

强磁场中 Fermi 气体的稳定性及顺磁性*

门福殿† 王海堂 何晓刚

(中国石油大学(华东)理学院, 青岛 266555)

(2011年8月19日收到; 2011年10月16日收到修改稿)

运用理论解析和数值模拟的方法, 研究强磁场中 Fermi 气体在低温下的稳定性及顺磁性, 分析温度、磁场对稳定性及磁化率的影响. 研究结果显示, 强磁场引起系统稳定性的改变, 这种改变与温度有关, 而温度对稳定性改变及磁化率的影响又与自由气体的化学势即粒子数密度有关. 当自由系统的化学势为偶数时, 磁场弱化系统的稳定性, 温度升高可降低系统的磁化率; 当自由系统的化学势为奇数时, 磁场强化系统的稳定性, 温度升高可增大系统的磁化率. 升高温度, 可以弱化磁场对系统稳定性的影响; 加强磁场, 可以使得系统稳定性的改变发生振荡, 使系统磁化率的振荡中心下移.

关键词: 强磁场, Fermi 气体, 稳定性, 磁化率

PACS: 05.30.-d, 71.10.Ca, 51.35.+a, 51.60.+a

1 引言

近年来, 随着理论研究的进展和实验技术的提高, 超冷 Fermi 气体的研究已经取得了重要成果^[1-7], 关于 Fermi 系统稳定性的理论和实验研究也逐渐增多. 如文献[8]的结果表明, 简并 Fermi 气体在一定条件下也会出现崩塌. 文献[9]也对受约束的弱相互作用 Fermi 气体的不稳定性进行了研究, 给出了系统不稳定性的密度条件. 文献[10]从热力学角度研究了弱相互作用 Fermi 气体的稳定性, 给出了系统不稳定性的粒子数密度判据. 文献[11]研究了弱磁场中弱相互作用 Fermi 气体的力学稳定性, 给出了系统不稳定的条件. 文献[7]研究了强磁场中 Fermi 气体的低温统计性质, 分析了磁场的影响机制. 在此基础上, 我们研究强磁场中 Fermi 气体低温下的稳定性和顺磁性, 深入探讨温度及磁场对稳定性及磁化率的影响机理.

2 系统的稳定性条件及磁化率

据文献[7], 热力学势函数可写为

$$\Omega = \Omega_0(\mu) + \Omega_1(\mu) + \Omega_2(\mu) + \Omega_3(\mu), \quad (1)$$

其中

$$\Omega_1(\mu) = -\frac{(m\sigma B)^{3/2}TV}{\pi^3\hbar^3} \log[1 + e^{\frac{\mu}{T}}] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}, \quad (2)$$

$$\Omega_2(\mu) = -\frac{(\sigma B)^{5/2}m^{3/2}}{\pi^4\hbar^3} \frac{e^{\mu/T}}{1 + e^{\mu/T}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{5/2}}, \quad (3)$$

$$\Omega_3(\mu) = \frac{\sqrt{2}(m\sigma B)^{3/2}TV}{\pi^2\hbar^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha}{k^{3/2} \sinh \beta}. \quad (4)$$

$\Omega_0(\mu)$ 为无磁场时的热力学势函数, $\Omega_1(\mu)$ 和 $\Omega_2(\mu)$ 为磁场产生的非振荡项, $\Omega_3(\mu)$ 为磁场产生的振荡项. 且在低温情况下, 稳定性条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial V} = & \frac{\partial P_0}{\partial V} - \frac{2(m\sigma B)^{3/2}}{9\pi^3\hbar^3} \frac{\mu}{V} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \\ & - \frac{2\sqrt{2}m^{3/2}(\sigma B)^{1/2}T}{9\pi\hbar^3} \frac{\mu}{V} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{k^{1/2} \sinh \beta} \\ & + \frac{4\sqrt{2}m^{3/2}T}{9\hbar^3(\sigma B)^{1/2}} \frac{\mu^2}{V} \sum_{k=1}^{\infty} k^{1/2} \frac{\cos \alpha}{\sinh \beta} < 0, \quad (5) \end{aligned}$$

其中 $\alpha = \pi\mu k/\sigma B - \pi/4$, $\beta = \pi^2 kT/\sigma B$. 考虑强磁场条件 $T \leq \sigma B \ll \mu$, 令 $\mu = x\sigma B$, $T = y\sigma B$ (这里 $x \gg 1$, $0 < y \leq 1$, σ 为 Bohr 磁子) 则有

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{\partial P_0}{\partial V} - \frac{2m^{3/2}(\sigma B)^{5/2}}{9\hbar^3 V}$$

* 山东省自然科学基金(批准号: ZR2010AL027)和中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: 10CX04039A)资助的课题.

