Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的无穷序列类孤子精确解*

套格图桑[1)2)†] 白玉梅[2)]

1) (内蒙古民族大学数学学院, 通辽 028043)

2) (内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022)

(2011 年 9 月 8 日收到; 2011 年 9 月 27 日收到修改稿)

为了构造非线性发展方程的无穷序列类孤子精确解, 发掘第一种椭圆辅助方程的构造性和机械化性特点, 获得了该方程的一些新类型解和相应的 Bäcklund 变换. 在此基础上利用符号计算系统 Mathematica 构造了 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的无穷序列类孤子精确解, 包括无穷序列光滑类孤子解、无穷序列类尖峰孤立子解和无穷序列类紧孤立子解.

关键词: 第一种椭圆辅助方程, Bäcklund 变换, Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程, 无穷序列精确解

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr

1 引 言

辅助方程法在构造非线性发展方程精确解领域发挥了非常重要的作用, 已获得了许多新成果. 通过变换把非线性发展方程转化为非线性常微分方程是应用辅助方程法的一个主要步骤. 文献[1—16]利用变换 $u(x,t)=u(\xi), \xi=\lambda x+\omega t$ (其中 λ, ω 是待定常数), 构造了非线性发展方程的新精确解. 文献 [17—27] 推广应用辅助方程法, 通过变换 $u(x,t)=u(\xi), \xi=p(y)x+q(y,t)$ (其中 $p(y)$, $q(y,t)$ 是待定函数), 构造了 (2+1) 维色散长波方程等非线性发展方程的类孤子新精确解.

2009 年前, 辅助方程法主要构造了非线性发展方程的有限多个光滑孤立子解, 未能获得无穷序列精确解. 我们分析研究了辅助方程法有关的大量文献, 总结了辅助方程法的构造性和机械化性特点 [28]. 这两大特点的发掘对于构造非线性发展方程的新精确解具有重要意义. 本文为了构造非线性发展方程的无穷序列光滑类孤子解、无穷序列类尖峰孤立子解和无穷序列类紧孤立子解, 研究了第一种椭圆辅助方程的构造性和机械化性两大特点. 根据 Jacobi 椭圆函数的周期性, 获得了该方程的一些新解和相应的 Bäcklund 变换. 在此基础上, 利用符号计算系统 Mathematica 构造了 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程 [29]

$$u_t-u_{xxx}+\alpha(uv)_x=0, \tag{1}$$

$$u_x+\beta v_y=0 \tag{2}$$

的无穷序列类孤子新精确解, 其中 α, β 是常数. 这些解包括了 Jacobi 椭圆函数、双曲函数、三角函数和有理函数单独构成的单函数型无穷序列光滑类孤子解、无穷序列类尖峰孤立子解和无穷序列类紧孤立子解.

2 第一种椭圆辅助方程的新解与相应的 Bäcklund 变换

本文获得了第一种椭圆辅助方程 [4−7] 的 Jacobi 椭圆函数、双曲函数、三角函数和有

* 国家自然科学基金 (批准号：10862003)、内蒙古自治区高等学校科学研究基金 (批准号：NJZY12031) 和内蒙古自治区自然科学基金 (批准号: 2010MS0111) 资助的课题.

† E-mail: tgts@imnu.edu.cn

理函数形式的新解及相应的 Bäcklund 变换. 所得结论对于发现非线性发展方程的多种新精确解具有非常重要的作用.

2.1 第一种椭圆辅助方程的解

2.1.1 第一种椭圆辅助方程的已知解

第一种椭圆辅助方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}z(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = a + bz^2(\xi) + cz^4(\xi) \tag{3}$$

存在如下三种基本解:

$$z(\xi) = \mathrm{sn}(\xi, k)$$
$$(a = 1, b = -1 - k^2, c = k^2), \tag{4}$$
$$z(\xi) = \mathrm{cn}(\xi, k)$$
$$(a = 1 - k^2, b = -1 + 2k^2, c = -k^2), \tag{5}$$
$$z(\xi) = \mathrm{dn}(\xi, k)$$
$$(a = -1 + k^2, b = 2 - k^2, c = -1). \tag{6}$$

其余解都可以用这三种解来表示.

2.1.2 第一种椭圆辅助方程的新解

根据 Jacobi 椭圆函数的定义, 得出

$$\begin{aligned} \mathrm{sn}\Big(\xi + 4K(k)\Big) &= \mathrm{sn}(\xi, k), \\ \mathrm{cn}\Big(\xi + 4K(k)\Big) &= \mathrm{cn}(\xi, k), \\ \mathrm{dn}\Big(\xi + 2K(k)\Big) &= \mathrm{dn}(\xi, k), \end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \mathrm{d}x \\ & \quad 0 \leqslant k \leqslant 1. \end{aligned}$$

本文为了构造非线性发展方程的无穷序列紧孤立子解, 根据解 (4)—(6) 式和 Jacobi 椭圆函数的周期性, 获得了第一种椭圆辅助方程新类型解.

