

移动环境下网络病毒传播模型及其稳定性研究*

巩永旺¹⁾³⁾ 宋玉蓉²⁾ 蒋国平^{2)†}

1) (南京邮电大学计算机学院, 南京 210003)

2) (南京邮电大学自动化学院, 南京 210003)

3) (盐城工学院信息工程学院, 盐城 224051)

(2011年7月18日收到; 2011年9月26日收到修改稿)

考虑网络节点的随机移动, 基于平均场理论提出一个移动环境下网络病毒传播的数学模型, 利用微分动力系统理论研究了病毒传播行为. 研究表明, 当病毒基本再生数 $R_0 \leq 1$ 时, 网络中病毒逐渐消除, 系统的无病毒平衡点全局渐进稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 网络中病毒持续存在, 系统的地方病平衡点全局渐进稳定. 通过仿真验证了所得结论的正确性.

关键词: 移动环境, 病毒传播模型, 渐进稳定性

PACS: 02.50.-r, 05.65.+b

1 引言

现实世界中生物病毒(如流感病毒, 非典(Severe Acute Respiratory Syndromes, SARS)病毒)在人群中传播, 计算机病毒在互联网上泛滥, 都可归类为网络中的病毒传播行为. 近年来, 随着复杂网络理论的发展, 基于复杂网络理论, 研究病毒传播行为和传播临界特性受到了广泛关注^[1-14]. 文献[1-6]研究了无标度网络上的病毒传播临界值问题; 文献[7-9]分析了传播媒介、传播延迟、不完全免疫等因素对病毒传播的影响; 文献[10,11]研究了异构网络中非一致病毒传播率的病毒传播行为; 文献[12-14]研究了网络节点免疫策略及其对病毒传播行为的影响等.

在病毒传播研究过程中, 人们提出了多种病毒传播模型, 其中包括: SI (susceptible-infected) 模型^[1], SIS (susceptible-infected-susceptible) 模型^[7], SIR (susceptible-infected-removed) 模型^[10], SEIR (susceptible-exposed-infected-removed) 模型^[11]等. 在 SI 和 SIS 模型中, 网络中的每个节

点处于两种可能的状态: 易感染状态 S 和感染状态 I. SI 模型中, 易感染节点感染病毒后不能被治愈, 终身处于感染状态, 而 SIS 模型中, 易感染节点感染病毒后可被治愈, 且治愈后再次返回到易感染状态. 在 SIR 模型中, 网络中的每个节点处于三种可能的状态: 易感染状态 S, 感染状态 I 和免疫状态 R. 易感染节点感染病毒后, 可被治愈并获得终身免疫能力, 不会被再次感染. 在 SEIR 模型中, 网络中的每个节点处于四种可能的状态: 易感染状态 (健康状态) S, 暴露状态 (潜伏状态) E, 感染状态 I 和免疫状态 R. SEIR 模型是在 SIR 模型的基础上增加潜伏期状态, 即易感染节点被感染后, 先进入潜伏状态 (不具有感染能力), 潜伏期过后, 节点进入感染状态 (具有感染能力), 感染节点一旦被治愈, 将终身具有免疫能力, 不会被再次感染. SEIR 模型适合于描述病毒感染具有明显潜伏期的病毒传播过程.

上述研究大多基于静态网络, 即病毒传播过程中, 节点之间的连接是固定的, 且忽略节点间的几何距离. 而现实中很多网络的节点是移动的, 其几何半径有限. 显然, 病毒在这种移动节点之间的传

* 国家自然科学基金 (批准号: 60874091)、江苏省“六大人才高峰”高层次人才项目 (批准号: SJ209006)、高等学校博士点基金 (批准号: 20103223110003)、江苏省自然科学基金 (批准号: BK2010526) 和江苏省研究生培养创新工程项目 (批准号: CXLX11.0417, CXLX11.0403) 资助的课题.

† E-mail: jianggp@njupt.edu.cn

播与节点之间的几何距离密切相关,而且受节点的移动方式、节点密度等因素的影响.例如,很多传染性疾病只在近距离的人群之间传染.在移动多跳分组无线网络(即移动 Ad Hoc 网络)中,网络蠕虫的传播受移动设备通信半径的限制^[15],通过蓝牙协议传播的手机病毒也只有在 10—30 m 之内可以传播^[16].因此,研究移动环境下的病毒传播行为具有重要的现实意义.文献[17, 18]研究了节点以一定概率做局部随机移动和允许小部分节点做远距离运动情况下的 SIR 病毒传播模型,并分析了远距离运动节点比率大小对病毒传播行为的影响.但文献中只考虑了节点移动后,拓扑结构稳定时节点之间的病毒传播,忽略了移动过程中,节点瞬间接触对病毒传播的影响.文献[19]从分子动力学的角度研究了节点移动过程中瞬间接触下的 SIS 病毒传播模型,建立了病毒传播与节点密度,运动速度和感染时间等因素的函数关系.文献[20]研究了 Ad Hoc 网络中节点移动过程中瞬间接触下的 sir 网络蠕虫模型.但文献[19, 20]均假设节点像分子一样持续运动和“碰撞”,节点瞬间接触即可感染病毒,这显然不太符合真实的网络环境.