† E-mail: menfudian@163.com

$$\times \left[\frac{x}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} + \frac{\sqrt{2}xy}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi kx - \pi/4)}{k^{1/2} \sinh(\pi^2 ky)} - 2\sqrt{2}x^2y \sum_{k=1}^{\infty} k^{1/2} \frac{\cos(\pi kx - \pi/4)}{\sinh(\pi^2 ky)} \right]. \quad (6)$$

再令 $\sigma B = z\mu$, $T = 10^{-2}T_F \approx 10^{-2}\mu$, 则又有

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial V} &= \frac{\partial P_0}{\partial V} - \frac{2\mu^{5/2}m^{3/2}}{9\hbar^3V} z^{5/2} \\ &\times \left[\frac{1}{\pi^3 z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} + 10^{-2} \frac{\sqrt{2}}{\pi z^2} \right. \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k/z - \pi/4)}{k^{1/2} \sinh(10^{-2}\pi^2 k/z)} - \frac{2\sqrt{2}}{z^3} 10^{-2} \\ &\left. \times \sum_{k=1}^{\infty} k^{1/2} \frac{\cos(\pi k/z - \pi/4)}{\sinh(10^{-2}\pi^2 k/z)} \right], \quad (7) \end{aligned}$$

其中 $\partial P_0/\partial V = -2n\varepsilon_F/3V$, n 为粒子数密度, ε_F 为自由系统的 Fermi 能.

热力学势函数对磁场求导,

$$-\frac{\partial \Omega_1}{\partial B} = \frac{3(m\sigma)^{3/2}\mu V \sqrt{B}}{2\pi^3 \hbar^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}, \quad (8)$$

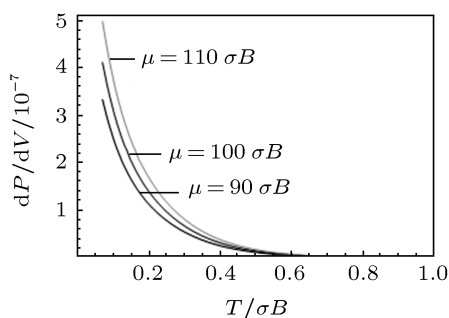
$$-\frac{\partial \Omega_2}{\partial B} = \frac{5(mB)^{3/2}\sigma^{5/2}V}{2\pi^4 \hbar^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{5/2}}, \quad (9)$$

由文献 [12], 在 $\mu \gg T$ 的情况下, 可取

$$-\frac{\partial \Omega_3}{\partial B} \approx -\frac{\sqrt{2}\sigma m^{3/2}\mu TV}{\pi \hbar^3 \sqrt{B}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{k^{1/2} \sinh \beta}, \quad (10)$$

得系统的磁矩

$$\begin{aligned} M &= -\frac{\partial \Omega}{\partial B} = \frac{3(m\sigma)^{3/2}\mu V \sqrt{B}}{2\pi^3 \hbar^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \\ &+ \frac{5(mB)^{3/2}\sigma^{5/2}V}{2\pi^4 \hbar^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{5/2}} \\ &- \frac{\sqrt{2}\sigma m^{3/2}\mu TV}{\pi \hbar^3 \sqrt{B}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{k^{1/2} \sinh \beta}, \quad (11) \end{aligned}$$



系统的磁化率

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{M}{BV} = \frac{3(m\sigma)^{3/2}\mu}{2\pi^3 \hbar^3 \sqrt{B}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \\ &+ \frac{5m^{3/2}\sigma^{5/2}\sqrt{B}}{2\pi^4 \hbar^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{5/2}} \\ &- \frac{\sqrt{2}\sigma m^{3/2}\mu T}{\pi \hbar^3 B^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{k^{1/2} \sinh \beta}, \quad (12) \end{aligned}$$

令 $\mu = a\sigma B$, $T = b\sigma B$, $a \gg 1$, (12) 式表为

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{m^{3/2}\sigma^{5/2}\sqrt{B}}{\pi \hbar^3} \\ &\times \left[\frac{3a}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} + \frac{5}{2\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{5/2}} \right. \\ &\left. - \sqrt{2}ab \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi ka - \pi/4)}{k^{1/2} \sinh(\pi^2 kb)} \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

