

# 噪声信号特征量分布函数相似特性的研究

林颖璐 闫振纲 杨娟 王春勇 卞保民†

(南京理工大学信息物理与工程系, 南京 210094)

(2011年7月25日收到; 2011年10月14日收到修改稿)

应用高速数据采集卡, 记录悬浮颗粒计数光电传感器本底噪声信号序列值, 研究噪声信号独立特征量, 如信号幅度极值、上升沿幅值、下降沿幅值、极值时序间隔, 以及特征量乘积值等统计分布规律. 结果表明, 上述独立特征量均能够与以自然数  $l$  为自变量的对数正态分布函数高度符合, 噪声信号特征量统计分布呈现出高度相似特征. 基于这种统计相似性, 还可推出噪声信号不同特征量对应的统计自变量之间的幂函数变换关系. 噪声信号特征量统计分布函数相似性可理解为噪声信号集合统计分形特性的一种表现.

**关键词:** 分形, 噪声信号特征量, 统计相似性, 对数正态分布

**PACS:** 05.45.Df, 02.50.-r

## 1 引言

随着分形概念的提出和研究的不断深入, 众多研究人员在随机噪声信号的分析中引入分形理论, 并取得了许多研究成果. 基于分形和自相似理论, 大量研究结果发现, 中子辐射光耦合器噪声信号、金属互连电迁移噪声信号、船舶辐射噪声信号等均具有明显的分形特性<sup>[1-3]</sup>, 并可以利用分形维数, 研究分辨确定性信号与随机信号的方法<sup>[4]</sup>. 这说明, 分形与信号之间存在着一种自然联系, 而正是这种联系, 奠定了分形理论用于信号处理的基础, 开辟了信号应用的新领域<sup>[5]</sup>.

随机噪声特性的分析还有许多常用方法. 在对地震回波的分析中, 美国 MIT 的科学家 Herrmann 和 Stark<sup>[6]</sup> 提出了单尺度子波的信号分析方法, Costa 等<sup>[7]</sup> 提出的多尺度熵方法对生理时间序列的无规则程度给予了描述, 这些方法均可用于建立电子噪声的分析模型. 在对脉冲噪声的研究中, Torío 和 Sánchez<sup>[8,9]</sup> 提出了同时采用水平及垂直两个极轴对脉冲进行分析的方法, 并给出了脉冲的幅度分布及累计幅度分布均服从对数正态分布的实验结果. 杨娟等<sup>[10]</sup> 在悬浮颗粒散射光脉冲信号幅度、宽度随机性分布特征研究时也发现, 对应的计数分布服从以自然数为自变量的对数正态分布形式, 认为这种现象是随机信号具有统计分形特征的

表现. 以上研究结果表明, 利用分形及自相似理论对随机噪声信号的时域特性进行分析, 对研究随机信号内部结构的统计特性具有重要意义.

本文应用 PCI-9812 高速数据采集卡, 对悬浮颗粒光散射计数光电传感器本底噪声信号幅度值进行记录, 并对信号时序大样本记录值进行详细的统计分析研究. 以信号极大值  $f_{\text{Max}}$ , 极小值  $f_{\text{min}}$  为基本标志, 计算极值幅度  $f_{\text{M},j}$  和  $f_{\text{m},j}$ , 上升沿幅值  $V_j$ , 下降沿幅值  $\tilde{V}_j$ , 极值时间间隔  $T_j$ , 极值时间间隔与对应下降沿幅值乘积  $S_j$  等信号特征量的统计分布. 结果表明, 上述噪声信号特征量的统计结果均以很高的精度服从以自然数  $l$  为自变量的对数正态分布. 基于统计概率分布等价条件, 可进一步推导特征量统计函数对应自变量  $l$  之间存在非线性变换关系  $\tilde{l}_Y = (b\tilde{l}_X)^\beta$ . 这种普遍的幂函数变换关系表明, 随机噪声信号可作为统计分形的典型系统. 相似变换  $\tilde{l}_Y = (b\tilde{l}_X)^\beta$  反映了噪声信号特征量群的统计分布  $p_X(l)$  具有相同的本质特性, 等价于以无量纲量  $z \sim \ln \left[ (X/X_\mu)^{\frac{1}{\sigma_m}} \right]$  为自变量的 Gauss 分布.

## 2 光电传感器本底噪声信号、信号特征量及其统计分布函数

使用 PCI-9812 高速数据采集卡将悬浮颗粒计

† E-mail: bianbaomin\_56@yahoo.com.cn

数光电传感器的噪声信号输入计算机存储, 参见图 1, 而后进行数据计算分析处理.

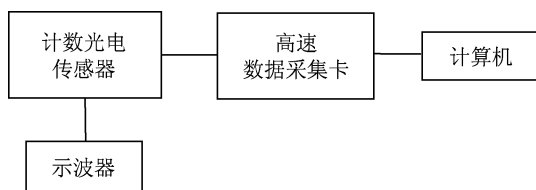


图 1 光电传感器本底噪声信号测量系统示意图

噪声信号具有随机信号的基本特征, 信号幅值观测值对应于以时序为自变量的函数  $f(t)$ ,  $t > 0$ , 参见图 2.