当 $a = 1$, $b = -1 - k^2$, $c = k^2$ 时, 第一种椭圆辅助方程 (3) 的解为

$$z(\xi) = \begin{cases} \mathrm{sn}(\xi, k) & (4N+1)K(k) \leqslant \xi \leqslant (4N+5)K(k), \\ 1 & \text{其他}; \end{cases} \tag{8}$$

$$z(\xi) = \begin{cases} \mathrm{sn}(\xi, k) & (4N-1)K(k) \leqslant \xi \leqslant (4N+3)K(k), \\ -1 & \text{其他}; \end{cases} \tag{9}$$

$$z(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \leqslant (4N+1)K(k), \\ \mathrm{sn}(\xi, k) & (4N+1)K(k) \leqslant \xi \leqslant (4N+3)K(k), \\ -1 & (4N+3)K(k) \leqslant \xi; \end{cases} \tag{10}$$

$$z(\xi) = \begin{cases} -1 & \xi \leqslant (4N+3)K(k), \\ \mathrm{sn}(\xi, k) & (4N+3)K(k) \leqslant \xi \leqslant (4N+5)K(k), \\ 1 & (4N+5)K(k) \leqslant \xi. \end{cases} \tag{11}$$

当 $a = 1 - k^2, b = 2k^2 - 1, c = -k^2$ 时, 第一种椭圆辅助方程 (3) 的解为

$$z(\xi) = \begin{cases} \mathrm{cn}(\xi, k) & 4NK(k) \leqslant \xi \leqslant (4N+4)K(k), \\ 1 & \text{其他}; \end{cases} \tag{12}$$

$$z(\xi) = \begin{cases} \mathrm{cn}(\xi, k) & (4N+2)K(k) \leqslant \xi \leqslant (4N+6)K(k), \\ -1 & \text{其他}; \end{cases} \tag{13}$$

$$z(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \leqslant 4NK(k), \\ \mathrm{cn}(\xi, k) & 4NK(k) \leqslant \xi \leqslant (4N+2)K(k), \\ -1 & \xi \geqslant (4N+2)K(k); \end{cases} \tag{14}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}-1 & \xi\leqslant(4N+2)K(k),\\ \mathrm{cn}(\xi,k) & (4N+2)K(k)\leqslant\xi\leqslant(4N+4)K(k),\\ 1 & \xi\geqslant(4N+4)K(k).\end{cases}\tag{15}$$

当 $a=-1+k^2, b=2-k^2, c=-1$ 时, 第一种椭圆辅助方程 (3) 的解为

$$z(\xi)=\begin{cases}\mathrm{dn}(\xi,k) & 2NK(k)\leqslant\xi\leqslant(2N+2)K(k),\\ 1 & \text{其他};\end{cases}\tag{16}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\mathrm{dn}(\xi,k) & (2N+1)K(k)\leqslant\xi\leqslant(2N+3)K(k),\\ \sqrt{1-k^2} & \text{其他};\end{cases}\tag{17}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\sqrt{1-k^2} & \xi\leqslant(2N+1)K(k),\\ \mathrm{dn}(\xi,k) & (2N+1)K(k)\leqslant\xi\leqslant(2N+2)K(k),\\ 1 & \xi\geqslant(2N+2)K(k);\end{cases}\tag{18}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}1 & \xi\leqslant(2N+2)K(k),\\ \mathrm{dn}(\xi,k) & (2N+2)K(k)\leqslant\xi\leqslant(2N+3)K(k),\\ \sqrt{1-k^2} & \xi\geqslant(2N+3)K(k).\end{cases}\tag{19}$$

以上得到的解 (8)—(19) 中 N 为整数.

当 $a=0$ 时, 第一种椭圆辅助方程 (3) 的解为

$$z(\xi)=\begin{cases}\left[\dfrac{-b}{c}\sec^2[(-b)^{\frac12}\xi]\right]^{\frac12} & b<0, c>0,\\ 0 & b<0, c>0;\end{cases}\tag{20}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\left[\dfrac{-b}{c}\sec^2[(-b)^{\frac12}\xi]\right]^{\frac12} & b<0, c>0,\\ \pm\sqrt{\dfrac{-b}{c}} & b<0, c>0;\end{cases}\tag{21}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\left[\dfrac{-b}{c}\csc^2[(-b)^{\frac12}\xi]\right]^{\frac12} & b<0, c>0,\\ 0, & b<0, c>0;\end{cases}\tag{22}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\left[\dfrac{-b}{c}\csc^2[(-b)^{\frac12}\xi]\right]^{\frac12} & b<0, c>0,\\ \pm\sqrt{\dfrac{-b}{c}} & b<0, c>0;\end{cases}\tag{23}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\left[\dfrac{-b}{c}\mathrm{sech}^2(\sqrt{b}\xi)\right]^{\frac12} & b>0, c<0,\\ 0, & b>0, c<0;\end{cases}\tag{24}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\left[\dfrac{-b}{c}\mathrm{sech}^2(\sqrt{b}\xi)\right]^{\frac12} & b>0, c<0,\\ \pm\sqrt{\dfrac{-b}{c}} & b>0, c<0;\end{cases}\tag{25}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\left[\dfrac{b}{c}\mathrm{csch}^2(\sqrt{b}\xi)\right]^{\frac12} & b>0, c>0,\\ 0, & b>0, c>0;\end{cases}\tag{26}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\left[\dfrac{b}{c}\mathrm{csch}^2(\sqrt{b}\xi)\right]^{\frac12} & b>0, c>0,\\ \pm\sqrt{\dfrac{-b}{c}} & b>0, c>0.\end{cases}\tag{27}$$

当 $b^2-4ac=0$ 时, 第一种椭圆辅助方程 (3) 的解为

$$z(\xi)=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2c}}\tan\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}}|\xi|\right)\quad b>0, c>0,\tag{28}$$

$$z(\xi)=\frac{\sqrt{-b}\Big[1+\exp(\sqrt{-2b}|\xi|)\Big]}{\sqrt{2c}\Big[1-\exp(\sqrt{-2b}|\xi|)\Big]}\quad b<0,\quad c>0.\tag{29}$$

当 $a=b=0$ 时, 第一种椭圆辅助方程 (3) 的解为

$$z(\xi)=\frac{1}{\sqrt{c}|\xi|}\quad c>0.\tag{30}$$

当 $a=c=0$ 时, 第一种椭圆辅助方程 (3) 的解为

$$z(\xi)=\exp[\sqrt{b}|\xi|]\quad b>0.\tag{31}$$

2.2 第一种椭圆辅助方程的 Bäcklund变换

第一种椭圆辅助方程 (3) 通过变换

$$z^2(\xi)=\rho(\xi).\tag{32}$$

转化为第二种椭圆辅助方程

$$[\rho'(\xi)]^2=4a\rho(\xi)+4b\rho^2(\xi)+4c\rho^3(\xi).\tag{33}$$

根据 (32), (33) 式和文献 [11] 中给出的第二种椭圆辅助方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}z(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = az(\xi) + bz^2(\xi) + cz^3(\xi) \tag{34}$$

的 Bäcklund 变换, 可以获得第一种椭圆辅助方程 (3) 的 Bäcklund 变换 (这里只列出两种 Bäcklund 变换).