现实世界中,移动环境下的网络节点既有运动过程,也有相对静止过程.在运动过程中,由于节点之间的接触时间短,病毒的传播率会较低,在静止过程中,由于节点之间接触时间长,病毒传播率会较高.本文考虑这种更符合实际的移动环境,研究一类病毒具有潜伏期、免疫节点具有临时免疫能力的网络病毒传播行为.基于 SEIR 模型,提出一个移动环境下的网络 SEIRS (susceptible-exposed-infected-removed-susceptible) 病毒传播数学模型.从微分动力学系统的角度分析病毒的传播规律和病毒传播是否消除的传染临界特性,利用下一代生成矩阵方法,求得病毒基本再生数 R_0 ,研究系统平衡点的存在条件和系统在平衡点的全局渐进稳定性.

2 移动环境下网络 SEIRS 病毒传播模型

设网络中有共 N 个节点,这些节点被随机分配在满足周期边界条件的 $L \times L$ 的二维平面上(节点平均密度可表示为 $\rho = N/L^2$),所有节点以相同速度在该平面上随机运动.设每个时间步节点都包含一个移动过程和移动后的相对静止过程,静止过程中网络拓扑结构稳定.定义节点运动的

数学模型^[17,21]为

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= x_i(t) + v \cos \theta_i(t), \\ y_i(t+1) &= y_i(t) + v \sin \theta_i(t), \\ \theta_i(t) &= \varphi_i. \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $x_i(t), y_i(t)$ 分别为 t 时间步节点 i 在二维平面上的横坐标和纵坐标, φ_i 是区间 $[-\pi, \pi]$ 内均匀分布的 N 个独立的随机变量, v 是节点的运动速度.

将网络中节点状态分为易感染状态 S、暴露状态 E、感染状态 I 和免疫状态 R 四种.任意时间步,每个节点都处于这四种状态之一.用 $S(t), E(t), I(t)$ 和 $R(t)$ 分别表示 t 时间步处于易感状态、暴露状态、感染状态和免疫状态节点的数量,显然有等式 $N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ 成立.设所有节点的通信半径均为 r ,即认为处于通信半径内的节点之间是接触的.设一个状态为 S 的节点在 t 到 $t+1$ 时间步,运动过程中其瞬间接触的状态为 I 的节点数为 $N_{I_v}(t)$,网络拓扑结构稳定时,其接触的状态为 I 的节点数为 $N_{I_r}(t)$;另假设瞬间接触中病毒的传播率为 λ_1 ,网络拓扑结构稳定时,病毒传播率为 λ_2 ,且 $\lambda_2 > \lambda_1$.则 t 到 $t+1$ 时间步,该节点被感染的概率 $\beta(t+1)$ 可表示为

$$\begin{aligned} \beta(t+1) &= (1 - (1 - \lambda_1)^{N_{I_v}(t)}) \\ &\quad + (1 - (1 - \lambda_2)^{N_{I_r}(t)}) \\ &\quad - \left(1 - (1 - \lambda_1)^{N_{I_v}(t)}\right) \\ &\quad \times \left(1 - (1 - \lambda_2)^{N_{I_r}(t)}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

由于初始时刻节点被随机分配在 $L \times L$ 二维平面上,且每个时间步,节点以相同的速度随机运动,因此,可以认为在任意时间步,节点在平面 $L \times L$ 上保持分配的均匀性,且满足均匀混合假设.则 $N_{I_v}(t)$ 和 $N_{I_r}(t)$ 可分别表示为

$$N_{I_v}(t) = \frac{2rv\rho I(t)}{N} = \frac{2rvI(t)}{L^2}, \quad (3)$$

$$N_{I_r}(t) = \frac{\pi r^2 \rho I(t)}{N} = \frac{\pi r^2 I(t)}{L^2}. \quad (4)$$

将(3)和(4)式代入(2)式,并用泰勒公式进行展开(设 $\lambda_1 < \lambda_2 \ll 1$),忽略高阶项,化简可得

$$\beta(t+1) = (2\lambda_1 rv + \lambda_2 \pi r^2) I(t) / L^2. \quad (5)$$

另假设单个时间步内,处于病毒潜伏期节点的发病率为 γ ,则 $1/\gamma$ 表示发病周期;发病节点获得免疫能力而康复的概率为 ω ,则 $1/\omega$ 表示康复周期;康复节点失去免疫能力的概率为 b ,则 $1/b$ 表示免疫周

期. 参数 γ, ω, b 均为非负常数. 病毒传播过程中, 节点的状态转换如图 1 所示.