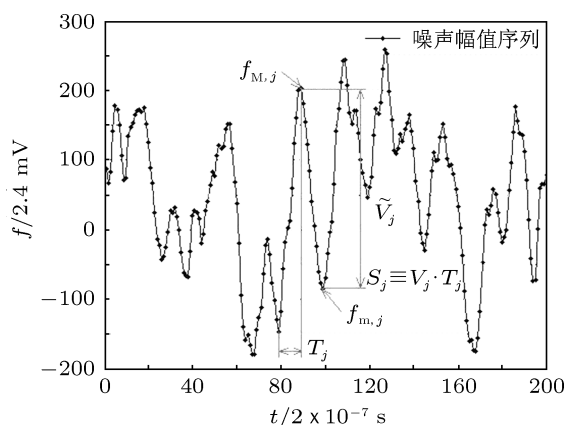


图 2 光电传感器本底噪声信号特征量示意图

任意信号  $f(t)$  的测量结果能够用  $N$  个元素的集合描述  $\{f_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_t$ . 元素的下标 “ $i = \frac{t}{\Delta\tau}$ ” 代表时序自然数,  $\Delta\tau$  为测量系统数据记录时序的分辨率. 取信号幅度分辨率为  $\Delta f$ , 可定义  $f_0 \equiv \min\{f_i\} - \Delta f$ , 将  $\{f_i\}$  变换成集合  $\{F_i\}$ , 对  $\forall i \in [1, N_t]$ , 有  $F_i \equiv f_i - f_0 = l_i \cdot \Delta f \geq \Delta f = \Delta F$ .  $l_i$  为自然数, 即序列自然数集合  $\{l_i \in [1, 2, \dots, L]\}$  能够作为  $\{F_i\}$  的映射. 且有,  $L \equiv \frac{\max\{f_i\} - \min\{f_i\}}{\Delta f} + 1$ .

依相邻时序信号记录值变化的单调性, 定义随机信号的两个基本特征量序列: 极大值序列  $\{f_{M,j}\}$ , 极小值序列  $\{f_{m,j}\}$ , 参见图 2 中的参量符号.

在基本特征量基础上可定义具有相对独立性的其他特征量, 如相邻一对极值幅度  $V_j \equiv$

$f_{M,j} - f_{m,j-1}$ ,  $\tilde{V}_j \equiv f_{M,j} - f_{m,j}$ , 极值宽度  $T_j \equiv t_{f_{M,j}} - t_{f_{m,j-1}}$ ,  $\tilde{T}_j \equiv t_{f_{M,j}} - t_{f_{m,j}}$ . 还可定义复合特征量, 如 “极值幅宽积”  $S_j \equiv V_j \cdot T_j$ ,  $\tilde{S}_j \equiv \tilde{V}_j \cdot \tilde{T}_j$  等等.  $\{F_{M,j}\}$ ,  $\{F_{m,j}\}$  以及上述所有独立特征量时序记录值  $\{X_j\}$  均为随机量集合.

任何集合  $\{X_j\}$  都能够依数值大小进行重新排序, 这种排序结果的一种形式即集合  $\{X_j\}$  的统计分布  $p_X(l)$ . 函数  $p_X(l)$  的数值定义为

$$p_X(l) \equiv \frac{N_l}{N}, \quad (1)$$

$N$  代表  $\{X_j\}$  元素总数,  $N_l$  代表  $\{X_j\}$  中观测值满足  $X = l \cdot \Delta X + (X_{\min} - \Delta X)$  的元素数. 在分档数  $L$  为有限值的条件下, 函数  $p_X(l)$  的数值随总样本量  $N$  的增大趋于稳定; 而在有限观测值域  $[X_{\min}, X_{\max}]$  的条件下, 取统计模型  $\lim_{\substack{\Delta X \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} L \rightarrow \infty$ , 几何直方图  $p_X(l)$  将对应于连续性概率密度函数  $p_X(x)$  的一种映射形式

$$p_X(l) \sim p_X(x) \cdot dx = \frac{N_{x,x+dx}}{N}, \quad x \in [X_{\min}, X_{\max}], \quad (2)$$

$N_{x,x+dx}$  代表集合统计模型  $\{X\}$  中观测值满足  $x_j \in (x, x + dx)$  的元素数. 由确定实验条件下噪声信号集合  $\{f_i\}$  衍生出来的信号特征量集合  $\{X_j\}$  都具有随机性, 它们的统计分布函数  $p_X(l)$  之间必然存在密切的相互关联性.

### 3 随机噪声信号特征量统计分布 $p_X(l)$ 的测定

在本文的测试条件下, 信号幅度最多可分布在 4096 个序列相邻的等间隔  $\Delta V$  通道内, 信号采样率可达 20 MHz. 集合  $\{f_i\}$  元素样本总量  $N$  超过 100 万.

#### 3.1 随机噪声记录值 $\{F_i\}$ 的统计分布

光电传感器噪声信号序列记录值的统计结果参见图 3. 图 3 中序列点代表测量值的统计, 连续曲线代表以统计分布极大值为对称中心的水平镜像曲线. 两种形式差异表明集合  $\{F_i\}$  的统计分布具有不对称性.