若 $z_{n-1}(\xi)$ 是第一种椭圆辅助方程 (3) 的解, 则下列 $z_n(\xi)$ 也是方程 (3) 的解:

$$z_n^2(\xi) = \mp\frac{2a + (b \pm \sqrt{b^2-4ac})z_{n-1}^2(\xi)}{\pm b + \sqrt{b^2-4ac} \pm 2cz_{n-1}^2(\xi)}$$

$$n = 1, 2, \cdots, \tag{35}$$

$$z_n^2(\xi) = \frac{a\left[-\sqrt{3A_2} \mp 9\left(z'_{n-1}(\xi)\right)^2\right]}{\sqrt{3A_2}(b-\sqrt{b^2-3ac}) + 2\sqrt{3A_2}cz_{n-1}^2(\xi) \pm 3(b+\sqrt{b^2-3ac})\left(z'_{n-1}(\xi)\right)^2} \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{36}$$

其中

$$A_2 = \sqrt{\frac{1}{16c^2}[128b^3 - 432abc + 2(16b^2-48ac)^{\frac{3}{2}}]}.$$

若 $z_{n-1}(\xi)$ 是第一种椭圆辅助方程 (3) 的解, 则下列 $z_n(\xi)$ 也是方程 (3) 的解:

$$z_n(\xi) = \frac{\mathrm{i}b[S + Lz_{n-1}^2(\xi)]}{b\sqrt{SL} \mp \mathrm{i}b\sqrt{\frac{(-2Sc+bL)^2}{b^2}z_{n-1}(\xi) + 2c\sqrt{SL}z_{n-1}^2(\xi)}} \quad SL < 0,\ b^2 - 4ac = 0, n = 1, 2, \cdots, \tag{37}$$

$$z_n(\xi) = \frac{\mathrm{i}b[S + Lz_{n-1}^2(\xi)]}{b\sqrt{SL} \mp \mathrm{i}b\sqrt{\frac{(-2Sc+bL)^2}{b^2}z_{n-1}(\xi) - 2c\sqrt{SL}z_{n-1}^2(\xi)}} \quad SL < 0,\ b^2 - 4ac = 0,\ n = 1, 2, \cdots, \tag{38}$$

若 $z_{n-1}(\xi)$ 是第一种椭圆辅助方程 (3) 的解, 则下列 $z_n(\xi)$ 也是方程 (3) 的解:

$$z_n^2(\xi) = \frac{-bz_{n-1}^2(\xi)}{b + cz_{n-1}^2(\xi)} \quad a = 0,\ n = 1, 2, \cdots, \tag{39}$$

$$z_n^2(\xi) = \frac{-2\sqrt{3A_1}cz_{n-1}^2(\xi) \pm 6b[z'_{n-1}(\xi)]^2}{c\left[\sqrt{3A_1} \mp 9[z'_{n-1}(\xi)]^2\right]} \quad a = 0,\ b > 0,\ A_1 = 4\sqrt{\frac{b^3}{c^2}},\ n = 1, 2, \cdots, \tag{40}$$

$$z_n^2(\xi) = \frac{-8b\sqrt{3A_1} - 2\sqrt{3A_1}cz_{n-1}^2(\xi)}{4c\left[\sqrt{3A_1} \mp 9[z'_{n-1}(\xi)]^2\right]} \quad a = 0,\ b < 0,\ A_1 = 4\sqrt{\frac{b^3}{c^2}}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{41}$$

若 $z_{n-1}(\xi)$ 是第一种椭圆辅助方程 (3) 的解, 则下列 $z_n(\xi)$ 也是方程 (3) 的解 ($a = b = 0$ 而且 c 为大于零的任意常数):

$$z_n(\xi) = \frac{d[-\sqrt{c}z_{n-1}^2(\xi) + z'_{n-1}(\xi)]}{p + z_{n-1}(\xi)[q + rz_{n-1}(\xi)] + mz'_{n-1}(\xi)} \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{42}$$

$$z_n(\xi) = \frac{(d - \sqrt{c} \mp q)z_{n-1}^2(\xi) + dz'_{n-1}(\xi)}{qz_{n-1}(\xi) + rz_{n-1}^2(\xi) + mz'_{n-1}(\xi)} \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{43}$$

$$z_n(\xi) = \frac{B\sqrt{c}\left[Bz_{n-1}(\xi) + Cz_{n-1}^2(\xi) + dz'_{n-1}(\xi)\right]}{B\sqrt{c}\left[\pm B + [q + rz_{n-1}(\xi)]z_{n-1}(\xi)\right] \mp \left[(C + d\sqrt{c})(C + d\sqrt{c} - q) + Br\right]z'_{n-1}(\xi)} \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{44}$$

