

# 噪声相互关联时间对 Logistic 系统 亚稳态稳定性的影响\*

杨林静<sup>1)†</sup> 戴祖诚<sup>2)</sup>

1) (云南中医学院药学院, 昆明 650500)

2) (昆明学院物理科学技术系, 昆明 650031)

(2011 年 11 月 21 日收到; 2011 年 12 月 28 日收到修改稿)

研究了噪声交叉关联时间对 Logistic 系统亚稳态稳定性的影响. 利用最陡下降法导出了系统亚稳态到稳态的平均第一通过时间的表达式. 数值计算结果表明: 内噪声、外噪声、内外噪声的相互关联时间削弱了亚稳态的稳定性, 而内外噪声的关联增加了亚稳态的稳定性.

**关键词:** Logistic 模型, 噪声, 相互关联时间, 平均首通时间

**PACS:** 05.45.-a, 02.50.-r

## 1 引言

Logistic 是一个简单的理想生态学模型. 该模型原来是用于描述一个封闭区域中昆虫的繁殖生长以及由于食物限制、疾病和争斗而引起昆虫数目减少的这两个因素之间的竞争所导致的生态行为系统. 它是一种广义的生长模型, 在生物学、遗传学、化学反应、人口动力学等学科领域中有广泛应用, 可以用来描述细胞生长、单种群生长和经济增长的典型模型. 近几年来, 受噪声扰动的 Logistic 模型描述细胞的演化过程受到了广泛的关注和研究<sup>[1-7]</sup>. 文献 [1] 将交叉白关联噪声引入了 Logistic 模型, 研究了系统的稳态统计性质, 文献 [2] 研究了交叉色关联的情况下系统的稳态和瞬态统计性质, 文献 [3, 4], 分别研究了加性周期信号和乘性周期信号诱导该系统的随机共振现象, 文献 [5] 分析了该系统的瞬态性质的色噪声效应, 文献 [6] 计算了该系统的态关联函数和弛豫时间, 文献 [7] 在考虑内外噪声对系统作用的同时考虑细胞演化过程中细胞衰减存在时间延迟, 研究了时间延

迟对该系统跃迁率的影响.

在生态系统中, 当种群所处的外部环境变化, 或者种群个体之间竞争时, 都要考虑噪声的作用. 以前对 Logistic 模型的研究, 考虑了关联噪声, 在大多数情况下仅仅考虑了噪声之间的白关联, 即加性噪声与乘性噪声的关联时间为零的情况. 从物理的角度来说, 我们知道一个真实噪声的关联时间, 无论多么小, 都是严格不为零的. 而一个具有零自关联时间的噪声, 它的功率谱的分布 (由自关联函数的傅里叶变换决定) 是和频率无关的, 这样在整个频谱上的功率耗散是无穷大的. 换言之, 白噪声实际并不存在. 白噪声只是一个理想化的模型, 仅当其自关联的时标远远短于其作用的随机过程的弛豫时标时才成立. 从另一方面来看, 把扰动系统的噪声处理为白噪声, 是研究随机物理过程的第一步, 随后放宽条件考虑有限的自关联时间是比较合理的<sup>[8]</sup>.

本文研究 Logistic 系统在加性和乘性噪声作用下, 加性和乘性噪声相互关联时间不为零的情况下亚稳态的稳定性. 首先导出系统近似福克 - 普朗克

\* 云南省教育厅科学基金 (批准号: 2010Y503) 资助的课题.

† E-mail: kmljyang@126.com

方程, 然后利用最陡下降法得到了系统平均第一通过时间的解析式, 进行数值计算并分析讨论交叉关联噪声对系统亚稳态稳定性的影响.