表 1 图 4 中噪声信号幅度  $\{F_i\}$  统计分布函数的相关参数

测量对象	总样本量 $N$	测量数据		拟合数据	
		统计参量 $l_\mu$	统计参量 $\sigma_{ln}$	统计参量 $l_\mu$	统计参量 $\sigma_{ln}$
$\{F_i\}$	7894683	974.13	0.1091	978.33	0.1088

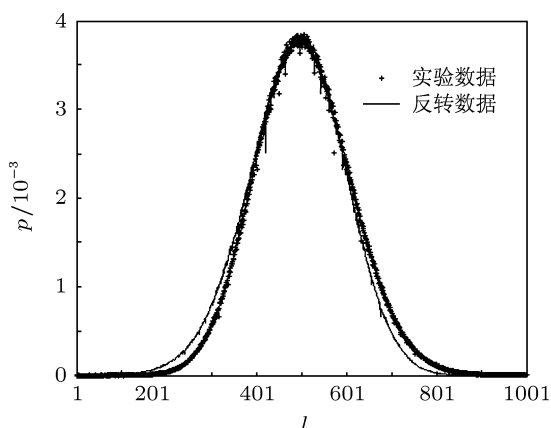


图3 幅值计数分布对称性对比

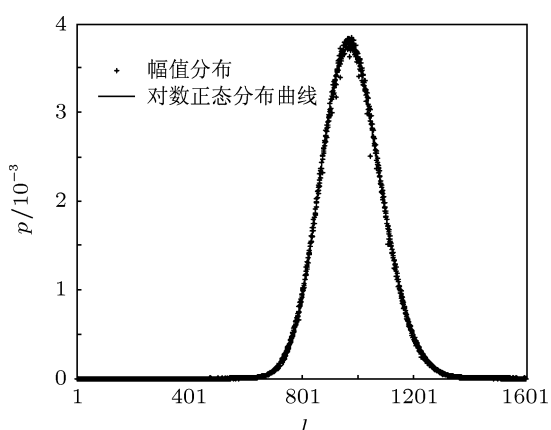


图4 幅值计数分布拟合曲线图

图4给出以自然数  $l$  为自变量的对数正态分布  $p_F(l)$  函数进行拟合的结果, 容易看出,  $\{F_i\}$  的统计分布以极高的精准度与  $p_F(l)$  函数符合. 函数的具体形式见(3)式

$$\begin{aligned}
 p_F(l) &= \frac{\Delta l \cdot \Delta F}{\Omega_F (F - f_{\min} + \Delta F) \sigma_{\ln}} e^{-\frac{(\ln \frac{F - f_{\min} + \Delta F}{F_{\mu}})^2}{2\sigma_{\ln}^2}} \\
 &= \frac{\Delta l \cdot \Delta F}{\Omega_F l \Delta F \sigma_{\ln}} e^{-\frac{(\ln \frac{l \Delta F}{F_{\mu}})^2}{2\sigma_{\ln}^2}} \\
 &\stackrel{\Delta l \equiv 1}{=} \frac{1}{\Omega_F l \sigma_{\ln}} e^{-\frac{(\ln \frac{l}{l_{\mu}})^2}{2\sigma_{\ln}^2}}. \tag{3}
 \end{aligned}$$

取  $p_F(l)$  函数为连续形式时, 即设  $\Delta F \rightarrow 0, L \rightarrow \infty$ , 则有  $\ln l_{\mu} \equiv \int_0^{\infty} \ln l \cdot p_F(l) dl$ ,  $\sigma_{\ln}^2 \equiv$

$\int_0^{\infty} \left(\ln \frac{l}{l_{\mu}}\right)^2 p_F(l) dl$ . 图4中的统计函数考虑  $L > l_{\mu} \gg 1$  条件, 取归一化系数  $\Omega_F = \sqrt{2\pi}$ , 其余参数见表1.

### 3.2 随机噪声信号幅度极值 $\{f_{M,j}\}$ , $\{f_{m,j}\}$ 的统计分布

取随机噪声的幅值  $\{f_{M,j}\}, \{f_{m,j}\}$  进行统计计算, 对应的分布曲线分别参见图5和图6, 拟合曲线的计算参数参见表2, 归一化系数均为  $\Omega_f = \sqrt{2\pi}$ . 特征值  $\{f_{M,j}\}, \{f_{m,j}\}$  的统计结果与模型曲线符合得很好.