根据上述分析和病毒传播过程中节点状态的转换关系, 建立移动环境下的网络病毒传播数学模型为

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= -(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)S(t)I(t)/L^2 + bR(t), \\ \dot{E}(t) &= (2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)S(t)I(t)/L^2 - \gamma E(t), \\ \dot{I}(t) &= \gamma E(t) - \omega I(t), \\ \dot{R}(t) &= \omega I(t) - bR(t). \end{aligned} \quad (6)$$

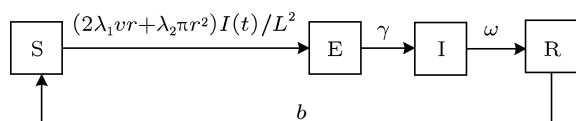


图 1 网络节点状态转换图

3 系统稳定性研究

3.1 传播阈值与平衡点的存在性

由于 $N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$, 因此 $R(t)$ 可用 $R(t) = N - S(t) - E(t) - I(t)$ 表示. 据此, 在研究系统的平衡点及其稳定性时, 可将四维系统 (6) 式降为三维系统考虑, 降维后的系统模型表示为

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= -(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)S(t)I(t)/L^2 \\ &\quad + b(N - S(t) - E(t) - I(t)), \\ \dot{E}(t) &= (2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)S(t)I(t)/L^2 - \gamma E(t), \\ \dot{I}(t) &= \gamma E(t) - \omega I(t). \end{aligned} \quad (7)$$

显然, $T = \{(S, E, I) \in \mathbb{R}_+^3 | S(t) + E(t) + I(t) \leq N\}$ 为系统 (7) 式的正不变集, 系统 (7) 式总有平衡点 $P^0 = (N, 0, 0)$, 此平衡点称为系统的无病毒平衡点. 应用文献 [22] 中的下一代生成矩阵方法, 可得到系统 (7) 式的病毒基本再生数 R_0 , 如下式所示:

$$R_0 = \frac{(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)N}{\omega L^2}$$

$$J(P^*) = \begin{bmatrix} -(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I^*/L^2 - b & -b & -(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)S^*/L^2 - b \\ (2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I^*/L^2 & -\gamma & (2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)S^*/L^2 \\ 0 & \gamma & -\omega \end{bmatrix}.$$

矩阵 $J(P^*)$ 的特征多项式为

$$z^3 + m_1z^2 + m_2z + m_3 = 0. \quad (9)$$

其中

$$m_1 = (2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I^*/L^2 + b + \gamma + \omega,$$

$$= \frac{(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)\rho}{\omega}. \quad (8)$$

$R_0 = 1$ 称为病毒传播阈值.

当 $R_0 > 1$ 时, 系统 (7) 式还有另一平衡点 $P^* = (S^*, E^*, I^*)$, 其中 $S^* = \frac{\omega L^2}{2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2}$, $E^* = \omega I^*/\gamma$, $I^* = \frac{\gamma b N}{b\gamma + b\omega + \gamma\omega} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$. 平衡点 P^* 也称为地方病平衡点.

定理 1 系统 (7) 式总有无病毒平衡点 P^0 ; 当 $R_0 > 1$ 时, 系统 (7) 式除了有无病毒平衡点 P^0 外, 还有一地方病平衡点 P^* .

3.2 平衡点的稳定性

定理 2 当 $R_0 \leq 1$ 时, 平衡点 P^0 是全局渐进稳定的, 当 $R_0 > 1$ 时, 平衡点 P^0 是不稳定的.

证明 选择李亚普诺夫函数 $L = E(t) + I(t)$ (由于 $E(t), I(t)$ 非负, 可知该函数为正定函数), 则 $\dot{L} = \dot{E}(t) + \dot{I}(t) \leq I(t)\omega(R_0 - 1)$. 易知, 当 $R_0 \leq 1$, 则 $\dot{L} \leq 0$, 且当且仅当 $I(t) = 0$ 时, $\dot{L} = 0$. 因此, $\{(S, E, I) \in T : \dot{L} = 0\}$ 的最大紧的不变集为 $\{P^0\}$, 由拉萨尔不变集定理知, 平衡点 P^0 是全局渐进稳定的. 系统 (7) 式在平衡点 P^0 处的 Jacobian 矩阵为

$$J(P^0) = \begin{bmatrix} -b & -b & -(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)N/L^2 - b \\ 0 & -\gamma & (2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)N/L^2 \\ 0 & \gamma & -\omega \end{bmatrix}.$$

当 $R_0 > 1$ 时, 矩阵 $J(P^0)$ 有一特征值为正, 所以平衡点 P_0 是不稳定的.

定理 3 当 $R_0 > 1$ 时, 平衡点 $P^* = (S^*, E^*, I^*)$ 是局部渐进稳定的.

证明 系统 (7) 式在地方病平衡点 $P^* = (S^*, E^*, I^*)$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$m_2 = (\omega + \gamma)((2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I^*/L^2 + b) + \gamma\omega - \gamma(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)S^*/L^2 + b(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I^*/L^2,$$

$$m_3 = \gamma\omega((2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I^*/L^2 + b) + b(\omega + \gamma)(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I^*/L^2 - b\gamma(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)S^*/L^2.$$

显然 $m_1 > 0, m_2 > 0, m_3 > 0, m_1m_2 - m_3 > 0$. 根据 Routh-Hurwitz 稳定判据, 可知地方病平衡点 P^* 是局部渐进稳定的.

定理 4 当 $R_0 > 1$ 时, 平衡点 $P^* = (S^*, E^*, I^*)$ 在正的不变集 T 内部 \bar{T} (即 $T - \{(S, E, I) | I = 0\}$) 是全局渐进稳定的.

