

# 二维正方排列圆柱状亥姆赫兹共振腔阵列 局域共振声带隙的研究\*

刘敏 侯志林<sup>†</sup> 傅秀军

(华南理工大学物理系, 广州 510640)

(2011年12月29日收到; 2012年3月5日收到修改稿)

通过对二维正方排列圆柱状亥姆赫兹共振腔阵列声性质的研究, 指出局域共振型声子晶体中存在两类耦合作用, 即共振单元与基体的弱耦合作用及共振单元间的耦合作用. 其中前一种耦合作用可以通过改变共振单元的品质因子而改变, 逐渐减小这种耦合作用可以实现从局域共振到布拉格共振的连续转变; 后一种耦合是通过共振单元周围的近场耦合实现的, 通过减小共振单元的间距可以增大其耦合强度, 因而增大带隙宽度, 但带隙中波的衰减深度却是随这种耦合强度的增大而减小的.

**关键词:** 局域共振, 声带隙, 亥姆赫兹共振腔

**PACS:** 43.20.+g, 42.50.Gy, 46.40.Ff

## 1 引言

近二十几年来, 弹性波在声子晶体中的传播特性研究受到了人们广泛的关注<sup>[1-9]</sup>. 这种材料的一个重要特性是存在声频禁带, 当声波入射到声子晶体表面时处于带隙频率范围内的声波将被完全反射. 目前的研究认为, 声子晶体产生带隙主要有两种机制, 即布拉格散射机制及局域共振机制. 在布拉格型声子晶体中, 各元胞之间的相互作用或者说晶体点阵的周期性起着主导作用. 当声波的波长与晶格常数相近时, 在其中传播的声波将受到强烈散射, 在频率-波矢色散关系上表现为带隙. 基于这种机制的声子晶体带隙宽度除与组元材料有关外, 还和晶格结构及元胞的结构有很大关系, 在给定组元材料下, 最大带隙可通过调节晶格结构及元胞结构而得到<sup>[1]</sup>, 其带隙频率位置一般较高. 在局域共振型声子晶体中, 单个散射单元的共振特性以及单个散射体的填充率将起着主导作用<sup>[7,8]</sup>. 最早的局域共振型声子晶体是由 Liu 等<sup>[9]</sup>提出来的用较软壳层包裹硬核构成共振单元, 并将其放置于较硬基体

中而构成的结构, 在这种结构中, 有别于布拉格型声子晶体, 其中的局部共振单元将起主要作用. 当基体中传播波的频率与共振单元的共振频率相近时, 即便其波长远大于共振单元间距, 共振单元也能发生共振, 因而产生强烈反射, 形成带隙. 文献[7]研究表明, 局部共振声子晶体的带隙可以通过共振单元的结构及单元在基体中填充率的改变而得到调节, 而与共振单元所构成的点阵无关. 类似于固体共振单元结构, 在流体声中亥姆赫兹共振腔结构也具有类似的性质, 因而由这种结构单元或者它们的变形所构成的系统也得到大量的研究<sup>[11-17]</sup>. 近年来, 随着声学超材料概念的提出, 这种共振单元结构受到了更为广泛的关注. 由于局域共振带隙处于长波长范围, 致使波在其中的行为可以用等效弹性参数来描述. 研究发现, 在带隙频率范围内, 固体共振单元具有负的等效动态质量密度<sup>[10]</sup>, 而由亥姆赫兹共振腔所构成的结构却具有负的动态弹性模量<sup>[11-14]</sup>. 较之于早前声子晶体的研究关注于带隙宽度及位置, 在声学超材料的研究中, 人们更关注于带隙中声衰减性质的研究. 因此, 对带隙形成

\* 中央高校基本科研业务费专项基金(批准号: 2011ZZ0016)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: phzlh@scut.edu.cn

机理的理解将有助于改善超材料结构以提高其性能. 本文将对由亥姆赫兹共振腔构成的二维局域共振型声子晶体的声性质进行研究, 讨论这种结构中存在的两类不同耦合作用对局域共振带隙及其中的声波传播性质的影响.