令 $p\mu = \sigma B$, $T = 10^{-2}T_F \approx 10^{-2}\mu$, (12) 式又可表为

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{m^{3/2}\sigma^2\sqrt{\mu}}{\pi \hbar^3} \\ &\times \left[\frac{3}{2\pi^2\sqrt{p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} + \frac{5\sqrt{p}}{2\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{5/2}} \right. \\ &\left. - \frac{10^{-2}\sqrt{2}}{p^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k/p - \pi/4)}{k^{1/2} \sinh(10^{-2}\pi^2 k/p)} \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

3 模拟及分析

根据 (6) 和 (13) 式, 取 $n \sim 10^{21}$, $\varepsilon_F \sim 10^{-24}$, $V = 1$, 做图如图 1, $2(\sigma B = 10^{-2}\varepsilon_F, T: (0-1) \sigma B = (0-1) 10^{-2}T_F)$.

根据 (7) 和 (14) 式, 做图如图 3, 4 ($T = 10^{-2}T_F$, $\sigma B: (1-9) 10^{-2}\mu$).

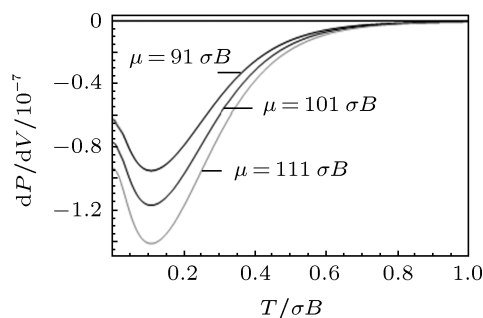


图 1 温度对稳定性改变的影响

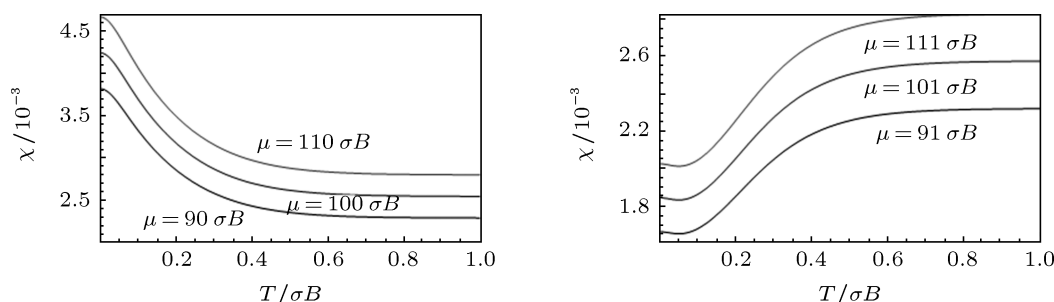


图2 温度对磁化率的影响

图 1 显示, 强磁场引起系统稳定性的改变, 即 $\frac{dP}{dV} \left(\frac{dP}{dV} = \frac{\partial P}{\partial V} - \frac{\partial P_0}{\partial V} \right)$, 这种改变与温度有关, 而温度对稳定性改变及磁化率的影响又与自由气体的化学势 μ 即粒子数密度有关 (因低温时自由气体的化学势 μ 在零级近似下与粒子数密度成比例). 当 μ 为偶数 (即 μ 为 σB 的偶数倍) 时, 磁场引发的稳定性改变为正, 且这种正值随温度的升高在降低. 此时磁场弱化系统的稳定性, 但不会破坏系统的稳定特征, 因为 $\left(\left| \frac{\partial P_0}{\partial V} \right| \sim 10^{-4}, \frac{dP}{dV} \sim 10^{-7} \right)$, 所以 $\left| \frac{\partial P_0}{\partial V} \right| > \frac{dP}{dV}$, 并且这种弱化作用会随温度升高而减小直至消失; 当 μ 为奇数 (即 μ 为 σB 的奇数倍) 时, 磁场引发的系统稳定性的改变为负, 且这种负值随温度的升高基本上在减少 (只有一小段温度范围对应于扩大). 此时磁场强化系统的稳定性, 只是随温度的上升这种强化作用基本上也在减小, 最后消失. 无论 μ 是偶数还是奇数, 随温度的升高, μ 的不同对稳定性改变的差异也在缩小, 直至消失.

