小. 图3所示的控制增益与幅值关系 (k_2-r) 曲线分别根据精确解(56), (57)式以及近似解(52), (53)式而绘制, 实线表示近似解, 虚线表示精确解. 由图3可见, 对于 Hopf 分岔值 μ_0 临域的 μ 值, 在极限环稳定的控制增益 k_2 选取区间内, 幅控关系与精确解符合得很好. 当控制增益 k_2 沿正向变化时, 极限环幅值增加.

6 结语

本文研究了 Langford 系统 Hopf 分岔极限环幅值的非线性反馈控制问题, 首先根据中心流形定理和规范型降维理论, 推导三维受控系统极限环幅控关系表达式, 然后, 针对 Langford 系统, 得到大大简化的曲率系数控制公式以及极限环幅控关系式; 数值仿真验证了理论分析结果的正确性. 本文提供的幅值控制方法可避免控制器设计的盲目性和偶然性, 使控制目标的实现方便、有效.

- [1] Berns D W, Moiola J L, Chen G R 1998 *Automatica* **34** 1567
- [2] Oucini S S, Nayfeh A H 1999 *J. Sound and Vibration* **224** 33
- [3] Berns D W, Moiola J L, Chen G R 2000 *Int. J. Bifur. Chaos* **10** 2815
- [4] Angulo F, Bernardo M, Fossas E 2005 *IEEE Trans. Circ. Sys.* **52** 366
- [5] Tang J S, Chen Z L 2006 *Int. J. Bifur. Chaos* **16** 1
- [6] Liu X D, Huang W H 1999 *J. Vibrat. Eng.* **12** 21 (in Chinese) [刘向东, 黄文虎 1999 振动工程学报 **12** 21]
- [7] Qian C Z, Fu W B 2005 *J. Dyn. Control* **3** 7 (in Chinese) [钱长照, 符文彬 2005 动力学与控制学报 **3** 7]
- [8] Tang J S, Xiao H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 101 (in Chinese) [唐驾时, 萧寒 2005 物理学报 **56** 101]
- [9] Liu S H, Tang J S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6162 (in Chinese) [刘素华, 唐驾时 2008 物理学报 **57** 6162]
- [10] Liu S H, Zhao C G 2008 *J. Dyn. Control* **6** 141 (in Chinese) [刘素华, 赵成刚 2008 动力学与控制学报 **6** 141]
- [11] Liu S H, Tang J S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3145 (in Chinese) [刘素华, 唐驾时 2007 物理学报 **56** 3145]
- [12] Liu S H, Wang S G 2008 *J. Hunan Univ.* **35** 55 (in Chinese) [刘素华, 王曙光 2008 湖南大学学报 **35** 55]
- [13] Liu S H, Tang J S 2008 *Chin. Phys.* **B 17** 1691
- [14] Liu S H 2008 *Ph. D. Dissertation* (Changsha: Hunan University) (in Chinese) [刘素华 2008 博士学位论文 (长沙: 湖南大学)]
- [15] Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Y 1981 *Theory and Applications of Hopf Bifurcation* (London: Cambridge Univ.) p35

Amplitude control of limit cycle from Hopf bifurcation in the Langford system*

Cui Yan^{1)2)†} Liu Su-Hua²⁾ Ge Xiao-Ling¹⁾

1) (*School of Mechanical and Power Engineering, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China*)

2) (*Vocational Technical College, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 200437, China*)

(Received 6 August 2011; revised manuscript received 20 October 2011)

Abstract

The control of amplitude of limit cycle emerging from the Hopf bifurcation in Langford system under a nonlinear feedback controller is investigated in this paper. Explicit nonlinear control formulae and amplitude approximations in terms of control gains are derived by utilizing the center manifold theory and normal form reduction. Gain-amplitude curves for controlled systems are drawn and verified by numerical simulations. The formulae and expressions for the Langford system present a convenient approach to obtaining an effective analytical control in this system.

Keywords: amplitude control, Langford system, limit cycle, Hopf bifurcation

PACS: 02.30.Yy

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10672053).

† E-mail: cuiyan0320@sohu.com