若 $z_{n-1}(\xi)$ 是第一种椭圆辅助方程 (3) 的解, 则下列 $z_n(\xi)$ 也是方程 (3) 的解 ($a = c = 0$ 而且 b 为大于零的任意常数):

$$z_n(\xi) = \frac{d[-\sqrt{b}z_{n-1}(\xi) + z'_{n-1}(\xi)]}{p + qz_{n-1}(\xi) + rz_{n-1}^2(\xi) + mz'_{n-1}(\xi)} \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{45}$$

$$z_n(\xi) = \frac{Bz_{n-1}(\xi) + Cz'_{n-1}(\xi)}{-\sqrt{b}mz_{n-1}(\xi) + rz_{n-1}^2(\xi) + mz'_{n-1}(\xi)} \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{46}$$

$$z_n(\xi) = \frac{Bz_{n-1}(\xi) + Cz'_{n-1}(\xi)}{p - \sqrt{b}mz_{n-1}(\xi) + mz'_{n-1}(\xi)} \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{47}$$

$$z_n(\xi) = \frac{A - \sqrt{b}Cz_{n-1}(\xi) + Cz'_{n-1}(\xi)}{qz_{n-1}(\xi) + mz'_{n-1}(\xi)} \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{48}$$

$$z_n(\xi) = \frac{-\sqrt{b}dz_{n-1}(\xi) + Cz^2_{n-1}(\xi) + dz'_{n-1}(\xi)}{qz_{n-1}(\xi) + mz'_{n-1}(\xi)} \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{49}$$

$$z_n(\xi) = \frac{A^2 + ABz_{n-1}(\xi) + Adz'_{n-1}(\xi)}{Aqz_{n-1}(\xi) + (B + \sqrt{b}d)(\sqrt{b}m + q)z^2_{n-1}(\xi) + Amz'_{n-1}(\xi)} \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{50}$$

$$z_n(\xi) = \frac{pBz_{n-1}(\xi) + (B + \sqrt{b}d)(\sqrt{b}m + q)z^2_{n-1}(\xi) + pdz'_{n-1}(\xi)}{p^2 + pqz_{n-1}(\xi) + pmz'_{n-1}(\xi)} \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{51}$$

在解的 Bäcklund 变换 (42)—(51) 式中, d, m, p, q, r, B, C 是不全为零的任意常数.

3 辅助方程法的应用步骤

假设给定的非线性发展方程为 (以 $(2+1)$ 维非线性发展方程为例)

$$H(u, u_x, u_t, u_y, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_{xy}, u_{yt}, \cdots) = 0, \tag{52}$$

将方程(52)的形式解取为如下表达式 (不惟一):

$$\begin{aligned} & u(x, y, t) \\ =& u(\xi) = F\big(z(\xi), z'(\xi)\big) \\ =& F\big[z\big(px + q(y, t)\big), z'\big(px + q(y, t)\big)\big], \end{aligned} \tag{53}$$

其中 $F\big(z(\xi), z'(\xi)\big)$ 表示 $z(\xi)$ 和 $z'(\xi)$ 的变系数多项式或变系数有理分式. $z(\xi)$ 和 $z'(\xi)$ 由第一种椭圆辅助方程 (3) 确定. $F\big(z(\xi), z'(\xi)\big)$ 中 $z(\xi)$ 和 $z'(\xi)$ 的系数与 $q(y, t)$ 是 y, t 的待定函数, p 为待定常数.

将 (3) 和 (53) 式一起代入 (52) 式, 令 $z^j(\xi)\big(z'(\xi)\big)^i$ $(i = 0, 1; j = 0, 1, 2, \cdots)$ 的系数为零后即可得到一个以 $q(y, t)$ 和 (53) 式的系数为未知量的非线性超定微分方程组, 用符号计算系统 Mathematica 求出该微分方程组的解. 再把方程组的每一组解分别同第一种椭圆辅助方程 (3) 的解与相应的 Bäcklund 变换确定的无穷序列解一起代入 (53) 式, 即可得到非线性发展方程 (52) 的无穷序列光滑类孤子解、无穷序列类紧孤立子解和无穷序列类尖峰孤立子解.

4 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的无穷序列类孤子新精确解

Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的形式解选择为 (不惟一):

$$\begin{aligned} u(x, y, t) =& u(\xi) \\ =& g(y, t) + f(y, t)z^2\big(px + q(y, t)\big), \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} v(x, y, t) =& u(\xi) \\ =& h(y, t) + l(y, t)z^2\big(px + q(y, t)\big), \end{aligned} \tag{55}$$

将 (3), (54), (55) 式分别代入 (1), (2) 式, 并令 $z^j(\xi)(j = 0, 2)$, $z'(\xi)z(\xi)$, $z'(\xi)z^3(\xi)$ 的系数为零, 得到以 $g(y, t)$, $f(y, t)$, $h(y, t)$, $l(y, t)$, $q(y, t)$ 为未知量的一个非线性超定微分方程组. 利用符号计算系统 Mathematica 求出该方程组的解, 即

$$\begin{aligned} & g(y, t) = g(y) = q_y(y, t) = \Psi'(y), \\ & f(y, t) = f(y) = -\frac{6cp\beta q_y(y, t)}{\alpha}, \\ & l(y, t) = \frac{6cp^2}{\alpha}, \\ & h(y, t) = h(t) = \frac{p^2\alpha g(y) - \beta q_t(y, t)q_y(y, t)}{p\alpha\beta q_y(y, t)}, \\ & q(y, t) = \Psi(y) + \Phi(t). \end{aligned} \tag{56}$$

将 (56) 式代入 (54) 和 (55) 式, 得到 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的解

$$\begin{aligned} u(x, y, t) =& \Psi'(y)\Big(1 - \frac{6cp\beta}{\alpha}\Big)z^2 \\ & \times \big[px + \Psi(y) + \Phi(t)\big], \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned} v(x, y, t) =& \frac{p^2\alpha - \beta\Phi'(t)}{p\alpha\beta} \\ & + \frac{6cp^2}{\alpha}z^2\big[px + \Psi(y) + \Phi(t)\big], \end{aligned} \tag{58}$$

其中 $\Psi(y), \Phi(t)$ 分别是 y, t 的任意函数.