## 2 噪声系交叉关联时间对 Logistic 系统亚稳态稳定性的影响

### 2.1 Logistic 系统的福克 - 普朗克方程

考虑了环境涨落因素 (如温度、放射治疗、化疗、药物等) 的影响以及系统内部的随机因素 (如细胞的迁移、遗传的不稳定性等), 可以得到 Logistic 模型的朗之万方程<sup>[1,2]</sup>

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 + x\varphi(t) - \Gamma(t), \quad (1)$$

其中,  $\varphi(t)$  和  $\Gamma(t)$  分别为乘性和加性高斯白噪声, 具有下列统计性质:

$$\langle \varphi(t) \rangle = \langle \Gamma(t) \rangle = 0, \quad (2)$$

$$\langle \varphi(t) \varphi(t') \rangle = 2D\delta(t - t'), \quad (3)$$

$$\langle \Gamma(t) \Gamma(t') \rangle = 2\alpha\delta(t - t'), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t) \Gamma(t') \rangle &= \langle \Gamma(t) \varphi(t') \rangle \\ &= \frac{\lambda\sqrt{\alpha D}}{\tau} e^{-|t-t'|}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\alpha$  和  $D$  分别是加性和乘性噪声的强度,  $\lambda$  表示  $\varphi(t)$  和  $\Gamma(t)$  的相互关联度, 并且  $0 \leq \lambda < 1$ ,  $\tau$  为  $\varphi(t)$  和  $\Gamma(t)$  的相互关联时间. 方程 (1) 中关于态变量  $x$  的确定论势函数为

$$V(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{3}x^3, \quad (6)$$

它有一个稳态  $x_1 = a/b$  和一个亚稳态  $x_2 = 0$ .

应用 Novikov 定理<sup>[9,10]</sup>, Fox 近似<sup>[11]</sup> 和 Hänggi<sup>[12]</sup> 得到方程 (1) 的近似福克 - 普朗克方程<sup>[2]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} A(x) P(x,t) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x) P(x,t), \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$A(x) = ax - bx^2 + Dx - \frac{\lambda\sqrt{\alpha D}}{1 + a\tau}, \quad (8)$$

$$B(x) = Dx^2 - \frac{2\lambda\sqrt{\alpha D}}{1 + a\tau}x + \alpha. \quad (9)$$

这里必须指出福克 - 普朗克方程 (7) 在条件  $1 + a\tau > 0$  时成立, 所以对噪声相互关联时间  $\tau$  没有受到限制. 由福克 - 普朗克方程 (7) 可得系统定态概率分布函数

$$P(x)_{st} = NB(x)^{\beta_1 - \frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{U(x)}{D}\right], \quad (0 \leq \lambda < 1) \quad (10)$$

其中,  $N$  是归一化常数,

$$\beta_1 = \frac{a}{2D} - \frac{\lambda b}{(1 + a\tau)D} \sqrt{\frac{\alpha}{D}}, \quad (11)$$

广义势函数

$$\begin{aligned} U(x) &= bx - \frac{\beta_2(1 + a\tau)}{\sqrt{D\alpha[(1 + a\tau)^2 - \lambda^2]}} \\ &\quad \times \arctan\left\{\frac{(1 + a\tau)Dx - \lambda\sqrt{D\alpha}}{\sqrt{D\alpha[(1 + a\tau)^2 - \lambda^2]}}\right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\beta_2 = b\alpha - \left(aD + \frac{2\lambda}{1 + a\tau}\sqrt{\alpha D}\right) \frac{\lambda}{1 + a\tau} \sqrt{\frac{\alpha}{D}}. \quad (13)$$

### 2.2 亚稳态跃迁到稳态的平均第一通过时间

系统的亚稳态是不稳定的, 受到系统外部和内部的扰动极其容易跃迁到稳态, 其寿命可以用亚稳态跃迁到稳态的平均第一通过时间 (MFPT) 来描述. 从亚稳态  $x_2$  跃迁到稳态  $x_1$  的 MFPT 表达式为<sup>[13]</sup>

$$T(x_2 \rightarrow x_1) = \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{B(x)P(x)_{st}} \int_{-\infty}^x P(y)_{st} dy. \quad (14)$$

一般情况下较难得到 (14) 式的解析解, 常用最陡下降法求其近似解. 文献 [14—16] 分别比较了抗肿瘤模型、双稳模型和不对称双稳模型 MFPT 的最陡下降法近似结果和 (14) 式的数值积分结果, 证实了最陡下降法和数值积分结果符合得很好, 说明最陡下降法近似结果是可靠的. 在  $\alpha, D$  都取较小值的情况下, 应用最陡下降法可得

$$T(0 \rightarrow a/b) \approx 2\pi [V''(a/b)V''(0)]^{\frac{1}{2}} \times \exp\{[U(a/b) - U(0)]/D\}$$

$$= 2\pi a \exp \left\{ -\frac{(1+a\tau)\beta_2}{D\sqrt{D\alpha[(1+a\tau)^2-\lambda^2]}} \times \left\{ \arctan \left\{ \frac{(1+a\tau)a-\lambda\sqrt{\alpha D}}{b\sqrt{D\alpha[(1+a\tau)^2-\lambda^2]}} \right\} + \arctan \frac{\lambda\sqrt{\alpha D}}{\sqrt{D\alpha[(1+a\tau)^2-\lambda^2]}} \right\} + \frac{a}{D} \right\}. \quad (15)$$

