物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 61, No. 11 (2012) 110202

一类 Painleve 方程的 Lagrange 函数族

丁光涛†

(安徽师范大学物理与电子信息学院, 芜湖 241000)

(2011 年 8 月 6 日收到; 2011 年 10 月 23 日收到修改稿)

利用第一积分构造 Lagrange 函数的理论和方法, 导出一类 Painleve 方程的两个 Lagrange 函数族, 以及一些 Lagrange 函数和 Hamilton 函数.

关键词: Painleve 方程, 逆问题, Lagrange 函数族, 第一积分

PACS: 02.30.Hq, 02.30.Zz, 04.20.Fy, 45.20.Jj

1 引 言

变分法逆问题研究微分方程系统能否从变分原理中导出, 即能否将方程写成 Lagrange 方程形式, 其关键是构造 Lagrange 函数, 这是数学力学和物理学领域中的热门问题之一 [1−3]. Painleve 方程是一个世纪以前从纯粹数学出发开始研究的, 而今却发现它与多种数学物理学问题相关, 因此对这类方程的研究也成为热点, 其中包括构造 Lagrange 函数问题 [4−6]. 文献 [5] 中利用 Jacobi 方法构造了不同类型 Painleve 方程的 Lagrange 函数, 文献 [6] 中指出一种变质量运动方程属于 Painleve 方程, 又构造了一系列不同的 Lagrange 函数. 最近, 我们提出了微分方程系统的第一积分与其 Lagrange 函数之间一种新的关系, 利用这种关系可以构造 Lagrange 函数, 甚至可以导出 Lagrange 函数族 [7,8]. 本文利用这种新方法, 构造出文献 [5] 中提出的一类 Painleve 方程的两个 Lagrange 函数族, 以及几个 Lagrange 函数和 Hamilton 函数.

2 利用第一积分构造 Lagrange 函数

研究二阶常微分方程

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \tag{1}$$

方程的一个第一积分为

$$I = I(t, x, \dot{x}) = \text{const.} \tag{2}$$

满足条件

$$\partial^2 I/\partial \dot{x}^2 \neq 0, \tag{3}$$

由 I 可以构造方程 (1) 的 Lagrange 函数 [7]

$$L = A(t,x)I(t,x,\dot{x}) + B(t,x)\dot{x} + B_0(t,x), \tag{4}$$

式中因子 $A(t,x)$, $B(t,x)$, $B_0(t,x)$ 是下列方程的解:

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}\Big)\frac{\partial I}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial A}{\partial x}I - 2A\frac{\partial I}{\partial x}\\&- A\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial B_0}{\partial x} = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

如果方程 (1) 的某个第一积分 I 满足下列条件:

$$2\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \phi(t)\frac{\partial I}{\partial \dot{x}}, \tag{6}$$

则方程 (1) 存在一个与 I 相关的 Lagrange 函数族 [8]

$$\bar{L} = A(t)F(I(t,x,\dot{x})) \quad (\partial^2 F/\partial \dot{x}^2 \neq 0), \tag{7}$$

其中 F 是 I 的任意连续可微函数, 因子

$$A = \exp\Big(\int^t \phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big). \tag{8}$$

条件 (6) 的特殊情况是

$$2\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0, \tag{9}$$

此时 A 为常数.

† E-mail: dgt695@sina.com

© 2012 中国物理学会 Chinese Physical Society http://wulixb.iphy.ac.cn

3 一个变质量运动方程的 Lagrange 化

一卷链条松弛地静止在光滑平面上, 其一端受到恒力 F 作用而陆续进入运动, 以 x 表示链条运动长度, m 表示单位长度链条的质量, 则其运动微分方程写成 [6]

$$\ddot{x}+\frac{\dot{x}^2}{x}-\frac{F}{mx}=0. \tag{10}$$

该方程属于下列类型的 Painleve 方程:

$$\ddot{x}+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\dot{x}^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\dot{x}+B(t,x)=0. \tag{11}$$

文献 [5] 指出, 很多 Painleve 方程都是 (11) 式形式的微分方程. 值得注意的是, 在变分法逆问题中, (11) 式形式的微分方程同样是研究的重点, 可以利用多种不同的方法得到这种方程的 Lagrange 函数 [7−12]. 这里只讨论方程 (11) 的特殊情况 —— 方程 (10), 在得到它的第一积分后, 构造 Lagrange 函数和函数族.

将方程 (10) 改写成

$$\ddot{x}=f(t,x,\dot{x})=-\frac{\dot{x}^2}{x}+\frac{b}{x}, \tag{12}$$

式中 $b=F/m$, 求得它的三个第一积分如下:

$$\begin{aligned} I_1 &= x\dot{x}-bt=\text{const},\\ I_2 &= tx\dot{x}-\frac{x^2}{2}-\frac{bt^2}{2}=\text{const}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$I_3=x^2\dot{x}^2-bx^2=\text{const}. \tag{14}$$

将 I_1 和 f 代入 (9) 式, 说明存在与 I_1 相关的 Lagrange 函数族, 而且因子 A 为常数, 设 $A=1$, 导出一个 Lagrange 函数族为

$$\bar{L}=F(I_1)=F(x\dot{x}-bt), \tag{15}$$

式中 F 是 I_1 的任意连续可微函数, I_1 不满足条件 (3), 而 F 应满足下列条件

$$\partial^2F/\partial\dot{x}^2\neq 0. \tag{16}$$

同样地, 将 I_2 和 f 代入 (6) 式, 说明存在与 I_2 相关的 Lagrange 函数族, 并有

$$\varphi(t)=-2/t,\qquad A=1/t^2, \tag{17}$$

导出方程 (1) 的另一个 Lagrange 函数族为

$$\bar{L}'=\frac{1}{t^2}F(I_2)=\frac{1}{t^2}F\Big(tx\dot{x}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}bt^2\Big), \tag{18}$$

式中函数 F 同样应当满足条件 (16).