第一种椭圆辅助方程的已知解与相应

的 Bäcklund 变换迭代后, 获得第一种椭圆辅助方程的无穷序列精确解. 再把这些解代入 (57) 和 (58) 式, 可以得到 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的无穷序列类孤子新精确解.

4.1 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的无穷序列光滑类孤子解

通过下列 Bäcklund 变换

$$\begin{cases} u_n(x,y,t)=\Psi'(y)\Big(1-\dfrac{6cp\beta}{\alpha}\Big)z_n^2(\xi),\\ v_n(x,y,t)=\dfrac{p^2\alpha-\beta\Phi'(t)}{p\alpha\beta}+\dfrac{6cp^2}{\alpha}z_n^2(\xi)\quad n=1,2,\cdots,\\ z_n^2(\xi)=\dfrac{a\Big[-\sqrt{3A_2}\mp 9\Big(z'_{n-1}(\xi)\Big)^2\Big]}{\sqrt{3A_2}(b-\sqrt{b^2-3ac})+2\sqrt{3A_2}cz_{n-1}^2(\xi)\pm 3(b+\sqrt{b^2-3ac})\Big(z'_{n-1}(\xi)\Big)^2},\\ z_0(\xi)=\dfrac{\sqrt{\dfrac{F^2(k^2-1)+G^2}{G^2+F^2k^2}}+\mathrm{cn}(\xi,k)}{G\mathrm{sn}(\xi,k)+F\mathrm{dn}(\xi,k)}\quad \xi=px+\Psi(y)+\Phi(t),\\ a=\dfrac{1}{4(G^2+F^2k^2)},\ b=\dfrac{1}{2}-k^2,\ c=\dfrac{1}{4}(G^2+F^2k^2), \end{cases}\tag{59}$$

可以获得 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的 Jacobi 椭圆函数型无穷序列光滑类孤子解.

当 $k=1$ 时, 通过下列 Bäcklund 变换

$$\begin{cases} u_n(x,y,t)=\Psi'(y)\Big(1-\dfrac{6cp\beta}{\alpha}\Big)z_n^2(\xi),\\ v_n(x,y,t)=\dfrac{p^2\alpha-\beta\Phi'(t)}{p\alpha\beta}+\dfrac{6cp^2}{\alpha}z_n^2(\xi)\quad n=1,2,\cdots,\\ z_n^2(\xi)=\dfrac{a\Big[-\sqrt{3A_2}\mp 9\Big(z'_{n-1}(\xi)\Big)^2\Big]}{\sqrt{3A_2}(b-\sqrt{b^2-3ac})+2\sqrt{3A_2}cz_{n-1}^2(\xi)\pm 3(b+\sqrt{b^2-3ac})\Big(z'_{n-1}(\xi)\Big)^2},\\ z_0(\xi)=\dfrac{\sqrt{\dfrac{G^2}{G^2+F^2}}+\mathrm{sech}(\xi)}{G\tanh(\xi)+F\,\mathrm{sech}(\xi)}\quad \xi=px+\Psi(y)+\Phi(t),\\ a=\dfrac{1}{4(G^2+F^2)},\quad b=-\dfrac{1}{2},\quad c=\dfrac{1}{4}(G^2+F^2), \end{cases}\tag{60}$$

可以构造 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的双曲函数型无穷序列光滑类孤子解.

$k=0$ 时, 利用 Bäcklund 变换

$$\begin{cases} u_n(x,y,t)=\Psi'(y)\Big(1-\dfrac{6cp\beta}{\alpha}\Big)z_n^2(\xi),\\ v_n(x,y,t)=\dfrac{p^2\alpha-\beta\Phi'(t)}{p\alpha\beta}+\dfrac{6cp^2}{\alpha}z_n^2(\xi)\quad n=1,2,\cdots,\\ z_n^2(\xi)=\dfrac{a\Big[-\sqrt{3A_2}\mp 9\Big(z'_{n-1}(\xi)\Big)^2\Big]}{\sqrt{3A_2}(b-\sqrt{b^2-3ac})+2\sqrt{3A_2}cz_{n-1}^2(\xi)\pm 3(b+\sqrt{b^2-3ac})\Big(z'_{n-1}(\xi)\Big)^2},\\ z_0(\xi)=\dfrac{\sqrt{\dfrac{G^2-F^2}{G^2}}+\cos(\xi)}{G\sin(\xi)+F}\quad \xi=px+\Psi(y)+\Phi(t),\\ a=\dfrac{1}{4G^2},\quad b=\dfrac{1}{2},\quad c=\dfrac{G^2}{4},\quad G^2-F^2>0, \end{cases}\tag{61}$$

可以确定 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的三角函数型无穷序列光滑孤立波解. 在 (59)—(61) 式中 G, F 是不全为零的任意常数.

4.2 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的无穷序列类尖峰孤立子解

通过下列 Bäcklund 变换

$$\begin{cases} u_n(x,y,t)=\Psi'(y)\Big(1-\dfrac{6cp\beta}{\alpha}\Big)z_n^2(\xi), \\ v_n(x,y,t)=\dfrac{p^2\alpha-\beta\Phi'(t)}{p\alpha\beta}+\dfrac{6cp^2}{\alpha}z_n^2(\xi) \quad b^2=4ac, \quad n=1,2,\cdots, \\ z_n(\xi)=\dfrac{\mathrm{i}b[S+Lz_{n-1}^2(\xi)]}{b\sqrt{SL}\mp \mathrm{i}b\sqrt{\dfrac{(-2Sc+bL)^2}{b^2}}z_{n-1}(\xi)+2c\sqrt{SL}z_{n-1}^2(\xi)} \quad SL<0,\ b^2-4ac=0, \\ z_0(\xi)=\dfrac{\sqrt{-b}\Big[1+\exp(\sqrt{-2b}|\xi|)\Big]}{\sqrt{2c}\Big[1-\exp(\sqrt{-2b}|\xi|)\Big]} \quad b<0 \quad c>0, \xi=px+\Psi(y)+\Phi(t), \end{cases} \tag{62}$$

可以获得 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的双曲函数型无穷序列类尖峰孤立子解.