根据 (15) 式可分析噪声交叉关联时间对系统亚稳态稳定性的影响. 数值计算 (15) 式作为内外噪声强度  $\alpha$ ,  $D$  和噪声相互关联强度  $\lambda$  的函数, 噪声相互关联时间  $\tau$  作为参数的结果分别表示在图 1—3 中.

从图 2 中可看出平均首通时间  $T$  也是随内噪声强度  $\alpha$  增大而减小, 同时随噪声交叉关联时间  $\tau$  的增大也明显减小, 说明内噪声和噪声交叉关联时间都促进系统从亚稳态跃迁到稳态, 两者都削弱了系统亚稳态的稳定性.

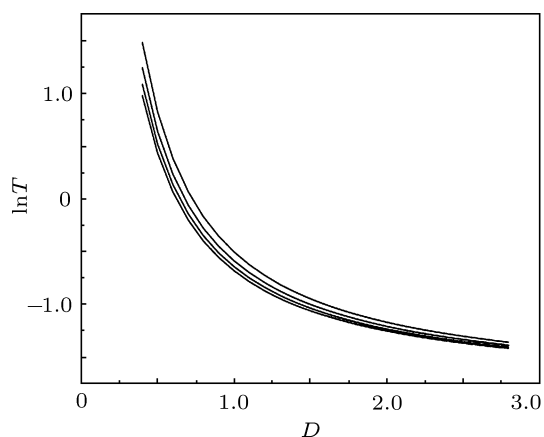


图 1  $\ln T$  作为  $D$  的函数曲线 (参数取值为  $a = 1, b = 0.1, \lambda = 0.2, \alpha = 0.2$ , 曲线从上到下分别表示  $\tau$  分别取值 0, 0.2, 0.4 和 0.6)

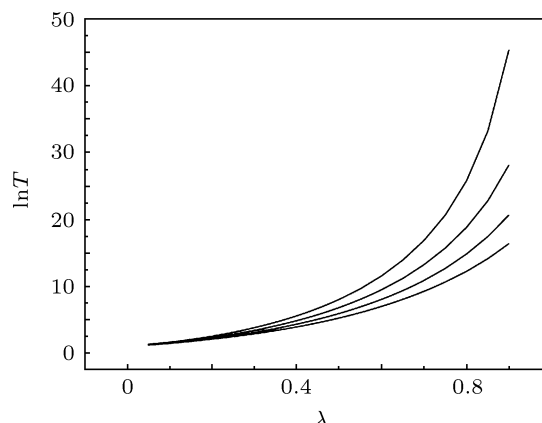


图 3  $\ln T$  作为  $\lambda$  的函数曲线 (参数取值为  $a = 1, b = 0.1, \alpha = 0.2, D = 0.3$ , 曲线从上到下表示  $\tau$  分别取值 0, 0.1, 0.2 和 0.3)

图 1 显示  $T$  随外噪声强度  $D$  增大而减少, 同样  $T$  随噪声交叉关联时间  $\tau$  的增大也减小, 表明外噪声和噪声相互关联时间促使系统从亚稳态跃迁到稳态. 外噪声和交叉关联时间  $\tau$  削弱了系统亚稳态的稳定性.

从图 3 可以看出平均首通时间  $T$  随内外噪声之间关联强度  $\lambda$  增大而增大, 但随噪声交叉关联时间  $\tau$  的增加而减小. 表明内外噪声关联阻碍了系统从亚稳态到稳态的跃迁, 而噪声交叉关联时间促进系统从亚稳态到稳态的跃迁. 内外噪声关联增强了系统亚稳态的稳定性, 而噪声交叉关联时间削弱了亚稳态的稳定性.