## 2 计算模型及结果讨论

通过分析可以发现, 局域共振型声子晶体中存在两类耦合: 一类是共振单元与基体中的弱耦合作用, 这种弱的耦合作用使得共振体中可以存在孤立的共振能级, 由于这种弱的耦合作用, “共振单元 - 基体” 结构中将出现类 Fano 干涉作用而形成能隙<sup>[15]</sup>, 这类弱耦合作用是出现共振带隙的前提; 其二是共振体间的耦合作用, 波在界面上的连续性要求使得共振体中的局域模式并不能完全局域在共振体中, 而是在共振体周围形成按指数衰减的倏逝场, 因而相邻共振体间存在耦合作用, 通过这种耦合共振体将作为整体参与运动, 类似于固体中的元激发; 这种耦合越强, 形成的能带越宽, 由此它们在与基体传播波相互作用后形成的带隙将越宽. 然而, 由于共振单元结构上的原因, 这两种耦合机制往往难于区分, 因而它们对带隙的形成及波性质的影响难以区分.

本文将研究二维正方阵列圆柱形四开缝亥姆赫兹共振腔结构的声性质. 以此为例, 我们将阐明这两类机制对局域共振结构声性质的不同影响. 为了区分上述两种耦合机制的作用, 我们将通过改变共振腔开缝的大小及共振体的间距, 以达到分别调节共振体的共振强度、共振体与基体的耦合及共振体间耦合大小的目的.

图 1(a) 为本文研究模型的元胞截面图, 其中亥姆赫兹共振腔外壳可由铝或其他较坚硬的材料构成, 基体为空气. 由于空气的声阻抗较固体小得多, 因此在计算中可将腔壳视为刚体. 共振腔的内径为  $r$ , 计算中统一取为  $0.25\text{ m}$ ; 壳层厚为  $t$ , 计算中统一取为  $t = 0.05r$ ; 开缝宽度为  $\delta$ , 晶格常数为  $a$ . 图 1(b) 给出这一结构的第一布里渊区即简约布里渊区, 计算只沿简约布里渊区的边界进行.

我们采用有限元方法进行计算. 在计算带结构时, 考虑到研究对象在  $x, y$  方向的周期性, 声波方程在实空间的离散化只需在单个元胞区域进行, 在元胞的边界上应用布洛赫条件. 在计算透射系数时,

$y$  方向仍设为无限周期结构, 而取  $x$  方向为有限层厚度, 在距入射侧  $5a$  处设置线声源, 在透射侧表面上设置线接收器, 透射系数为透射能流与入射能流的比值. 在距入射侧及透射侧表面  $5a$  处均设置吸收边条件, 以模拟入射及透射两侧半无限大介质.