把下列 Bäcklund 变换

$$\begin{cases} u_n(x,y,t)=\Psi'(y)\Big(1-\dfrac{6cp\beta}{\alpha}\Big)z_n^2(\xi), \\ v_n(x,y,t)=\dfrac{p^2\alpha-\beta\Phi'(t)}{p\alpha\beta}+\dfrac{6cp^2}{\alpha}z_n^2(\xi) \quad b^2=4ac, n=1,2,\cdots, \\ z_n(\xi)=\dfrac{\mathrm{i}b[S+Lz_{n-1}^2(\xi)]}{b\sqrt{SL}\mp \mathrm{i}b\sqrt{\dfrac{(-2Sc+bL)^2}{b^2}}z_{n-1}(\xi)+2c\sqrt{SL}z_{n-1}^2(\xi)} \quad SL<0,\ b^2-4ac=0, \\ z_0(\xi)=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{2c}}\tan\Big(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}}|\xi|\Big) \quad b>0,\ c>0,\ \xi=px+\Psi(y)+\Phi(t) \end{cases} \tag{63}$$

迭代后得到 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的三角函数型无穷序列类尖峰孤立子解.

利用下列 Bäcklund 变换

$$\begin{cases} u_n(x,y,t)=\Psi'(y)\Big(1-\dfrac{6cp\beta}{\alpha}\Big)z_n^2(\xi), \\ v_n(x,y,t)=\dfrac{p^2\alpha-\beta\Phi'(t)}{p\alpha\beta}+\dfrac{6cp^2}{\alpha}z_n^2(\xi) \quad n=1,2,\cdots, \\ z_n(\xi)=\dfrac{d[-\sqrt{c}z_{n-1}^2(\xi)+z'_{n-1}(\xi)]}{p+z_{n-1}(\xi)[q+rz_{n-1}(\xi)]+mz'_{n-1}(\xi)} \quad a=b=0,\ n=1,2,\cdots, \\ z_0(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{c}|\xi|} \quad a=b=0,\ c>0,\ \xi=px+\Psi(y)+\Phi(t), \end{cases} \tag{64}$$

可以构造 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的有理函数型无穷序列类尖峰孤立子解.

4.3 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的无穷序列类紧孤立子解

通过下列 Bäcklund 变换

$$\begin{cases} u_n(x,y,t) = \Psi'(y)\Big(1 - \dfrac{6cp\beta}{\alpha}\Big) z_n^2(\xi), \\ v_n(x,y,t) = \dfrac{p^2\alpha - \beta\Phi'(t)}{p\alpha\beta} + \dfrac{6cp^2}{\alpha} z_n^2(\xi) \quad n = 1,2,\cdots, \\ z_n^2(\xi) = \dfrac{a\Big[-\sqrt{3A_2} \mp 9\Big(z'_{n-1}(\xi)\Big)^2\Big]}{\sqrt{3A_2}(b - \sqrt{b^2-3ac}) + 2\sqrt{3A_2}cz_{n-1}^2(\xi) \pm 3(b + \sqrt{b^2-3ac})\Big(z'_{n-1}(\xi)\Big)^2}, \\ z_0(\xi) = \begin{cases} \mathrm{sn}(\xi,k) & (4N+1)K(k) \leqslant \xi \leqslant (4N+5)K(k), \\ 1 & \text{其他}, \end{cases} \\ a = 1, \quad b = -(1+k^2), \quad c = k^2, \quad \xi = px + \Psi(y) + \Phi(t), \quad N \in \mathbb{Z}; \end{cases} \tag{65}$$

$$\begin{cases} u_n(x,y,t) = \Psi'(y)\Big(1 - \dfrac{6cp\beta}{\alpha}\Big) z_n^2(\xi), \\ v_n(x,y,t) = \dfrac{p^2\alpha - \beta\Phi'(t)}{p\alpha\beta} + \dfrac{6cp^2}{\alpha} z_n^2(\xi) \quad n = 1,2,\cdots, \\ z_n^2(\xi) = \dfrac{a\Big[-\sqrt{3A_2} \mp 9\Big(z'_{n-1}(\xi)\Big)^2\Big]}{\sqrt{3A_2}(b - \sqrt{b^2-3ac}) + 2\sqrt{3A_2}cz_{n-1}^2(\xi) \pm 3(b + \sqrt{b^2-3ac})\Big(z'_{n-1}(\xi)\Big)^2}, \\ z_0(\xi) = \begin{cases} \mathrm{sn}(\xi,k) & (4N-1)K(k) \leqslant \xi \leqslant (4N+3)K(k), \\ -1 & \text{其他}, \end{cases} \\ a = 1,\ b = -(1+k^2),\ c = k^2,\ \xi = px + \Psi(y) + \Phi(t), \quad N \in \mathbb{Z}; \end{cases} \tag{66}$$

$$\begin{cases} u_n(x,y,t) = \Psi'(y)\Big(1 - \dfrac{6cp\beta}{\alpha}\Big) z_n^2(\xi), \\ v_n(x,y,t) = \dfrac{p^2\alpha - \beta\Phi'(t)}{p\alpha\beta} + \dfrac{6cp^2}{\alpha} z_n^2(\xi) \quad n = 1,2,\cdots, \\ z_n^2(\xi) = \dfrac{a\Big[-\sqrt{3A_2} \mp 9\Big(z'_{n-1}(\xi)\Big)^2\Big]}{\sqrt{3A_2}(b - \sqrt{b^2-3ac}) + 2\sqrt{3A_2}cz_{n-1}^2(\xi) \pm 3(b + \sqrt{b^2-3ac})\Big(z'_{n-1}(\xi)\Big)^2}, \\ z_0(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \leqslant (4N+1)K(k), \\ \mathrm{sn}(\xi,k) & (4N+1)K(k) \leqslant \xi \leqslant (4N+3)K(k), \\ -1 & (4N+3)K(k) \leqslant \xi, \end{cases} \\ a = 1,\ b = -(1+k^2),\ c = k^2,\ \xi = px + \Psi(y) + \Phi(t), \quad N \in \mathbb{Z}; \end{cases} \tag{67}$$