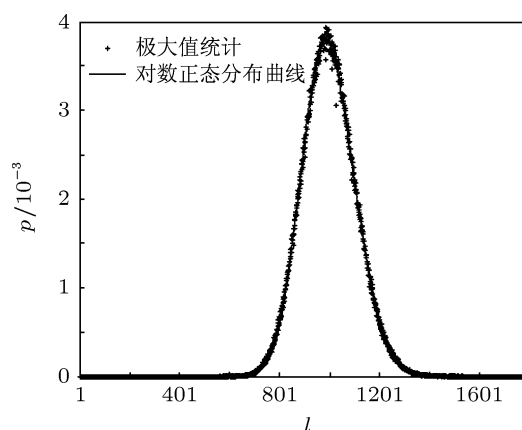


图5 极大值  $\{f_{M,j}\}$  统计分布

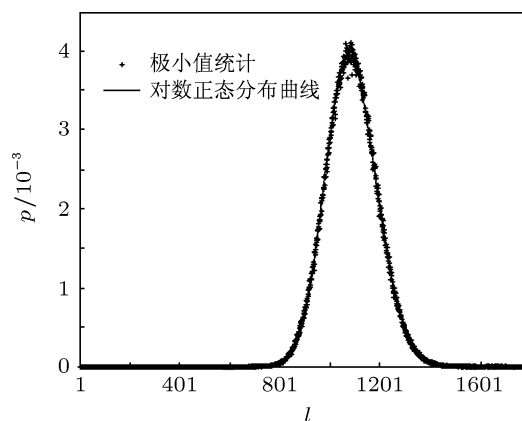


图6 极小值  $\{f_{m,j}\}$  统计分布

表2 噪声信号幅度极值  $\{f_{M,j}\}, \{f_{m,j}\}$  统计分布函数的相关参数

测量对象	总样本量 $N$	测量数据		拟合数据	
		统计参量 $l_{\mu}$	统计参量 $\sigma_{\ln}$	统计参量 $l_{\mu}$	统计参量 $\sigma_{\ln}$
$\{f_{M,j}\}$	1047575	992.63	0.1065	996.28	0.1063
$\{f_{m,j}\}$	1047575	1079.74	0.0938	1082.45	0.0936

表3 噪声信号特征量  $\{V_j\}, \{T_j\}$  统计分布函数的相关参数

测量对象	总样本量 $N$	测量数据		拟合数据	
		统计参量 $l_\mu$	统计参量 $\sigma_{\ln}$	统计参量 $l_\mu$	统计参量 $\sigma_{\ln}$
$\{V_j\}$	1047574	38.43	1.3854	27.17	2.2210
$\{T_j\}$	1047575	48.76	0.1942	48.87	0.1970

### 3.3 随机噪声特征量 $\{V_j\}, \{T_j\}$ 的统计分布

取随机噪声特征量  $\{V_j\}, \{T_j\}$  进行统计计算, 对应的计数分布曲线分别参见图7和图8, 拟合曲线的计算参数参见表3. 拟合曲线选用的归一化系数分别为  $\Omega_V = 0.438\sqrt{2\pi}, \Omega_T = 0.995\sqrt{2\pi}$ .  $\{V_j\}, \{T_j\}$  统计结果与模型曲线高度符合.

其中  $\{V_j\}$  的统计分布为单调结构, 模型计算参数满足  $\sigma_{\ln}^2 > \ln l_\mu$ . 对于这种离散度比较大的随机分布, 也有不少研究者用幂函数形式代替上述统计函数 [11-13].

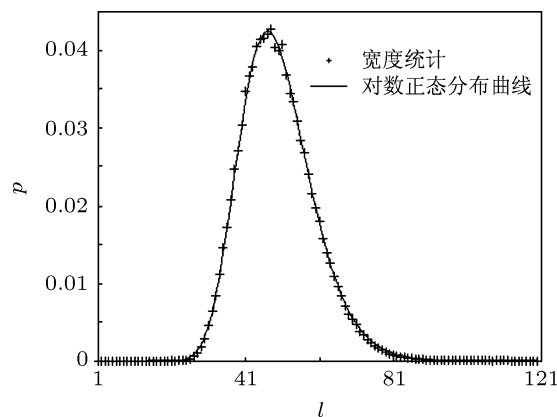


图8 极值间隔  $\{T_j\}$  统计曲线

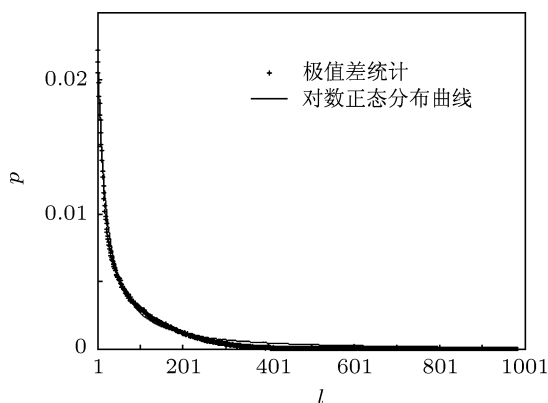


图7 极值幅度  $\{V_j\}$  统计曲线

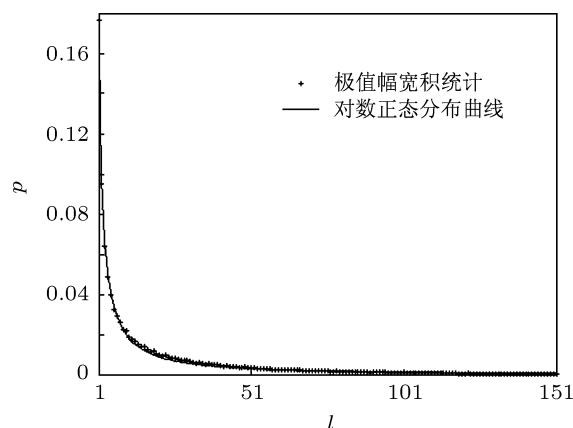


图9 信号复合特征量  $\{S_j \equiv V_j \cdot T_j\}$  统计分布

### 3.4 随机噪声复合特征量 $\{S_j\}$ 的统计分布

复合特征量  $\{S_j \equiv V_j \cdot T_j\}$  定义为两个独立特征量  $\{V_j\}, \{T_j\}$  的乘积.  $\{S_j\}$  的统计分布也具有单调结构, 参见图9. 拟合曲线计算参数参见表4, 对应的归一化系数为  $\Omega_S = 0.650\sqrt{2\pi}$ .