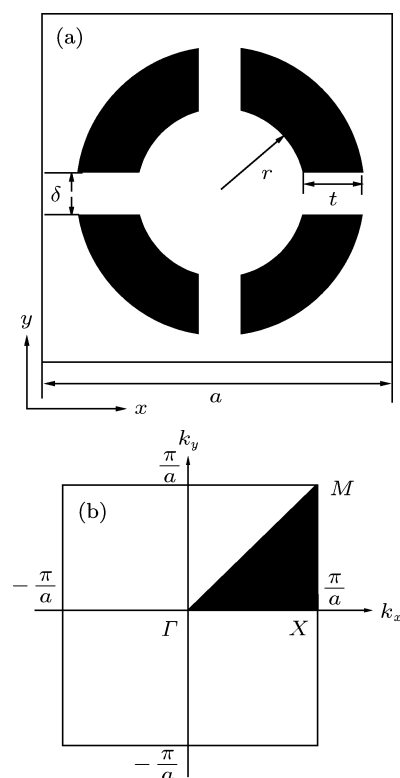


图 1 (a) 二维开缝亥姆赫兹共振腔型声子晶体元胞的截面图; (b) 相应的第一布里渊区

在本文的结构中, 前述的两种耦合机制具体表现如下. 在给定的晶格常数下, 一方面我们可以通过改变缝宽来改变共振单元与基体的耦合. 由于缝宽的改变意味着共振腔往基体中辐射能量能力的改变, 也就是共振体的品质因子 (共振  $Q$  值) 的改变, 因此大的缝宽同时也意味着弱的局部共振, 因而原则上可以由此研究这一结构的声性质受共振单元共振  $Q$  值的影响, 例如, 研究在共振  $Q$  值越来越小时, 局域共振机制如何逐渐转化为布拉格机制. 但另一方面, 缝宽的改变在改变共振  $Q$  值的同时, 也会改变共振体间由近场作用导致的耦合强度. 这种耦合可以使共振体形成集体振动, 从而掩盖单个共振单元对结构声特性的影响. 因此, 为了区分这两种耦合, 在以下的讨论中, 我们采用两种方案: 在分析共振体与背景耦合对带结构的影响时, 我们采用较大的晶格常数, 以减小共振体间的耦合; 而在分析共振体间的耦合时, 采用固定的缝宽, 通过改

变晶格常数来分析这种耦合对带结构的影响.

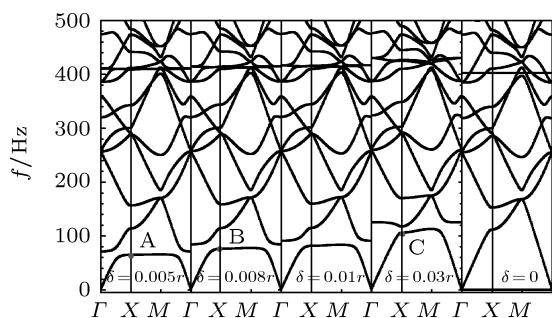


图2 晶格常数为  $5r$ , 共振腔厚度为  $0.05r$  下, 不同缝宽情况下的能带结构 图中分别给出了缝宽  $\delta$  为  $0.005r, 0.008r, 0.01r, 0.03r, 0$  时的能带结构

首先, 为了分析共振体的共振特性对带隙的影响, 我们取晶格常数  $a = 5r$ , 以减小共振体间的近场耦合. 而让开缝宽度  $\delta$  从  $0.005r$  到  $0.03r$  变化,

以改变共振腔与基体间的耦合. 计算所得能带结构如图 2 所示. 作为比较, 图中还给出了  $\delta = 0$  即共振腔不开缝的情形, 以示出无耦合时共振腔的共振频率, 此时最低共振频率为 0, 第二共振频率在 400 Hz 左右.

从图 2 中可以看到, 在小缝宽情况下, 局域共振使得在频率略低于 100 Hz 处打开了一个带隙, 随着缝的增宽, 带隙打开位置逐渐向布里渊区边界移动, 当缝宽  $\delta = 0.01r$  时, 已经移到了布里渊区边界, 这说明随着共振单元共振  $Q$  值的减弱, 带隙机制由局域共振机制逐渐转化为布拉格机制. 图 3(a)—(c) 给出了对应图 2 中所标注的 A, B 及 C 点的场分布情况, 从中可以看出不同带隙机制下的场分布差别: 在局域共振机制下, 场分布完全局域在腔的内部, 说明 A, B 模式与基体无耦合; 而在布拉格机制下, 基体中存在较大的场值.