从图 2 可看出, 当 μ 为偶 (奇) 数时, 随温度的上升, 系统的顺磁性磁化率基本上是下降 (上升). 这种特征完全是由磁场产生的周期性函数所致. 从 (13) 式的第三项即 $-\sqrt{2}ab \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi ka - \pi/4)}{k^{1/2} \sinh(\pi^2 kb)}$ 可看到, 其中 b 代表了温度的变化, 且该项的正负由周期性的 $\sin(\pi ka - \pi/4)$ 参与决定, 而该取和中的最大项是 $k = 1$ 的项. 因此, 当 μ 取偶数 (实际上是 a 取偶数) 时, $\sin(\pi a - \pi/4)$ 为负, 则第三项为正, 随 b 的增大即温度的升高, $\frac{b}{\sinh(\pi^2 b)}$ 的数值逐渐降低, 从而磁化率逐渐下降; 同理, 当 μ 取奇数时, 随温度的升高磁化率基本上是增加. 从图 2 还可看出, a 值愈大, 即 μ 愈大, 磁化率就愈大, 所以粒子数密度愈大磁化率就愈大. 无论 μ 是偶数还是奇数, 随温度的升高, 系统的磁化率按 μ 的不同各自趋于不同的稳定值. 当 μ 是偶数时, $T = 0$ 时的磁化率

是最大值; 当 μ 是奇数时, $T = 0$ 时的磁化率几乎是最小值. 当 μ 不是 σB 的整数倍时, 也可用模拟做图讨论.

图 3 表明, 强磁场的变化可使系统稳定性的改变发生振荡. 随着磁场的加强, 振荡的幅度在增大. 当 $\frac{dP}{dV} < 0$ 时, 振荡可以使原来稳定的系统更加稳定; 振荡中虽然有 $\frac{dP}{dV} > 0$ 的情况出现, 但是 $\frac{dP}{dV} \sim 10^{-7}$, 所以仍然 $\left| \frac{\partial P_0}{\partial V} \right| > \frac{dP}{dV}$, 此时振荡不足以破坏系统的稳定特征. 图 4 显示, 强磁场仍然使系统保持顺磁性, 而且随磁场的加强, 磁化率的振荡中心下移, 振荡的幅度也在变大. 即随磁场的不断变大, 磁化率的最大与最小值都在降低, 但

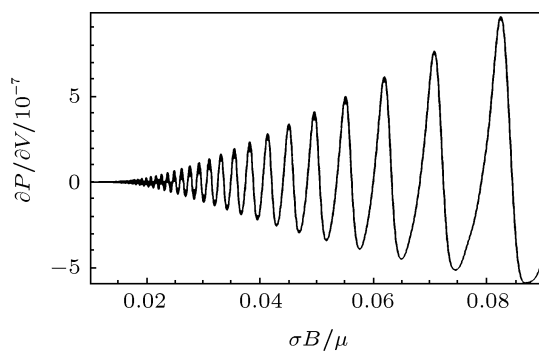


图3 磁场对稳定性改变的影响

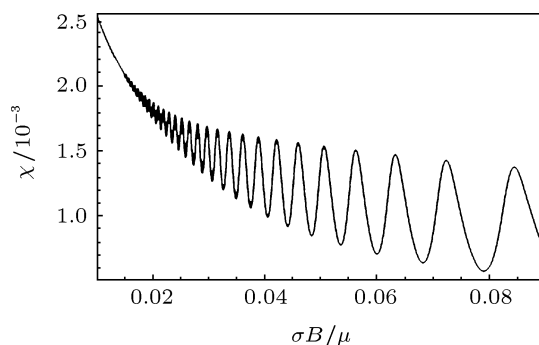


图4 磁场对磁化率的影响

其差别在增大.

文献 [12] 研究了强磁场中 Fermi 气体的磁性, 指出了在强磁场条件 ($T \sim \sigma B$) 下, 系统磁矩的振荡部分的幅度大于单调部分. 1930 年实验上发现的著名的 de Hass-van Alphen 效应, 显示了强磁场中 Fermi 系统的磁矩随外加磁场的增加而振荡的特性 [13,14]. 这反映文献 [12] 中的振荡理论是有实验基础的. 本文关于强磁场对系统稳定性改变的讨论, 既是基于文献 [12] 中振荡的理论基础, 其理论结论 (强磁场引发系统稳定性的改变具有振荡特性) 又与 de Hass-van Alphen 效应 (磁矩的振荡特性) 一致. 因此, 本文关于强磁场对系统稳定性改变的结论是易于接受的.

磁场对系统稳定性的改变与温度以及粒子数密度的相关性, 在物理上是可以理解的. 外磁场对系统稳定性的影响是一种有序性的作用, 温度对稳定性的影响是一种无序性的作用, 两者的效果理应相抗衡, 即随温度的升高, 磁场对稳定性的影响将减弱直至消失; 磁场对系统稳定性的改变与粒子数密度即自由系统化学势的相关性, 反映了物理背景 (单元单相系) 的影响, 背景不同, 磁场的效果当

然不同.