上述不同特征量的统计分布明显不满足中心对称性, 理论上用正态分布函数描述并不合适. 但是, 计算结果表明, 无论它们表现为单调形式或单峰形式, 都能够用同一数学模型描述. 我们认为, 这是噪声信号特征参数随机特性共同本质的反映, 也表明对数正态分布函数可能更具有普遍意义 [14].

表4 噪声信号复合特征量统计分布函数的相关参数

测量对象	总样本量 $N$	测量数据		拟合数据	
		统计参量 $l_\mu$	统计参量 $\sigma_{\ln}$	统计参量 $l_\mu$	统计参量 $\sigma_{\ln}$
$\{S_j\}$	1047574	8.07	1.4748	5.00	3.0000

#### 4 噪声信号观测特征量的值域与分布函数归一化系数

上述测试数据的统计计算结果表明, 噪声信号观测特征参数集合  $\{X_j\}$  均以很高的精准程度服从以自然数  $l$  为自变量的对数正态分布  $p_X(l)$ . 在 (3) 式代表的统计模型中,  $\{X_j\}$  任意特征量 ( $X_{\min}, X_{\max}, X_\mu, \sigma_{\ln}, \Omega_X$  等) 对应观测值的有效位数一定随观测分辨率  $\Delta X$  减小而增加, 而各自的高位数值具有良好的稳定性. 与统计特征参数  $X_\mu$  对应的  $l_\mu \equiv \frac{X_\mu}{\Delta X}$ , 虽然形式上  $\lim_{\Delta X \rightarrow 0} l_\mu \equiv \frac{X_\mu}{\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \Delta X} \rightarrow \infty$ , 与之对应的统计特征值  $X_\mu$  趋于常数. 且  $\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{X}{X_\mu} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{l \cdot \Delta X}{l_\mu \cdot \Delta X} = \frac{l}{l_\mu} \rightarrow \text{const}$ , 可见在统计模型中自变量  $\frac{l}{l_\mu}$  具有连续变量的性质 (提请注意  $l$  为自然数).

以下计算可证明, 统计函数  $p_X(l)$  的归一化系数  $\Omega_X$  与  $\{X_j\}$  值域  $[X_{\min}, X_{\max}]$  有关. 由(1)—(3)式可得连续性统计函数的归一化形式

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta X \rightarrow 0}^{X_{\max} - X_{\min} + \Delta X} \frac{dX}{\Omega_X \sigma_{\ln}} \\ & \times \frac{1}{X_l} e^{-\frac{(\ln \frac{X_l}{X_\mu})^2}{2\sigma_{\ln}^2}} \\ & = \int_{-\infty}^{\ln \left[ \left( \frac{X_{\max} - X_{\min}}{X_\mu} \right)^{\frac{1}{\sigma_{\ln}}} \right]} \\ & \times \frac{e^{-\frac{1}{2} \left\{ \ln \left[ \left( \frac{X_l}{X_\mu} \right)^{\frac{1}{\sigma_{\ln}}} \right] \right\}^2}}{\Omega_X} \\ & \times d \left\{ \ln \left[ \left( \frac{X_l}{X_\mu} \right)^{\frac{1}{\sigma_{\ln}}} \right] \right\} \\ & = \frac{1}{\Omega_X} \int_{-\infty}^{\ln \left[ \left( \frac{X_{\max} - X_{\min}}{X_\mu} \right)^{\frac{1}{\sigma_{\ln}}} \right]} \\ & \times e^{-\frac{1}{2} x^2} dx = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

令  $\ln \left[ \left( \frac{X_{\max} - X_{\min}}{X_\mu} \right)^{\frac{1}{\sigma_{\ln}}} \right] = \chi$ , 由正态分布积分表可查出下列积分的数值

$$\Phi(\chi) = \int_{-\infty}^{\chi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx, \quad (5)$$

则可得归一化系数  $\Omega_X$

$$\Omega_X = \sqrt{2\pi} \Phi(\chi). \quad (6)$$

若取简化模型  $\chi \rightarrow \infty$ , 近似有  $\Omega_X \rightarrow \sqrt{2\pi}$ . 可见在一般意义上, 数学统计模型定义域  $l \in (0, \infty)$  可作为随机观测特征量  $\{X_j\}$  值域  $[X_{\min}, X_{\max}]$  的同构映射, 数学统计函数  $p_X(l)$  可作为随机观测量统计分布  $p_X(x) \cdot dx$  同构映射, 但与特征量值域有关的归一化系数  $\Omega_X$  恰恰表明两个统计分布并不完全等价.

#### 5 噪声信号观测特征量分布函数相似性的物理本质

统计模型取  $\Delta X \rightarrow 0, L \rightarrow \infty$  条件时, 连续自变量分布  $p_X(x)$  与分布直方图  $p_X(l)$  趋于几何相似. 此时, 由 (3) 式连续函数形式可得

$$\begin{aligned} p_X(l) dl & = \frac{e^{-\frac{(\frac{1}{\sigma_{\ln}} \ln \frac{l}{l_\mu})^2}}{\Omega_X l \sigma_{\ln}}} dl \\ & = \frac{e^{-\frac{\left\{ \ln \left[ \left( l/l_\mu \right)^{\frac{1}{\sigma_{\ln}}} \right] \right\}^2}}{\Omega_X} d \left\{ \ln \left[ \left( l/l_\mu \right)^{\frac{1}{\sigma_{\ln}}} \right] \right\} \\ & = \frac{e^{-\frac{\left\{ \ln \left[ \left( X/X_\mu \right)^{\frac{1}{\sigma_{\ln}}} \right] \right\}^2}}{\Omega_X} d \left\{ \ln \left[ \left( X/X_\mu \right)^{\frac{1}{\sigma_{\ln}}} \right] \right\} \\ & \sim \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz, \end{aligned} \quad (7)$$