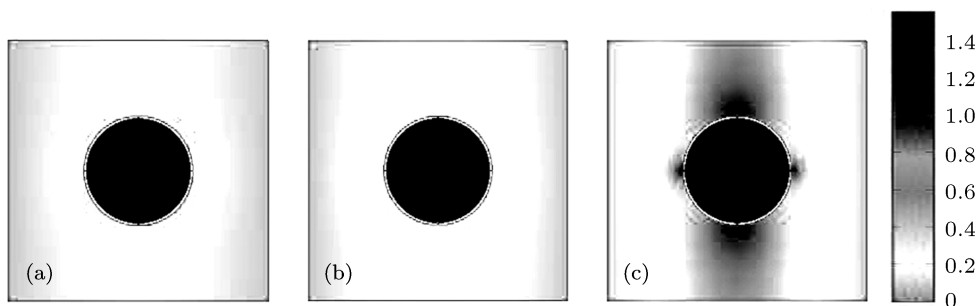


图3 (a) 图2中 A 点对应的场分布; (b) 图2中 B 点对应的场分布; (c) 图2中 C 点对应的场分布

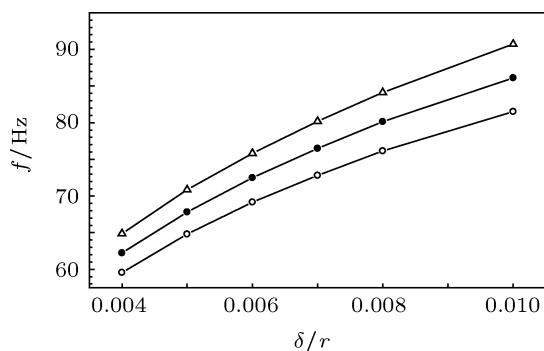


图4 局域共振带隙随缝宽的变化规律 三角形为带隙上边界, 空心圆圈为带隙下边界, 实心圆圈为带隙中心频率

值得注意的是, 在布拉格机制下 (即  $\delta > 0.01r$  情况下), 由于开缝的存在, 散射体的散射行为可以由等效参数描述, 因而其低频等效行为同不开缝散射体的行为不同 [16]. 图 4 为局域共振带隙宽度随缝宽 ( $\delta < 0.01r$ ) 的变化规律. 可以看到, 随着缝的增宽, 共振带隙的上、下边界频率同时升高, 但带

隙的宽度只有很小的增加, 说明共振体的共振特性调整不是调节带隙宽度的有效途径.

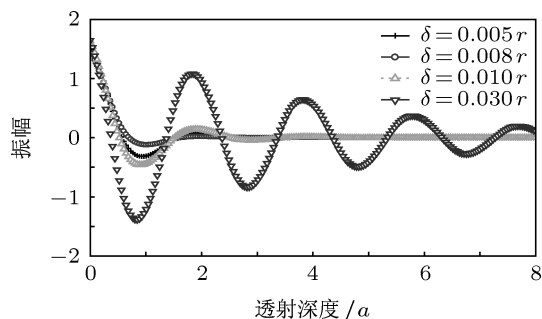


图5 不同缝宽下波沿传播方向元胞边界上声压的分布

为进一步分析这种转变, 我们还计算了不同缝宽时带隙中心频率的波沿  $\Gamma X$  方向正入射到厚度为 8 个周期的声子晶体表面的透射深度 (depth, 简记为  $D$ ). 图 5 给出了缝宽分别取为  $\delta = 0.005r, 0.008r, 0.01r$  及  $0.03r$  时, 沿传播方向的声压变化

情况, 测量线取为元胞边界, 即相邻两行共振单元的中间线. 从图中可以看到, 随缝的增宽, 波的透射深度逐渐增大, 说明局域共振型带隙的衰减常数比布拉格型带隙的衰减常数要大得多.

其次, 为了分析共振体之间的耦合对带结构的影响, 我们将缝宽固定为  $\delta = 0.005r$ , 而让晶格常数从  $2.5r$  到  $8r$  变化, 其能带结构分别示于图 6(a)—(d) 中. 其共振带隙随晶格常数的变化关系如图 7 所示.

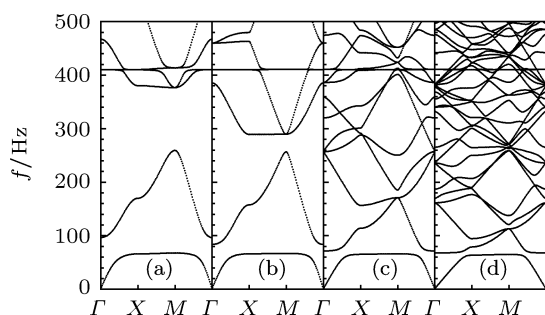


图 6 缝宽为  $0.005r$  时不同晶格常数下的能带结构 图中分别给出了晶格常数为 (a)  $2.5r$ ; (b)  $3r$ ; (c)  $5r$ ; (d)  $8r$  的能带结构