证明 类似于文献 [23, 24] 中的证明方法, 令 $x = (S, E, I)$, 系统 (7) 式的向量形式表示为 $f(x)$, 则系统 (7) 式通用解的 Jacobian 矩阵 $J = \frac{\partial f}{\partial x}$ 为

$$J = \begin{bmatrix} -(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I(t)/L^2 - b & -b & -(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)S(t)/L^2 - b \\ (2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I(t)/L^2 & -\gamma & (2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)S(t)/L^2 \\ 0 & \gamma & -\omega \end{bmatrix}.$$

其二次加法复合矩阵 $J^{[2]}$ [25,26] 为

$$J^{[2]} = \begin{bmatrix} -(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)\frac{I(t)}{L^2} - b - \gamma & (2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)\frac{S(t)}{L^2} & (2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)\frac{S(t)}{L^2} + b \\ \gamma & -(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I(t)/L^2 - b - \omega & -b \\ 0 & (2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I(t)/L^2 & -\gamma - \omega \end{bmatrix}.$$

定义函数 $P(x) = (S, E, I) = \text{diag} \left\{ 1, \frac{E}{I}, \frac{E}{I} \right\}$, 用 f 表示系统 (7) 式的向量场, P_f 表示 P 沿着向量场 f 的方向导数, 则

$$P_f P^{-1} = \text{diag} \left\{ 0, \frac{I}{E} \left(\frac{E}{I} \right)_f, \frac{I}{E} \left(\frac{E}{I} \right)_f \right\} = \text{diag} \left\{ 0, \frac{\dot{E}}{E} - \frac{\dot{I}}{I}, \frac{\dot{E}}{E} - \frac{\dot{I}}{I} \right\}.$$

定义矩阵 $B = P_f P^{-1} + P J^{[2]} P^{-1}$ 的分块形式为 [23,24] $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$,

其中

$$B_{11} = [-(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I(t)/L^2 - b - \gamma],$$

$$B_{12} = \left[\left((2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)S(t)/L^2 \right) \frac{I}{E} \quad \left((2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)S(t)/L^2 + b \right) \frac{I}{E} \right],$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} E\gamma/I \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{E}}{E} - \frac{\dot{I}}{I} - (2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I(t)/L^2 - b - \omega & -b \\ (2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I(t)/L^2 & \frac{\dot{E}}{E} - \frac{\dot{I}}{I} - \gamma - \omega \end{bmatrix}.$$

设 $z = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ 空间, 定义 \mathbb{R}^3 空间的一种范数 $\|(u, v, w)\| = \max\{|u|, |v| + |w|\}$, 令 μ 表示此范数的 Lozinskii 测度, 则 $\mu(B) \leq \sup(g_1, g_2)$, 其中 $g_1 = \mu_1(B_{11}) + \|B_{12}\|, g_2 = \|B_{21}\| + \mu_1(B_{22})$, μ_1 是关于 l_1 向量范数的 Lozinskii 测度, 计算公式为 [23],

$$\mu_1(A) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|I + hA\|_1 - 1}{h} = \max_j \left(\text{Re } a_{jj} + \sum_{i, i \neq j} |a_{ij}| \right), \quad (10)$$

$\|B_{12}\|$ 和 $\|B_{21}\|$ 是相应于 l_1 向量范数的矩阵范数, 计算公式为 [27]

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \quad (11)$$

分别计算 $\mu_1(B_{11})$, $\|B_{12}\|$, $\|B_{21}\|$ 和 $\mu_1(B_{22})$. 则 $\mu_1(B_{11}) = -(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I(t)/L^2 - b - \gamma$, $\|B_{12}\| = ((2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)S(t)/L^2 + b)\frac{I}{E}$, $\|B_{21}\| = \frac{E\gamma}{I}$, $\mu_1(B_{22}) = \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \omega + \max\{-b, b - \gamma\}$.

从系统 (7) 式的第二、第三个方程可得

$$\frac{(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)SI}{L^2E} = \frac{E'}{E} + \gamma, \quad (12)$$

和

$$\frac{E\gamma}{I} = \frac{I'}{I} + \omega. \quad (13)$$

因此,

$$\begin{aligned} g_1 &= -(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I/L^2 - b - \gamma \\ &\quad + ((2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)S/L^2 + b)\frac{I}{E} \\ &= -(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I/L^2 - b + \frac{E'}{E} + \frac{bI}{E}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{E\gamma}{I} + \frac{\dot{E}}{E} - \frac{\dot{I}}{I} - \omega + \max\{-b, b - \gamma\} \\ &= \frac{\dot{E}}{E} + \max\{-b, b - \gamma\}. \end{aligned} \quad (15)$$

由 (14) 和 (15) 式可得

$$\begin{aligned} \mu(B) &\leq \max \left(-(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I/L^2 - b + \frac{\dot{E}}{E} \right. \\ &\quad \left. + \frac{bI}{E}, \frac{\dot{E}}{E} + \max\{-b, b - \gamma\} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