即取无量纲量  $\ln \left[ \left( X/X_\mu \right)^{\frac{1}{\sigma_{\ln}}} \right]$  为特征自变量时, 所有观测量随机集合  $\{X_j\}$  的分布函数与 Gauss 函数相似. 故我们认为, 以自然数  $l$  为自变量的对数正态分布函数  $p_X(l)$  是噪声集合  $\{f_i\}$  观测特征值共同随机性本质的反映.

根据微分中值定理, 令统计模型中两个特征量对应“概率微元”数值相等

$$\begin{aligned} p_X(\tilde{l}_X) \Delta l_X & = \frac{e^{-\frac{(\frac{1}{\sigma_{X,\ln}} \ln \frac{\tilde{l}_X}{l_{X,\mu}})^2}}{\Omega_X \tilde{l}_X \sigma_{X,\ln}} \Delta l_X \\ & = \frac{e^{-\frac{\left\{ \frac{1}{\sigma_{X,\ln}} \ln \left[ \left( \tilde{l}_X/l_{X,\mu} \right) \right] \right\}^2}}{\Omega_X} \\ & \times \Delta \left\{ \frac{1}{\sigma_{X,\ln}} \ln \left[ \left( \tilde{l}_X/l_{X,\mu} \right) \right] \right\} \\ & = p_Y(\tilde{l}_Y) \Delta l_Y \\ & = \frac{e^{-\frac{\left\{ \frac{1}{\sigma_{Y,\ln}} \ln \left[ \left( \tilde{l}_Y/l_{Y,\mu} \right) \right] \right\}^2}}{\Omega_Y} \\ & \times \Delta \left\{ \frac{1}{\sigma_{Y,\ln}} \ln \left[ \left( \tilde{l}_Y/l_{Y,\mu} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

可以证明, (8) 式成立对应于噪声特征值统计分布函数的形式自变量存在如下非线性变换关系

$$\tilde{l}_Y = \left( b \tilde{l}_X \right)^{\frac{\sigma_{Y,\ln}}{\sigma_{X,\ln}}}, \quad (9)$$

显然, (9) 式中两个具有独立意义的自变量  $\tilde{l}_X, \tilde{l}_Y$  不可能同时取自然数序列, 这是非线性变换的一种数字特征. 将 (9) 式代入 (8) 式, 得

$$\begin{aligned} p_Y(\tilde{l}_Y) \Delta l_Y &= \frac{\Delta l_Y}{\Omega_Y \tilde{l}_Y \sigma_{Y,\ln}} e^{-\frac{(\ln \tilde{l}_Y - \ln l_{Y,\mu})^2}{2\sigma_{Y,\ln}^2}} \\ &= \frac{\Delta l_X}{\Omega_Y \tilde{l}_X \sigma_{X,\ln}} e^{-\frac{\left\{ \ln \tilde{l}_X + \ln b - \frac{\sigma_{X,\ln}}{\sigma_{Y,\ln}} \ln l_{Y,\mu} \right\}^2}{2\sigma_{X,\ln}^2}} \\ &= \frac{\Omega_X}{\Omega_Y} \cdot \frac{\Delta l_X}{\Omega_X \tilde{l}_X \sigma_{X,\ln}} e^{-\frac{\left\{ \ln \tilde{l}_X - \ln l_{X,\mu} \right\}^2}{2\sigma_{X,\ln}^2}} \\ &= Z \cdot p_X(\tilde{l}_X) \Delta l_X, \end{aligned} \quad (10)$$

根据概率函数的归一化定义, 与 (9) 式变换关系对应概率值缩放系数为  $Z = \Omega_X / \Omega_Y$ . 由 (9) 式中指数相等条件可得特征量坐标变换系数

$$\begin{aligned} b &= e^{\frac{\sigma_{X,\ln}}{\sigma_{Y,\ln}} \ln l_{Y,\mu} - \ln l_{X,\mu}} \\ &= \frac{l_{Y,\mu}^{\left( \frac{\sigma_{X,\ln}}{\sigma_{Y,\ln}} \right)}}{l_{X,\mu}}. \end{aligned} \quad (11)$$