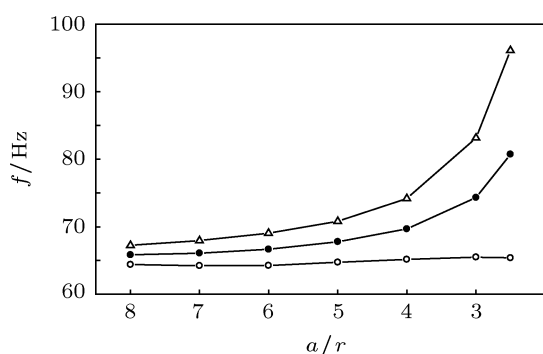


图 7 共振带隙随晶格常数的变化情况

从图 6 及图 7 可以看到, 随着晶格常数的减小,

即共振单元间距的减小, 共振带隙急剧增宽, 并且这一增宽是由带隙上边缘的上升而引起的, 下边缘基本保持不变. 这一现象可以从两方面来理解. 首先, 由于共振单元  $Q$  值的有限, 使得共振单元对某一频率范围的外场产生响应, 因而形成具有一定宽度的带隙, 当外场频率相对共振单元频响曲线的共振频率稍有偏离时, 会在共振单元周围激发倏逝场, 在单元间距小于倏逝场的衰减长度时, 各单元间会产生较强的耦合, 形成集体振动, 单个共振“能级”(实际上会是有限宽度的带) 发生避裂, 形成能带, 因而带隙随单元间距的减小而增宽. 其次, 由于共振单元对外场的共振响应曲线并不是关于其共振频率对称的<sup>[18]</sup>, 对于单个共振体而言, 当外加策动力的频率由低到高扫过共振子的共振频率时, 在较共振频率为低的一侧非常陡峭, 而在较共振频率为高的一侧则较为平缓, 这一现象在具有耗散的共振体系中更为明显, 因而在改变各单元间距时, 由于近场耦合作用所导致的带隙增宽效应其上边带会急剧上升, 而下边带则基本保持不变.

为进一步研究带隙中的波行为, 对应于图 6(a)—(d), 我们采用前述方法计算了沿  $\Gamma X$  方向厚度为  $8a$  系统的能流透射系数, 结果分别示如图 8(a)—(d) 所示, 图中的最低透射谷范围对应于共振带隙. 从图中可以看到两个现象: 其一, 虽然随晶格常数的减小, 共振带隙会越来越宽, 但系统对处于带隙中的入射波的衰减却明显减小; 其二, 随晶格常数的减小, 共振带隙的透射衰减区域关于其最低点越来越不对称. 由于带隙上边缘的上升是由近场耦合所引起的, 因此这两个现象都说明由近场耦合所导致的集体振动所形成的带隙对入射波的衰减较小, 因而使得处于带隙中的波将透射得更深.

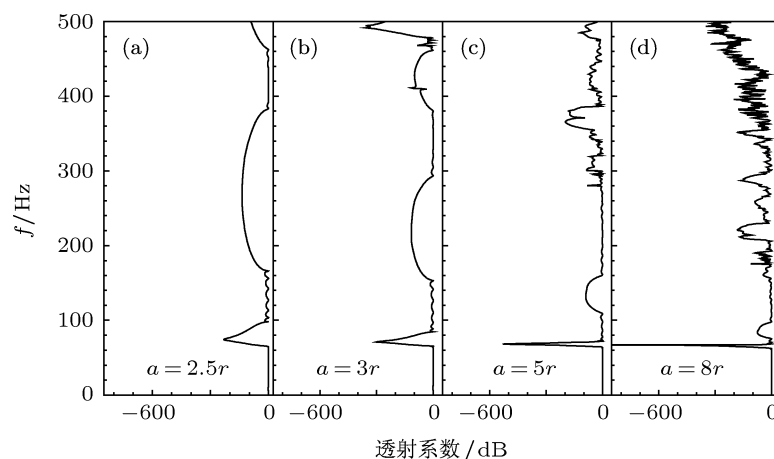


图 8 不同晶格常数下声波的透射系数 (a)—(d) 对应图 6(a)—(d) 晶格常数分别为  $2.5r$ ,  $3r$ ,  $5r$ ,  $8r$  时的透射系数

### 3 结论

本文通过对圆柱形开缝亥姆赫兹共振腔按二维正方点阵排列构成的声子晶体的研究,分析了局部共振带隙的机理. 在这类声子晶体中带隙的形成主要基于两类耦合作用,即基体与共振单元间的耦合,以及各共振单元之间的耦合. 研究中,我们分别采用在大晶格常数下改变开缝的大小,以及固定开

缝大小而改变晶格常数这两种不同的方法,来区分这两种耦合作用对带结构的影响. 研究表明:前一种耦合是共振带隙形成的前提,当由小到大改变开缝宽度时,局部共振机制逐渐转变为布拉格机制;而后一种耦合则可以有效地调节带隙的宽度. 但由于后一种耦合是通过共振单元周围的近场交叠来实现的,因此带隙对波的衰减作用将随共振体的间距变小而减小.