$$\begin{cases} u_n(x,y,t) = \Psi'(y)\Big(1 - \dfrac{6cp\beta}{\alpha}\Big) z_n^2(\xi), \\ v_n(x,y,t) = \dfrac{p^2\alpha - \beta\Phi'(t)}{p\alpha\beta} + \dfrac{6cp^2}{\alpha} z_n^2(\xi) \quad n = 1,2,\cdots, \\ z_n^2(\xi) = \dfrac{a\Big[-\sqrt{3A_2} \mp 9\Big(z'_{n-1}(\xi)\Big)^2\Big]}{\sqrt{3A_2}(b - \sqrt{b^2-3ac}) + 2\sqrt{3A_2}cz_{n-1}^2(\xi) \pm 3(b + \sqrt{b^2-3ac})\Big(z'_{n-1}(\xi)\Big)^2}, \\ z_0(\xi) = \begin{cases} -1 & \xi \leqslant (4N+2)K(k), \\ \mathrm{cn}(\xi,k) & (4N+2)K(k) \leqslant \xi \leqslant (4N+4)K(k), \\ 1 & \xi \geqslant (4N+4)K(k), \end{cases} \\ a = 1,\ b = -(1+k^2),\ c = k^2,\ \xi = px + \Psi(y) + \Phi(t),\ N \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{68}$$

可以得到 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的 Jacobi 椭圆函数型无穷序列类紧孤立子解,
其中

$$A_2=\sqrt{\frac{1}{16c^2}[128b^3-432abc+2(16b^2-48ac)^{\frac{3}{2}}]}.$$

把第一种椭圆辅助方程的已知解 (25) 式和 Bäcklund 变换 (40) 式确定的无穷序列解, 代入 (57), (58) 式后得到构造 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程双曲函数型无穷序列紧孤立子解的如下非线性叠加公式:

$$\begin{cases}u_n(x,y,t)=\Psi'(y)\Big(1-\dfrac{6cp\beta}{\alpha}\Big)z_n^2(\xi),\\ v_n(x,y,t)=\dfrac{p^2\alpha-\beta\Phi'(t)}{p\alpha\beta}+\dfrac{6cp^2}{\alpha}z_n^2(\xi)\quad n=1,2,\cdots,\\ z_n^2(\xi)=\dfrac{-2\sqrt{3A_1}cz_{n-1}^2(\xi)\pm 6b[z'_{n-1}(\xi)]^2}{c\Big[\sqrt{3A_1}\mp 9[z'_{n-1}(\xi)]^2\Big]},\ a=0,\ b>0,\ A_1=4\sqrt{\dfrac{b^3}{c^2}},\ n=1,2,\cdots,\\ z_0(\xi)=\begin{cases}\Big[\dfrac{-b}{c}\operatorname{sech}^2(\sqrt{b}\xi)\Big]^{\frac{1}{2}} & b>0,c<0,\\ \pm\sqrt{\dfrac{-b}{c}} & b>0,\quad c<0,\end{cases}\quad \xi=px+\Psi(y)+\Phi(t).\end{cases}\tag{69}$$

把第一种椭圆辅助方程的已知解 (26) 式和 Bäcklund 变换 (43) 式确定的无穷序列解, 代入 (55) 式后得到第二类变系数 KdV 方程的下列三角函数型无穷序列紧孤立子解

$$\begin{cases}u_n(x,y,t)=\Psi'(y)\Big(1-\dfrac{6cp\beta}{\alpha}\Big)z_n^2(\xi),\\ v_n(x,y,t)=\dfrac{p^2\alpha-\beta\Phi'(t)}{p\alpha\beta}+\dfrac{6cp^2}{\alpha}z_n^2(\xi)\quad n=1,2,\cdots,\\ z_n^2(\xi)=\dfrac{-8b\sqrt{3A_1}-2\sqrt{3A_1}cz_{n-1}^2(\xi)}{4c\Big[\sqrt{3A_1}\mp 9[z'_{n-1}(\xi)]^2\Big]}\quad a=0,\quad b<0,\quad A_1=4\sqrt{\dfrac{b^3}{c^2}},\quad n=1,2,\cdots,\\ z_0(\xi)=\begin{cases}\Big[\dfrac{-b}{c}\sec^2[(-b)^{\frac{1}{2}}\xi]\Big]^{\frac{1}{2}} & b<0,\quad c>0,\\ 0 & b<0,\quad c>0,\end{cases}\quad \xi=px+\Psi(y)+\Phi(t).\end{cases}\tag{70}$$

5 结 论

文献 [17—27] 通过变换 $u(x,t)=u(\xi)$, $\xi=p(y)x+q(y,t)$ (其中 $p(y)$, $q(y,t)$ 是待定函数), 推广应用辅助方程法, 构造了非线性发展方程的类孤子新精确解. 这些解包括了有限多个光滑类孤立子解和周期解.

文献 [30—38] 研究获得了 Camassa-Holm (CH) 方程、K(m,n) 方程、广义 Camassa-Holm (CH-r) 方程、广义 DGH 方程、Degasperis-Procesi 方程、B(m,n) 方程和 K$(m,n,1)$ 方程等少数非线性发展方程的有限多个尖峰孤立子解和紧孤立子解.