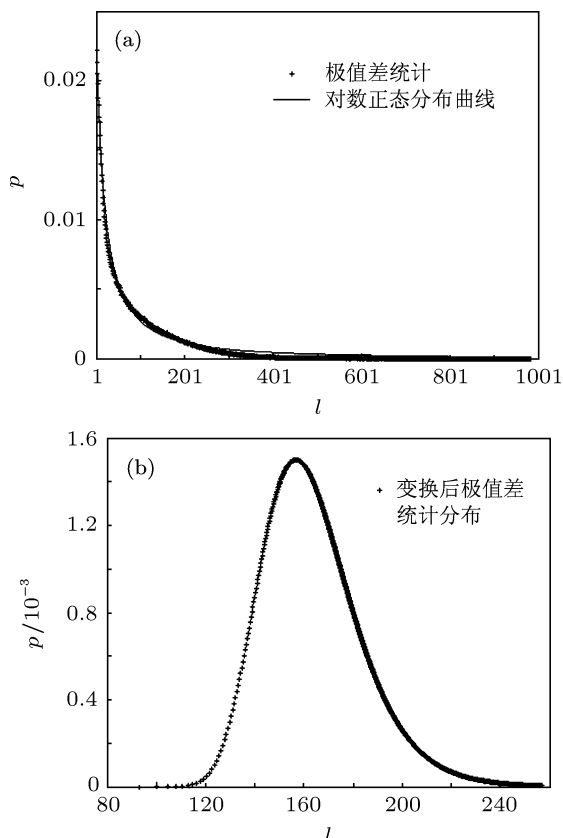


图 10 自变量变换前后统计函数曲线(图 7)对比 (a) 自变量变换前统计函数曲线,  $l_{X,\mu} = 38.43, \sigma_{X,\ln} = 1.3854$ ; (b) 自变量变换前统计函数曲线,  $l_{Y,\mu} = 0.45, \sigma_{Y,\ln} = 0.15$

上述讨论表明, 噪声信号特征量统计分布函数为一自相似群. 利用 (11) 式很容易将图 7 和图 9 中单调分布曲线变换成单峰形式, 即图 10(b) 和图 11(b), 相应的  $Z$  值分别为 0.00152 和 0.00385.

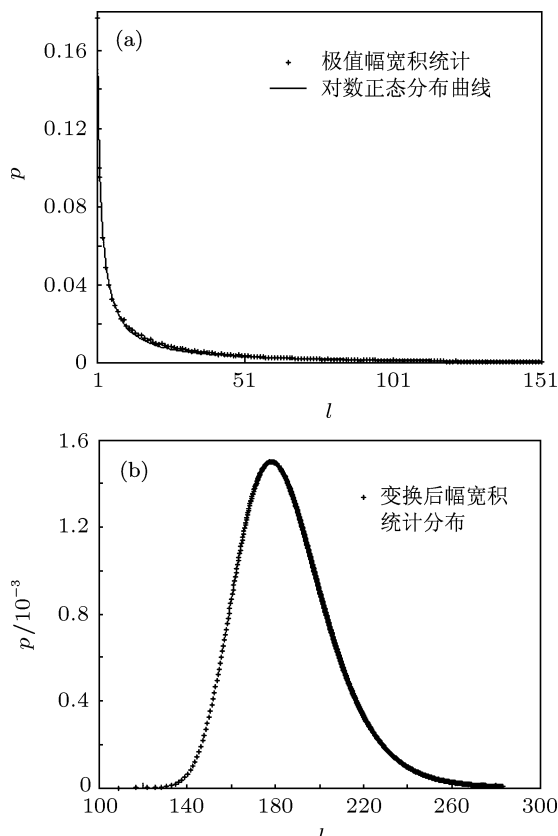


图 11 自变量变换前后统计函数曲线(图 9)对比 (a) 自变量变换前统计函数曲线,  $l_{X,\mu} = 8.07, \sigma_{X,\ln} = 1.4748$ ; (b) 自变量变换前统计函数曲线,  $l_{Y,\mu} = 0.45, \sigma_{Y,\ln} = 0.15$

若直接用对应的物理特征量描述 (9) 式变换形式时, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{Y}}{Y_\mu} &= \frac{\tilde{l}_Y \Delta Y}{l_{Y,\mu} \Delta Y} = \frac{\tilde{l}_Y}{l_{Y,\mu}} \\ &= \frac{1}{l_{Y,\mu}} \left( b \tilde{l}_X \right)^{\frac{\sigma_{Y,\ln}}{\sigma_{X,\ln}}} = \left( \frac{\tilde{l}_X \Delta X}{l_{X,\mu} \Delta X} \right)^{\frac{\sigma_{Y,\ln}}{\sigma_{X,\ln}}} \\ &= \left( \frac{\tilde{X}}{X_\mu} \right)^{\frac{\sigma_{Y,\ln}}{\sigma_{X,\ln}}}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\tilde{Y} = K \tilde{X}^{\frac{\sigma_{Y,\ln}}{\sigma_{X,\ln}}}. \quad (13)$$

(9) 式可理解为 (13) 式的一种投影 (映射), 参见图 12. 有限区间内的统计特征量  $\tilde{X} \in [X_m, X_M], \tilde{Y} \in [Y_m, Y_M]$  映射到  $l_Y l_X$  坐标系中的无限区域. 实际测量到的统计直方图序列, 映射成无限数学二维空间的连续函数. 图 12 中的曲线与 (9) 式对应, 该曲线代表噪声信号  $\{f_i\}$  特征量之间的一种统计约束关系, 可理解为由噪声信号  $\{f_i\}$  基本特性量统

计结果表现出来的测量系统统计分形特性的反映形式 [15].