- 
- [1] Kuang W M, Hou Z L, Liu Y Y 2004 *Phys. Lett. A* **332** 481
- [2] Gao G Y, Ma S L, Jin F, Jin D F, Lu T J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 393 (in Chinese) [高国钦, 马守林, 金峰, 金东范, 卢天健 2010 物理学报 **59** 393]
- [3] Hao G J, Fu X J, Hou Z L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8484 (in Chinese) [郝国郡, 付秀军, 侯志林 2009 物理学报 **58** 8484]
- [4] Sigalas M M, Economou E N 1994 *J. Appl. Phys.* **75** 2845
- [5] Kafesaki M, Sigalas M M, Economou E N 1995 *Solid State Commun.* **96** 285
- [6] Oudich M, Li Y, Assouar B M, Hou Z L 2010 *New J. Phys.* **12** 083049
- [7] Liu Z Y, Chan C T, Sheng P 2002 *Phys. Rev. B* **65** 165116
- [8] Wang G, Wen X S, Wen J H, Shao L H, Liu Y Z 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 154302
- [9] Liu Z Y, Zhang X X, Mao Y W, Zhu Y Y, Yang Z Y, Chan C T, Sheng P 2000 *Science* **289** 1734
- [10] Mei J, Liu Z Y, Wen W J, Sheng P 2008 *Phys. Rev. B* **76** 134205
- [11] Fang N, Xi D J, Xu J Y, Ambati M, Srituravanich W, Sun C, Zhang X 2006 *Nature Materials* **5** 452
- [12] Cheng Y, Xu J Y, Lin X J 2008 *Phys. Rev. B* **77** 045143
- [13] Cheng Y, Xu J Y, Lin X J 2008 *Appl. Phys. Lett.* **92** 051913
- [14] Fok L, Zhang X 2011 *Phys. Rev. B* **83** 214304
- [15] Goffaux C, Sanchez-Dehesa J, Levy Y A, Lambin P, Khelif A, Vasseur J O, Rouhani-Djafari B 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 225502
- [16] Hu X H, Chan C T, Zi J 2005 *Phys. Rev. E* **71** 055601
- [17] Hou Z L, Liu J T, Kuang W M, Liu Y Y, Wu S Z 2007 *Phys. Rev. E* **75** 026608
- [18] Morse P M 1974 *Vibration and Sound* (1st) p31 (in Chinese) [南京大学翻译组译 1974 振动与声 (第一版)(北京: 科学出版社) 第 31 页]

# Local resonant acoustic band gaps in two-dimensional square-arranged Helmholtz resonators array\*

Liu Min Hou Zhi-Lin<sup>†</sup> Fu Xiu-Jun

(Department of Physics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

(Received 29 December 2011; revised manuscript received 5 March 2012)

## Abstract

In this paper, by taking the acoustic property of a two-dimensional squarely arranged Helmholtz resonator array for example, we point out that there exist two kinds of couplings in the local resonance phononic crystal, which are the coupling between the resonator and background and the coupling among the resonators, respectively. The first coupling effect can be changed by changing the quality factor of the resonator. A local-resonant type of band gap can be converted into a Bragg-scattering type continually when this kind of coupling becomes larger and larger. The second one, which is based on the overlapping of the near field around the resonators, can be enhanced by reducing the distance between the nearest resonators. As a result, a wider band gap, but a smaller penetration depth of the wave, can be obtained.

**Keywords:** local resonance, acoustic band gap, Helmholtz resonator

**PACS:** 43.20.+g, 42.50.Gy, 46.40.Ff

---

\* Project supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. 2011ZZ0016).

<sup>†</sup> E-mail: phzlh@scut.edu.cn