由于 $R_0 > 1$, 系统 (7) 式在 \bar{T} 中是一致持久的, 病毒持续在某个正水平之上, 因此存在常数 $c > 0$, $T > 0$, 使得 $t > T$ 时, $E(t) > c$, $I(t) > c$. 定义 $\bar{b} = \min \left\{ \frac{\gamma}{2}, \frac{c(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)}{L^2} \right\}$, 则当 $t > T$ 和 $b < \bar{b}$ 时, 有 $-b > b - \gamma$ 和 $\frac{bI}{E} - (2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)I/L^2 < 0$ 成立. 则

$$\mu(B) \leq \frac{\dot{E}}{E} - b. \quad (17)$$

对于 $t > T$ 和初值为 $(S(0), E(0), I(0)) \in K$ (K 是紧的吸收集) 的系统 (7) 式的每一个解,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t} \int_0^t \mu(B) ds \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^T \mu(B) ds + \frac{1}{t} \ln \frac{E(t)}{E(T)} - \bar{b} \frac{t-T}{t} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{-b}{2} < 0.$$

则

$$\bar{q}_2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(B) ds < 0. \quad (18)$$

由文献 [23] 的定理 3.3 可知, 地方病平衡点 $P^* = (S^*, E^*, I^*)$ 在 \bar{T} 上是全局渐进稳定的.

4 传播阈值分析与数值仿真

理论已证明, 病毒的基本再生数 $R_0 = 1$ 为病毒是否消除的阈值, 即当 $R_0 \leq 1$ 时, 网络中的病毒最终会消除, 系统全局渐进稳定在无病毒平衡点 P^0 ; 当 $R_0 > 1$, 网络中的病毒会持续存在, 系统全局渐进稳定在地方病平衡点 P^* . 为了验证理论分析的正确性, 我们从以下三个方面进行了传播阈值分析与数值仿真.

4.1 节点通信半径 r 的变化

令 $R_0 = \frac{(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)N}{\omega L^2} = 1$, 可以得到关于节点通信半径的病毒传播阈值 $r_c = \frac{1}{\lambda_2\pi} \left(-\lambda_1v + \sqrt{(\lambda_1^2v^2 + \lambda_2\pi\omega L^2)/N} \right)$, 即当 $r \leq r_c$ 时, $R_0 \leq 1$, 根据定理 2, 网络中的病毒会消除, 系统全局渐进稳定在无病毒平衡点 P^0 ; 当 $r > r_c$ 时, $R_0 > 1$, 根据定理 4, 网络中的病毒会持续存在, 系统稳定在地方病平衡点 P^* .

仿真参数分别为 $N = 1000$, $L = 10$, $v = 1$, $b = 0.1$, $\gamma = 0.8$, $\omega = 0.5$, $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.1$. 则 $r_c = 0.3403$, 系统状态初值 $S(0) = 800$, $E(0) = 0$, $I(0) = 200$, $R(0) = 0$, r 取不同值时的仿真结果如图 2 所示.

当 $r = 0.1 < r_c$ 和 $r = 0.3 < r_c$ 时, 由以上分析可知, 系统应全局渐进稳定在无病毒平衡点 $P^0(1000, 0, 0)$, 从图 2(a) 和图 2(b) 可知, 仿真结果与理论分析一致.

当 $r = 0.5 > r_c$ 和 $r = 1 > r_c$ 时, 由以上分析可知, 系统应分别全局渐进稳定在地方病平衡点 $P^*(507, 46, 74)$ 和 $P^*(141, 81, 130)$, 从图 2(c) 和图 2(d) 可知, 仿真结果与理论分析一致. 另外, 从图 2 的仿真结果还可以看出, 随着节点通信半径的增加, 病毒爆发的可能性增大, 病毒的传播规模增加.