利用 I_1 和 I_2 原则上就可以导出方程 (1) 的其他第一积分, 例如

$$I_3=I_1^2+2bI_2. \tag{19}$$

I_3 不满足条件 (6) 和 (9) 式, 代入方程 (5), 可以得到 A, B 和 B_0, 例如

$$A=1/2,\quad B=0,\quad B_0=bx^2, \tag{20}$$

即导出一个 Lagrange 函数

$$L=\frac{1}{2}x^2\dot{x}^2+\frac{1}{2}bx^2. \tag{21}$$

由 Lagrange 函数族 $\bar{L}, \bar{L}'$, 取不同的函数 F, 可以导出一系列 Lagrange 函数, 例如

$$L_1=I_1^{\alpha}=(x\dot{x}-bt)^{\alpha}\quad(\alpha\neq 0,1), \tag{22}$$

$$L_2=\ln I_1=\ln(x\dot{x}-bt), \tag{23}$$

$$L_3=\exp I_1=\exp(x\dot{x}-bt), \tag{24}$$

$$L_4=\frac{1}{t^2}I_2^{-1}=\frac{1}{t^2}\Big(tx\dot{x}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}bt^2\Big)^{-1}, \tag{25}$$

等等. 应当指出, 两个函数族中都有任意多个函数, 它们之间是等效的, 但是, 并没有包括方程 (1) 所有的 Lagrange 函数, 例如, (21) 式中的 L 就不在这两个函数族中.

得到 Lagrange 函数后, 利用 Legendre 变换可导出一系列不同的 Hamilton 函数, 例如

$$H=\frac{p^2}{2x^2}-\frac{bx^2}{2}\quad(p=x^2\dot{x}), \tag{26}$$

$$H_3=\frac{p_3}{x}(\ln p_3-\ln x+bt-1)\quad(p_3=x\exp(x\dot{x}-bt)), \tag{27}$$

等等, 多种多样的 Lagrange 函数为系统的 Hamilton 化和量子化提供了多种选择.

4 结 论

利用第一积分构造 Lagrange 函数的方法, 得到了一种 Painleve 方程的两个 Lagrange 函数族, 并指出族外仍然有其他的 Lagrange 函数, 这是新的结果. 文献 [13] 指出, 微分方程分析力学化正越来越受到重视, 因此, 本文得到的结果对相关问题的进一步研究有一定的理论价值, 特别是这种构造 Lagrange 函数的方法, 有可能也有必要推广到对其他 Painleve 类型方程的研究中去.

现今很多学科领域都利用微分方程模型研究系统运动和发展, 已经指出, (11) 式形式的方程包含了很多类型的 Painleve 方程, 这些方程代表了很多重要的系统, 其中包括复杂的耗散系统和类耗散系统, 这些系统涉及力学物理学和其他学科领域. 因此, 在相关的研究中应当重视借鉴和应用数学领域有关 Painleve 方程的研究成果.

[1] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics* I (New York: Spinger-Verlag)
[2] Lopuszanski J 1999 *the Inverse Variational Problem in Classical Mechanics* (Singapore: World Scientific)
[3] Sarlet W 1982 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **15** 1503
[4] Li Y Z, He Y Z 2000 *Advances in Mathmatics* **29** 481 (in Chinese) [李叶舟, 何育赞 2000 数学进展 **29** 481]
[5] Choudhury A G, Guha P, Khanra B 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **360** 651
[6] Yasar E, Reis M 2010 *J. Phys.* A: *Math. Theor.* **43** 295202
[7] Ding G T 2011 *Journal of Dynamics and Control* **9** 102 (in Chinese) [丁光涛 2011 动力学与控制学报 **9** 102]
[8] Ding G T 2011 *Journal of Dynamics and Control* **9** 219 (in Chinese) [丁光涛 2011 动力学与控制学报 **9** 219]
[9] Musielak Z E 2008 *J. Phys.* A: *Math. Theor.* **41** 055205
[10] Cieśliński J L, Nikiciuk T 2010 *J. Phys.* A: *Math. Theor.* **43** 175205
[11] Ding G T 1996 *J. Anhui Normal Univ.* **19** 382 (in Chinese) [丁光涛 1996 安徽师范大学学报 **19** 382]
[12] Ding G T 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 044503 (in Chinese) [丁光涛 2011 物理学报 **60** 044503]
[13] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗绍凯, 张永发 2008 约束系统动力学研究进展 (北京: 科学出版社)]

The families of Lagrangians of a Painleve equation

Ding Guang-Tao†

(*The College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu* 241000, *China*)

(Received 6 August 2011; revised manuscript received 23 October 2011)

Abstract

By use of the method to construct the Lagrangian from the first integral, two families of Lagrangians and some Lagrangians and Hamiltonians are obtained for a class of Painleve equations.

Keywords: Painleve equation, inverse problem, family of Lagrangians, first integral
PACS: 02.30.Hq, 02.30.Zz, 04.20.Fy, 45.20.Jj

† E-mail: dgt695@sina.com