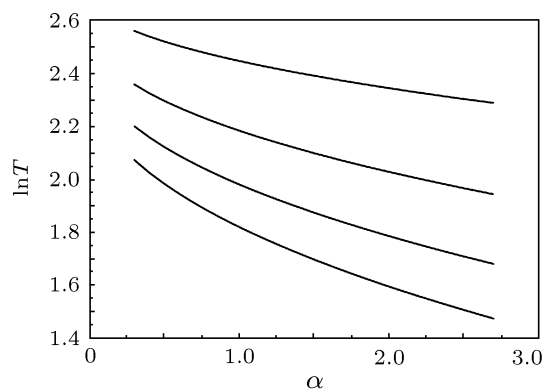


图 2  $\ln T$  作为  $\alpha$  的函数曲线 (参数取值为  $a = 1, b = 0.1, \lambda = 0.2, D = 0.3$ , 曲线从上到下表示  $\tau$  分别取值 0, 0.1, 0.2 和 0.3)

### 3 结论

归纳以上分析讨论, 可以得到以下结论: 在 Logistic 系统中亚稳态跃迁到稳态的平均首通时间受到外噪声、内噪声、内外噪声之间的关联和它们的关联时间的影响; 内、外噪声的增强均削弱了亚稳态的稳定性, 内外噪声的关联增强了亚稳态的稳定性, 而内外噪声的关联时间削弱了亚稳态的稳定性.

- [1] Ai B Q, Wang X J, Liu G T, Liu L G 2003 *Phys. Rev. E* **67** 022903  
 [2] Mei D C, Xie C W, Zhang L 2004 *Eur. Phys. J. B* **41** 107  
 [3] Cai J C, Wang C J, Mei D C 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 1162  
 [4] Bai C Y, Du L C, Mei D C 2009 *Cent. Eur. J. Phys.* **7** 601  
 [5] Wang C J, Wei Q, Zhang B B, Mei D C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1375 (in Chinese) [王参军, 魏群, 郑宝兵, 梅冬成 2008 物理学报 **57** 1375]  
 [6] Wang C J, Wei Q, Mei D C 2008 *Phys. Lett. A* **372** 2176  
 [7] Yang L J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050502 (in Chinese) [杨林静 2011 物理学报 **60** 050502]  
 [8] Madureira A J R, Hanggi P, Wio H S 1996 *Phys. Lett. A* **217** 248  
 [9] Novikov E A 1964 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **47** 1919  
 [10] Novikov E A 1965 *Sov. Phys. JETP* **20** 1290  
 [11] Fox R F 1986 *Phys. Rev. A* **34** 4525  
 [12] Hanggi P, Mroczkowski T T, Moss F, McClintock P V E 1985 *Phys. Rev. A* **32** 95  
 [13] Gardiner C W 1983 *Handbook of Stochastic Methods, Springer Series in Synergetics* Vol. 13 (Berlin: Springer-Verlag)  
 [14] Du L C, Mei D C 2008 *J. Stat. Mechanics* **11** 11020  
 [15] Mei D C, Du L C, Wang C J 2009 *J. Stat. Phys.* **137** 625  
 [16] Mei D C, Jia Z L, Wang C J 2011 *Phys. Scr.* **84** 045012

## The effects of correlated time between noises on stability of unstable state in Logistic system\*

Yang Lin-Jing<sup>1)†</sup> Dai Zu-Cheng<sup>2)</sup>

1) (College of Chinese Medicine, Yunnan University of Traditional Chinese Medicine, Kunming 650500, China)

2) (Department of Physics Science and Technology, Kunming University, Kunming 650031, China)

(Received 21 November 2011; revised manuscript received 28 December 2011)

### Abstract

The effects of correlated time between noises on the stability of unstable state in the Logistic system are investigated. Using the steepest-descent approximation, the analytic expression for the mean first-passage time from unstable state to stable state is derived. The numerically calculated results indicate that the additive noise, the multiplicative noise and the correlated time between the additive and the multiplicative noises weaken the stability of unstable state, but the correlation between the additive and the multiplicative noises enhances the stability of unstable state.

**Keywords:** logistic model, noise, correlated time between noises, mean first-passage time

**PACS:** 05.45.-a, 02.50.-r

\* Project supported by the Science Foundation of the Education Bureau of Yunnan Province, China (Grant No. 2010Y503).

† E-mail: kmljyang@126.com