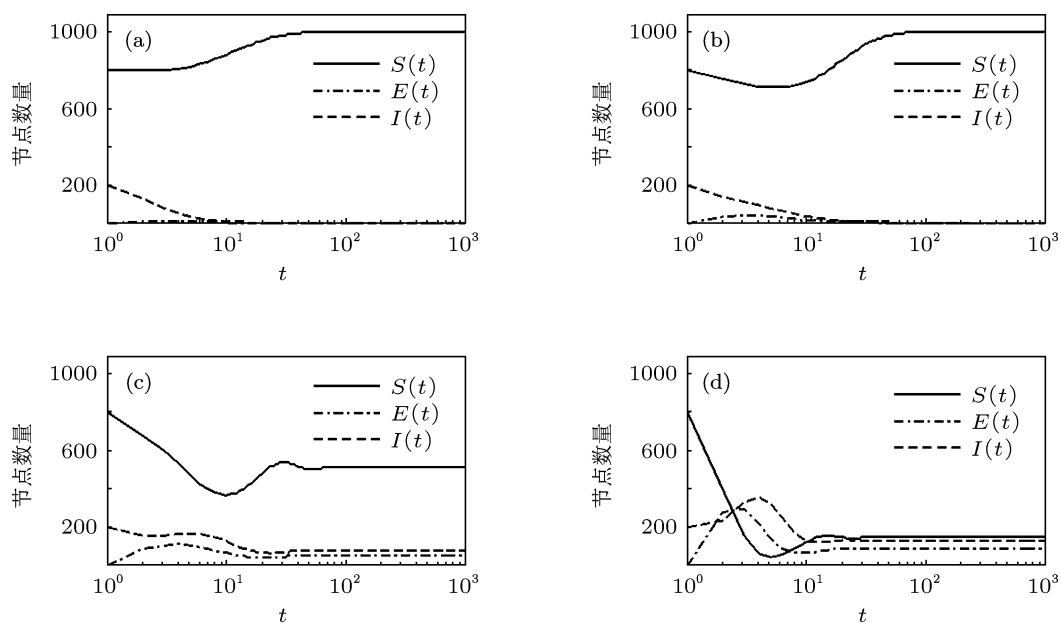


图2 不同通信半径的仿真结果 (a) $r = 0.1$; (b) $r = 0.3$; (c) $r = 0.5$; (d) $r = 1$

4.2 节点密度 ρ 的变化

令 $R_0 = \frac{(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)N}{\omega L^2} = \frac{(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)\rho}{\omega} = 1$, 可以得到关于节点密度 ρ 的病毒传播阈值 $\rho_c = \frac{\omega}{(2\lambda_1rv + \lambda_2\pi r^2)}$. 即当 $\rho \leq \rho_c$ 时, $R_0 \leq 1$, 根据定理 2, 网络中的病毒消除, 系统全局渐进稳定在无病毒平衡点 P^0 ;

当 $\rho > \rho_c$ 时, $R_0 > 1$, 根据定理 4, 网络中的病毒会持续存在, 系统稳定在地方病平衡点 P^* .

仿真参数分别为 $N = 1000, v = 1, b = 0.1, \gamma = 0.8, \omega = 0.5, r = 0.5, \lambda_1 = 0.02, \lambda_2 = 0.1$, 则 $\rho_c = 5.0741$, 系统状态初值 $S(0) = 800, E(0) = 0, I(0) = 200, R(0) = 0$. 分别取 $L = 25, 15, 10, 5$, 对应的 $\rho = N/L^2 = 1.6, 4.4, 10, 40$, 仿真结果如图 3 所示.

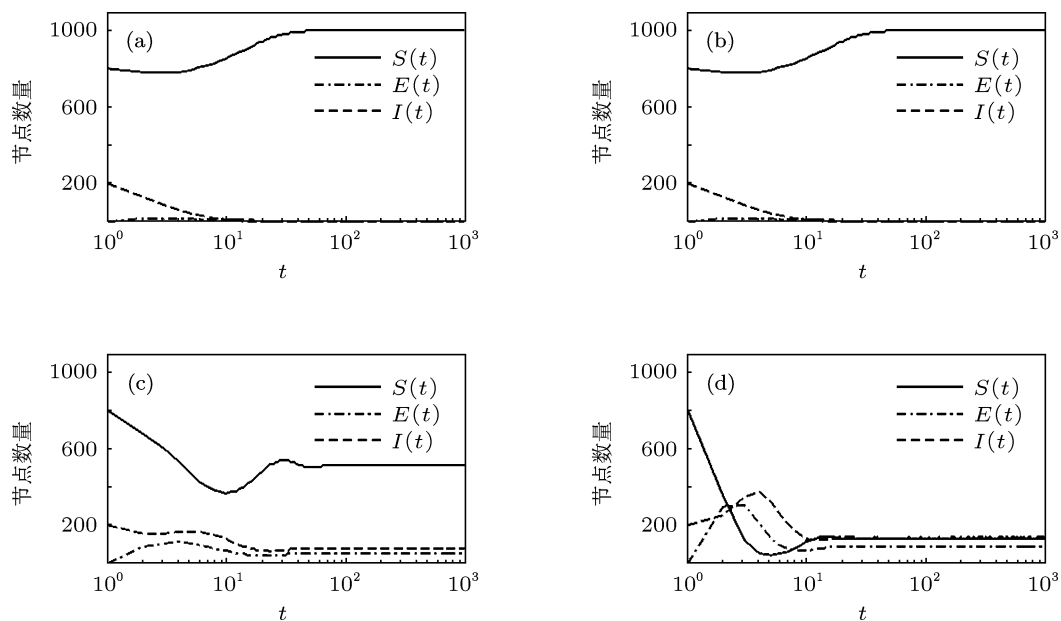


图3 不同节点密度的仿真结果 (a) $\rho = 1.6$; (b) $\rho = 4.4$; (c) $\rho = 10$; (d) $\rho = 40$

当 $\rho = 1.6 < \rho_c$ 和 $\rho = 4.4 < \rho_c$ 时, 由以上分析可知, 系统应全局渐进稳定在无病毒平衡点 $P^0(1000, 0, 0)$, 从图 3(a) 和图 3(b) 可知, 仿真结果与理论分析一致.

当 $\rho = 10 > \rho_c$ 和 $\rho = 40 > \rho_c$, 由以上分析可知, 系统应分别全局渐进稳定在地方病平衡点 $P^*(507, 46, 74)$ 和 $P^*(127, 82, 132)$, 从图 3(c) 和图 3(d) 可知, 仿真结果与理论分析一致. 另外, 从图 3 的仿真结果还可以看出, 随着节点密度 ρ 的增加, 病毒爆发的可能性增大, 病毒的传播规模增加.