4 结论

本文基于强磁场条件, 用理论解析和数值模拟方法研究了低温下 Fermi 系统的稳定性和顺磁性, 分析了温度及磁场对系统稳定性和磁化率的影响. 结果显示, 磁场对系统稳定性的改变与温度以及自由系统的化学势相关. 当自由系统的化学势为偶数时, 磁场弱化系统的稳定性; 当自由系统的化学势为奇数时, 磁场强化系统的稳定性. 但是随温度的升高, 磁场对系统稳定性的影响、自由系统化学势的不同对稳定性影响的差异均被弱化直至消失. 当自由系统的化学势为偶 (奇) 数时, 随温度的上升, 系统的磁化率基本上是下降 (上升) 直至趋于稳定值, 且粒子数密度愈大, 磁化率愈大. 加强磁场, 可使系统稳定性的改变以及磁化率发生振荡, 并且振荡的幅度逐渐变大. 随着磁场的不断加强, 系统磁化率的振荡中心下移, 其最大与最小值在降低, 但两者的差别在增大.

-
- [1] Regal C A, Ticknor C, Bohn J L, Jin D S 2003 *Nature* **424** 47
- [2] Xiong H W, Liu S J, Zhang W P, Zhan M S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 120401
- [3] Dong H, Ma Y L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 715
- [4] Qin F, Chen J S 2009 *Phys. Rev. A* **79** 043625
- [5] Xiong H W, Liu S J, Zhan M S 2006 *Phys. Rev. A* **74** 033602
- [6] Chen J S, Cheng C M, Li J R, Wang Y P 2007 *Phys. Rev. A* **76** 033617
- [7] Men F D, Fan Z L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030205
- [8] Modugno G, Roati G, Riboli F 2002 *Science* **297** 2240
- [9] Amusia M Y, Msezane A Z, Shaginyan V R 2002 *Phys. Lett. A* **293** 205
- [10] Yan D Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3912 (in Chinese) [袁都奇 2006 物理学报 **55** 3912]
- [11] Men F D, Liu H 2006 *Chin. Phys.* **15** 2856
- [12] Landau L D, Lifshitz E M 1999 *Statistical Physics Part I* (3rd Ed.) (Oxford: Pergamon Press) pp175–177
- [13] Liang X X 2003 *Fundamentals of Advanced Statistical Mechanics* (1st Ed.) (Hohhot: Inner Mongolia University Press) p86 (in Chinese) [梁希侠 2003 高等统计力学导论 (第一版) (呼和浩特: 内蒙古大学出版社) 第 86 页]
- [14] “Quantum Statistical Physics” Compiling Group of Physics Department, Peking University 1987 *Quantum Statistical Physics* (1st Ed.) (Beijing: Peking University Press) pp168–169 (in Chinese) [北京大学物理系 《量子统计物理学》编写组 1987 量子统计物理学 (第一版) (北京: 北京大学出版社) 第 168—169 页]

The stability and paramagnetism of Fermi gas in a strong magnetic field*

Men Fu-Dian[†] Wang Hai-Tang He Xiao-Gang

(College of Science, China University of Petroleum (East China), Qingdao 266555, China)

(Received 19 August 2011; revised manuscript received 16 October 2011)

Abstract

By using theoretical analysis and numerical simulation, the stability and the paramagnetism of Fermi gas in a strong magnetic field at low temperatures are studied, and the influences of temperature and magnetic field on the stability and susceptibility of the system are analyzed. The results show that the strong magnetic field causes variation of a system stability, and such a change relates to temperature. While the effects of temperature on stability and susceptibility are relevant to the chemical potential (i.e. the particle number density) of free gas. When the chemical potential is even, the magnetic field weakens the stability of the system, and the increasing of temperature leads to the reduction in the susceptibility of the system. When the chemical potential is odd, the magnetic field strengthens the stability of the system, while the increasing of temperature can increase the susceptibility of the system. With temperature increasing, the effect of the magnetic field on the stability is weakened. With magnetic field increasing, the change of the stability of the system becomes oscillatory, and the oscillation center of the susceptibility shifts down.

Keywords: strong magnetic field, Fermi gas, stability, susceptibility

PACS: 05.30.-d, 71.10.Ca, 51.35.+a, 51.60.+a

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. ZR2010AL027), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. 10CX04039A).

[†] E-mail: menfudian@163.com