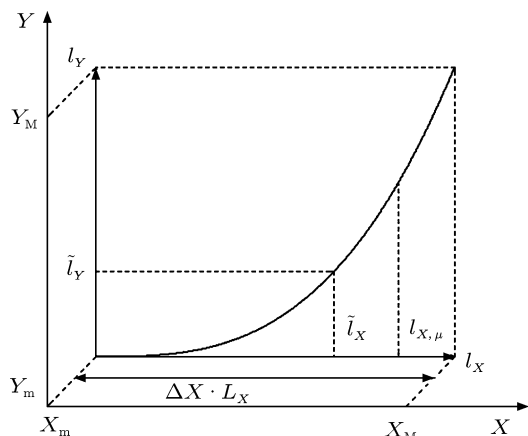


图 12 噪声信号  $\{f_i\}$  基本特性——统计分形特性示意图

## 6 结论

本文对光电传感器本底噪声信号大样本幅度时序记录值, 噪声信号极大值、极小值, 相邻极值幅度差、极值时间间隔等噪声信号特征量的统计分布进行详细研究, 发现噪声信号特征量均以很高的精度服从对数正态分布规律. 这表明, 噪声信号独立特征量的统计分布具有十分显著的相似性; 基于 (8) 式的统计分布等价概念, 能够给出独立特征量的定义域内基础上的不同特征量之间的幂函数变换关系  $\tilde{Y} \sim \tilde{X}^{\frac{\sigma_{Y,\ln}}{\sigma_{X,\ln}}}$ . 在任意独立特征量的定义域内, 取无量纲参数  $\ln \left[ (X/X_\mu)^{\frac{1}{\sigma_{\ln}}} \right]$  为本征自变量, 则噪声信号观测特征量的统计分布均可以转换成 Gauss 函数形式. 我们认为, 这种统一形式是噪声信号统计分形本质特征的重要表现.

- [1] Li Y H, Chen C X, Liu Y Z, Jiang C, Zou Z Y, Ou Y, Li Z A 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 4093
- [2] Chen C E, Du L, He L, Hu J, Huang X J, Wei T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6674 (in Chinese) [陈春霞, 杜磊, 何亮, 胡瑾, 黄小君, 卫涛 2007 物理学报 **56** 6674]
- [3] Yang S, Li Z S, Wang X L 2002 *Acoust. Soc. Am.* **112** 172
- [4] Golestani A, Jahed-Motlagh M R, Ahmadian K, Omidvarnia A H, Mozayani N 2009 *Am. Ins. Phys.* **19** 013137
- [5] Zhao J, Lei L, Pu X Q 2008 *Fractal Theory and Its Application in Signal Processing* (Beijing: Tsinghua University Press) p7 (in Chinese) [赵健, 雷蕾, 蒲小勤 2008 分形理论及其在信号处理中的应用 (北京: 清华大学出版社) 第 7 页]
- [6] Herrmann F J, Stark C 1999 *SEG Tech. Prog. Expand. Abstracts* **18** 1837
- [7] Costa M, Goldberger A L, Peng C K 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 068102
- [8] Torío P, Sánchez M G 2005 *IEEE Trans. Vehicular Technol.* **47** 559
- [9] Torío P, Sánchez M G 2007 *IEEE Trans. Vehicular Technol.* **56** 2844
- [10] Yang J, Bian B M, Peng G, Li Z H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 010508 (in Chinese) [杨娟, 卞保民, 彭刚, 李振华 2011 物理学报 **60** 010508]
- [11] Shu X M, Fang J, Shen S F, Liu Y J, Yuan H Y, Fan W D 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4466 (in Chinese) [疏学明, 方俊, 申世飞, 刘勇进, 袁宏永, 范维澄 2006 物理学报 **55** 4466]
- [12] Xu M, Alfano R R 2005 *Opt. Lett.* **30** 3051
- [13] Chamot S, Migacheva E, Seydoux O, Marquet P, Depeursinge C 2010 *Opt. Soc. Am.* **18** 23664
- [14] Yang J, Bian B M, Peng G, Yan Z G, Li Z H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7713 (in Chinese) [杨娟, 卞保民, 彭刚, 闫振纲, 李振华 2010 物理学报 **59** 7713]
- [15] Yang J, Bian B M, Yan Z G, Wang C Y, Li Z H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 100506 (in Chinese) [杨娟, 卞保民, 闫振纲, 王春勇, 李振华 2011 物理学报 **60** 100506]

# The similarity between the distribution functions of characteristic quantities for noise signal

Lin Ying-Lu Yan Zhen-Gang Yang Juan Wang Chun-Yong Bian Bao-Min<sup>†</sup>

(Department of Information Physics and Engineer, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

(Received 25 July 2011; revised manuscript received 14 October 2011)

## Abstract

For studying the statistical properties of characteristic quantities in noise signal, such as the amplitude of extreme, the amplitudes of the rising edge and the falling edge, the interval between extreme points and the product value of the quantities, the background noise signal sequence values of photoelectric sensor in suspended particle counter are recorded by using the high-speed data acquisition card. The results show that the statistical distribution of these characteristic quantities match well with the form of the log-normal distribution, with natural number  $l$  used as the independent variable. The statistical distributions of characteristic quantities show a high degree of similar characteristics. Based on this statistical similarity the transform relationship between the independent variables corresponding to different characteristic quantities by power function can be derived. The similarity between statistical distribution functions of characteristic quantities can be understood as a kind of performance of statistical fractal characteristics for noise signal collections.

**Keywords:** fractal, characteristic quantity in noise signal, statistical similarity, log-normal distribution

**PACS:** 05.45.Df, 02.50.-r

---

<sup>†</sup> E-mail: bianbaomin\_56@yahoo.com.cn