4.3 节点移动速度 v 的变化

因为 $v \geq 0$, 当 $\frac{\lambda_2 \pi r^2 N}{\omega L^2} > 1$ 时, 可知 $R_0 = \frac{(2\lambda_1 r v + \lambda_2 \pi r^2) N}{\omega L^2} \geq \frac{\lambda_2 \pi r^2 N}{\omega L^2} > 1$. 根据定理 4 可知, 无论 v 取任何非负值, 网络中病毒都会持续存在, 系统全局渐进稳定在 P^* 平衡点, 即 v 的值不影响病毒是否从网络中消除. 当 $\frac{\lambda_2 \pi r^2 N}{\omega L^2} < 1$ 时, 令 $R_0 = 1$, 则可得关于节点移动速度的病毒传播阈值 $v_c = \frac{\omega L^2}{2r\lambda_1 N} \left(1 - \frac{\lambda_2 \pi r^2 N}{\omega L^2}\right)$. 即当 $v \leq v_c$ 时, 则 $R_0 \leq 1$, 根据定理 2 可知, 系统将全局渐进稳定在平衡点 P^0 ; 当 $v > v_c$ 时, $R_0 > 1$, 根据定理 4 可

知, 系统将全局渐进稳定在 P^* 平衡点.

选取仿真参数分别为 $N = 1000, L = 10, r = 0.5, b = 0.1, \gamma = 0.8, \omega = 0.5, \lambda_1 = 0.01, \lambda_2 = 0.1$, 则 $\frac{\lambda_2 \pi r^2 N}{\omega L^2} = 1.5708 > 1$. 由以上分析可知, v 取任何值时, 系统都将全局渐进稳定在 P^* . 当系统状态初值为 $S(0) = 800, E(0) = 0, I(0) = 200, R(0) = 0$, 节点移动速度分别为 $v = 0.1$ 和 $v = 10$ 时, 系统应分别全局渐进稳定在平衡点 $P^*(629, 35, 56)$ 和 $P^*(280, 68, 109)$. 其仿真结果分别如图 4(a) 和图 4(b) 所示. 显然, 仿真结果与理论分析一致. 另外, 从图 4(a) 和图 4(b) 还可以看出, 其他参数一致的情况下, 节点的运动速度增大, 病毒的传播规模将增加.

选取仿真参数分别为 $N = 1000, L = 15, r = 0.5, b = 0.1, \gamma = 0.8, \omega = 0.5, \lambda_1 = 0.01, \lambda_2 = 0.1$, 则 $\frac{\lambda_2 \pi r^2 N}{\omega L^2} = 0.6981 < 1$. 由以上分析可知, 存在关于节点移动速度的病毒传播阈值 v_c , 且 $v_c = 3.3964$. 当系统状态初值为 $S(0) = 800, E(0) = 0, I(0) = 200, R(0) = 0$, 节点移动速度分别取 $v = 2 < v_c$ 和 $v = 8 > v_c$ 时, 系统应分别全局渐进稳定在平衡点 $P^0(1000, 0, 0)$ 和 $P^*(710, 27, 44)$. 其仿真结果分别如图 4(c) 和图 4(d) 所示. 显然, 仿真结果与理论分析一致.

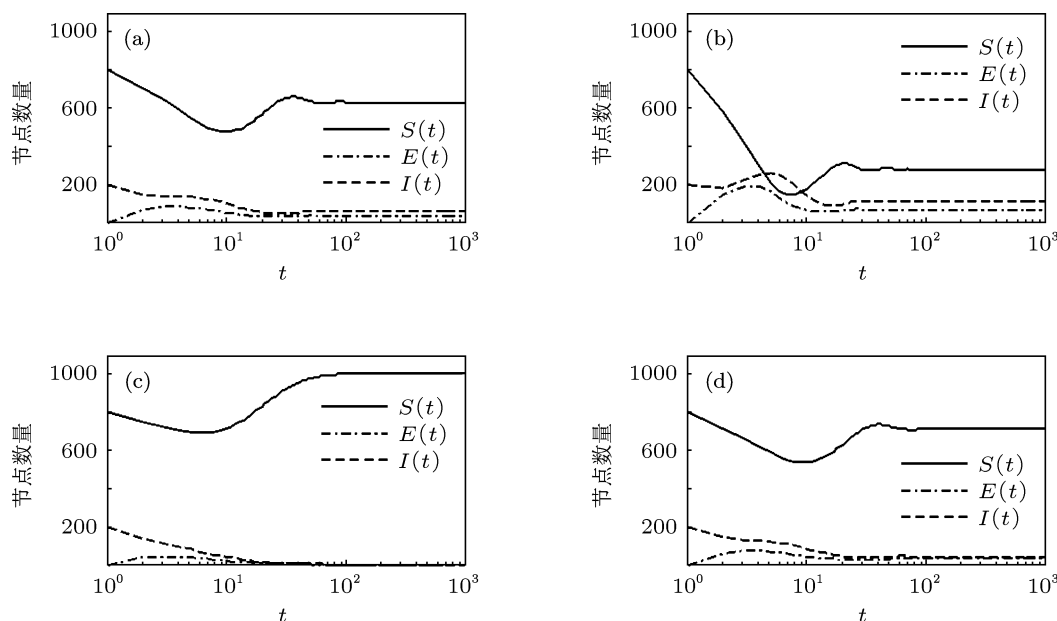


图 4 不同移动速度的仿真结果 (a) $v = 0.1$; (b) $v = 10$; (c) $v = 2$; (d) $v = 8$

5 结论

本文研究了移动环境下的网络病毒传播问题,提出了一个移动环境下的网络 SEIRS 病毒传播模型. 利用下一代生成矩阵的方法,求得病毒基本再生数 R_0 ,从微分动力学系统的观点,研究了系统平衡点的存在性及系统平衡点的全局渐进稳定性. 理论分析表明,系统总存在一无病毒平衡点,