文献 [1—27] 及 [30—38] 等许多研究成果获得了非线性发展方程的有限多个光滑孤立子解、尖峰孤立子解和紧孤立子解, 未能获得无穷序列精确解. 本文为了构造非线性发展方程的无穷序列新精确解, 挖掘辅助方程法的构造性和机械化性两大特点, 进一步研究了第一种椭圆辅助方程, 获得了该方程的一些新解和相应的 Bäcklund 变换. 在变换 $u(x,t)=u(\xi)$, $\xi=px+q(y,t)$ (其中 $q(y,t)$ 是待定函数, p 是待定常数) 下, 借助符号计算系统 Mathematica, 构造了 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的无穷序列光滑类孤立子解、无穷序列类紧孤立子解和无穷序列类尖峰孤立子解. 该方法不仅能够获得文献 [30—38] 中讨论的非线性发展方程的无穷序列尖峰孤立子解和紧孤立子解, 而且也能构造其他非线性发展方程的无穷序列光滑孤立子解、无穷序列紧孤立子解和无穷序列尖峰孤立子解.

[1] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212
[2] Chen Y, Yan Z Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 1
[3] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 137
[4] Zhang J L, Ren D F, Wang M L, Wang Y M, Fang Z D 2003 *Chin. Phys.* **12** 825
[5] Zhang L, Zhang L F, Li C Y 2008 *Chin. Phys.* B **17** 403
[6] Zhao X Q, Zhi H Y, Zhang H Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 2202
[7] Lu B, Zhang H Q 2008 *Chin. Phys.* B **17** 3974
[8] Taogetusang, Sirendaoerji, Li S M 2010 *Chin. Phys.* B **19** 080303(1)
[9] Taogetusang, Sirendaoerji, Wang Q P 2009 *Acta Sci. J. Nat. Univ. NeiMongol* **38** 387 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉, 王庆鹏 2009 内蒙古师范大学学报 **38** 387]
[10] Taogetusang, Sirendaoerji 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5194 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2010 物理学报 **59** 5194]
[11] Taogetusang, Sirendaoerji 2010 *Acta. Phys. Sin.* **59** 4413 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2010 物理学报 **59** 4413]
[12] Chen H T, Zhang H Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 497
[13] Xie F D, Yuan Z T 2005 *Commun. Theor. Phys.* **43** 39
[14] Zhen X D, Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* **39** 647
[15] Xie F D, Gao X S 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 353
[16] Chen Y, Li B 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 1
[17] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1377
[18] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 984
[19] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 940
[20] Lü Z S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* **39** 405
[21] Xie F D, Chen J, Lü Z S 2005 *Commun. Theor. Phys.* **43** 585
[22] Ma S H, Fang J P, Zhu H P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4319 (in Chinese) [马松华, 方建平, 朱海平 2007 物理学报 **56** 4319]
[23] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 11 (in Chinese) [马松华, 吴小红, 方建平, 郑春龙 2008 物理学报 **57** 11]
[24] Pan Z H, Ma S H, Fang J P 2010 *Chin. Phys.* B **19** 100301
[25] Qiang J Y, Ma S H, Fang J P 2010 *Chin. Phys.* B **19** 090305
[26] Xu G Q, Li Z B 2003 *Commun. Theor. Phys.* **39** 39
[27] Chen H T, Zhang H Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 497
[28] Taogetusang, Sirendaoerji 2011 *Journal of Inner Mongolia University* **42** 344 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2011 内蒙古大学学报 **42** 344]
[29] Jiao X Y, Wang J H, Zhang H Q 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 407
[30] Camassa R, Holm D D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661
[31] Rosenau P, Hyman J 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 564
[32] Dullin H R, Gottwald G A, Holm D D 2002 *Phys. Rev. Lett.* **87** 4501
[33] Guo B L, Liu Z R 2003 *Sci. China* A **33** 325 (in Chinese) [郭柏灵, 刘正荣 2003 中国科学 A **33** 325]
[34] Yin J L, Tian L X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3632 (in Chinese) [殷久利, 田立新 2009 物理学报 **58** 3632]
[35] Yu L Q, Tian L X 2006 *Math. Practice Theory* **36** 261 (in Chinese) [余丽琴, 田立新 2006 数学的实践与认识 **36** 261]
[36] Yu L Q, Tian L X 2005 *Pure Appl. Math.* **21** 310 (in Chinese) [余丽琴, 田立新 2005 纯粹数学与应用数学 **21** 310]
[37] Yan Z Y 2002 *Chaos Soliton. Fract.* **14** 1151
[38] Yin J L, Tian L X 2007 *Acta Math. Phys.* **27** 27 (in Chinese) [殷久利, 田立新 2007 数学物理学报 **27** 27]

Infinite sequence soliton-like exact solutions of Nizhnik-Novikov-Vesselov equation*

Taogetusang[1)2)†] Bai Yu-Mei[2)]

1) (*College of Mathematical, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao* 028043*, China*)

2) (*College of Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University, Huhhot* 010022*, China*)

(Received 8 September 2011; revised manuscript received 27 September 2011)

Abstract

To construct the infinite sequence soliton-like exact solutions of nonlinear evolution equations and develop the characteristics of constructivity and mechanization of the first kind of elliptic equation, new type of solutions and the corresponding Bäcklund transformation of the equation are presented. Based on this, infinite sequence soliton-like exact solutions of Nizhnik-Novikov-Vesselov equation are obtained with the help of symbolic computation system Mathematica, which includes infinite sequence smooth soliton-like solutions, infinite sequence peak soliton-like solutions and infinite sequence compact soliton-like solutions.

Keywords: the first kind of elliptic equation, Bäcklund transformation, Nizhnik-Novikov-Vesselov equation, infinite sequence exact solution

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10862003), the Science Research Foundation of Institution of Higher Education of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. NJZY12031), and the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. 2010MS0111).

† E-mail: tgts@imnu.edu.cn