当 $R_0 > 1$ 时,系统还存在一地方病平衡点. 理论还证明当 $R_0 \leq 1$ 时,网络中的病毒最终消除,系统全局渐进稳定在无病毒平衡点,当 $R_0 > 1$ 时,网络中的病毒持续存在,系统全局渐进稳定在地方病平衡点. 最后基于 R_0 讨论了关于节点通信半径、节点密度和节点移动速度的病毒传播阈值问题,并仿真验证了所得结论的正确性. 本文的研究为预防和控制移动环境下的网络病毒传播提供了理论基础.

-
- [1] Zhou T, Liu J G, Bai W J, Chen G R, Wang B H 2006 *Phys. Rev. E* **74** 056109
- [2] Song Y R, Jiang G P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7546 (in Chinese) [宋玉蓉, 蒋国平 2010 物理学报 **59** 7546]
- [3] Wu Q C, Fu X C, Yang M 2011 *Chin. Phys. B* **20** 046401
- [4] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. E* **63** 066117
- [5] Castellano C, Pastor-Satorras R 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 218701
- [6] Wang Y, Zheng Z G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4421 (in Chinese) [王延, 郑志刚 2009 物理学报 **58** 4421]
- [7] Shi H J, Duan Z S, Chen G R 2008 *Physica A* **387** 2133
- [8] Wang Y Q, Jiang G P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6734 (in Chinese) [王亚奇, 蒋国平 2010 物理学报 **59** 6734]
- [9] Ball F G, Knock E S, O'Neill P D 2008 *Math. Biosci.* **216** 100
- [10] Wang J Z, Liu Z R, Xu J H 2007 *Physica A* **382** 715
- [11] Zhang H F, Fu X C 2009 *Nonlinear Anal.: Theor. Meth. Appl.* **70** 3273
- [12] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. E* **65** 036134
- [13] Madar N, Kalisky T, Cohen R, Been-Avraham, Havlin S 2004 *Eur. Phys. J. B* **38** 269
- [14] Peng C B, Jin X G, Shi M X 2010 *Physica A* **389** 549
- [15] Wang L, Zhu C P 2010 *Phys. Proc.* **3** 1819
- [16] Wang P, Gonzalez M C, Hidalgo C A, Barabasi A L 2009 *Science* **324** 1071
- [17] Buscarino A, Fortuna L, Frasca M, Latora V 2008 *Euro. Phys. Lett.* **82** 38002
- [18] Frasca M, Buscarino A, Rizzo A, Fortuna L, Boccaletti S 2006 *Phys. Rev. E* **74** 036110
- [19] Gonzalez M C, Herrmann H J 2004 *Physica A* **340** 741
- [20] Rhodes C J, Nekovee M 2008 *Physica A* **387** 6837
- [21] Yang H X, Wang W X, Xie Y B, Lai Y C, Wang B H 2011 *Phys. Rev. E* **83** 016102
- [22] Van den Driessche P, Watmough J 2002 *Math. Biosci.* **180** 29
- [23] Li M Y, Smith H L, Wang L 2001 *SIAM J. Appl. Math.* **62** 58
- [24] Li M Y, Muldowney J S 1996 *SIAM J. Math. Anal.* **27** 1070
- [25] Martin Jr R H 1974 *J. Math. Anal. Appl.* **45** 432
- [26] Muldowney J S 1990 *Rocky Mountain J. Math.* **20** 857
- [27] Xiang H J 2005 *Appl. Math. J. Chin. Univ. Ser. A* **20** 284 (in Chinese) [向红军 2005 高校应用数学学报 A 辑 **20** 284]

Epidemic spreading model and stability of the networks in mobile environment*

Gong Yong-Wang¹⁾³⁾ Song Yu-Rong²⁾ Jiang Guo-Ping^{2)†}

1) (College of Computer, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

2) (College of Automation, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

3) (School of Information Engineering, Yancheng Institute of Technology, Yancheng 224051, China)

(Received 18 July 2011; revised manuscript received 26 September 2011)

Abstract

In this paper, considering the random motion of nodes, we propose an epidemic spreading model on network of mobile environment based on the mean-field theory. Using the theory of differential dynamical system, the behaviors of epidemic spreading are further analyzed. It is shown that if $R_0 \leq 1$, the epidemic always dies out and the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable; and if $R_0 > 1$, the epidemic is uniformly persistent and the endemic equilibrium is globally asymptotically stable. Numerical simulations are given to validate the results of theoretical analysis.

Keywords: mobile environment, epidemic spreading model, asymptotically stability

PACS: 02.50.-r, 05.65.+b

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60874091), the Six Projects Sponsoring Talent Summits of Jiangsu Province, China (Grant No. SJ209006), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20103223110003), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2010526), and the Graduate Student Innovation Research Project of Jiangsu Province, China (Grant Nos. CXLX11.0417, CXLX11.0403).

† E-mail: jianggp@njupt.edu.cn