厄米多项式算符的新恒等式及其在量子压缩中的应用*

范洪义 展德会† 于文健 周军

(中国科学技术大学材料科学与工程系, 合肥 230026)

(2011 年 7 月 28 日收到; 2011 年 9 月 3 日收到修改稿)

通过发现有关厄米多项式算符 $\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X})$ 的恒等式, 并结合有序算符内的积分技术, 得到了一些关于量子压缩的算符新恒等式, 这对于研究压缩粒子数态波函数十分有用.

关键词: 有序算符内的积分, 厄米多项式, 压缩算符

PACS: 03.65.Ta

1 引 言

量子压缩是量子力学和量子光学中的重要研究领域 [1−4]. 量子压缩效应主要通过场的正交分量的压缩变换表现出来, 通常我们定义压缩变换为

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}^{-1} = \mu\boldsymbol{X},\quad \boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{\dagger}}{\sqrt{2}}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^{\dagger}$ 分别为光子的湮灭和产生算符,

$$\boldsymbol{S} = \exp\left[\frac{\lambda}{2}(\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{a}^{+2})\right]$$

为压缩算符, $\mu = \mathrm{e}^{\lambda}$ 为压缩系数. 本文将用有关厄米多项式算符 $\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X})$ 的新恒等式来研究量子压缩, 另外结合有序算符内的积分 (IWOP) 技术 [5−10], 得到了一些关于量子压缩的算符恒等式, 为研究压缩粒子数态波函数提供了一种简单易行的方法; 同时结合 IWOP 技术得到并验证了一些新的积分公式; 最后进一步推导出较为复杂的包括厄米算符多项式与压缩算符的新恒等式, 并给出其在研究压缩粒子数态中的应用.

2 一些基本的厄米多项式算符恒等式的简洁推导

厄米多项式可以通过其母函数来定义:

$$\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathrm{H}_n(x) = \mathrm{e}^{2tx-t^2}. \tag{2}$$

对于指数算符 $\mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{X}}$ 我们可以利用 Baker-Hausdorff 公式得到

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{X}} &= :\mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{X}}:\mathrm{e}^{\lambda^2/4} =: \mathrm{e}^{\lambda^2/4-\lambda\boldsymbol{X}}:\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\lambda/2)^n}{n!}:\mathrm{H}_n(\mathrm{i}\boldsymbol{X}):,\end{aligned} \tag{3}$$

其中 “: :” 代表正规乘积排列. 另一方面, 由幂级数展开公式得到

$$\mathrm{e}^{-\lambda\boldsymbol{X}} = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\frac{(-\lambda\boldsymbol{X})^n}{n!}. \tag{4}$$

比较 (3) 和 (4) 式, 可以得到算符恒等式

$$\boldsymbol{X}^n = (2\mathrm{i})^{-n}:\mathrm{H}_n(\mathrm{i}\boldsymbol{X}):, \tag{5}$$

这是 $\boldsymbol{X}^n$ 的正规乘积形式的表达式. 另外也可以换

* 国家自然科学基金 (批准号: 10874174) 和高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20070358009) 资助的课题.

† E-mail: dhzhan@mail.ustc.edu.cn

一种方式展开:

$$\mathrm{e}^{-\lambda \boldsymbol{X}} = \mathrm{e}^{\lambda^2/4}\,\mathrm{e}^{-\lambda^2/4-\lambda\boldsymbol{X}} = \mathrm{e}^{\lambda^2/4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{2^n n!}\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X}), \tag{6}$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda \boldsymbol{X}} = :\,\mathrm{e}^{\lambda^2/4-\lambda\boldsymbol{X}}\,: = \mathrm{e}^{\lambda^2/4}\sum_{n=0}^{\infty}:\frac{(-\lambda\boldsymbol{X})^n}{n!}:. \tag{7}$$

比较两者得到另一算符恒等式

$$\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X}) = 2^n : \boldsymbol{X}^n :. \tag{8}$$

作为一个应用, 将 $\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X})$ 作用于真空态 $|0\rangle$ 得到

$$\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X})\,|0\rangle = 2^n : \boldsymbol{X}^n : |0\rangle = \sqrt{2^n}\boldsymbol{a}^{\dagger n}\,|0\rangle = \sqrt{n!}\sqrt{2^n}\,|n\rangle, \tag{9}$$

其中 $|n\rangle = \dfrac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ 是粒子数态. 所以可见粒子数态的波函数 $\langle x|n\rangle$ 正比于 $\mathrm{H}_n(x)$, 即

$$\langle x|\,\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X})\,|0\rangle = \sqrt{n!}\sqrt{2^n}\,\langle x|n\rangle = \mathrm{H}_n(x)\,\langle x|0\rangle. \tag{10}$$

结合坐标表象完备性的正规乘积内的高斯型表达式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x : \mathrm{e}^{-(x-\boldsymbol{X})^2} : = 1. \tag{11}$$

用 IWOP 技术同样有

$$\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X}) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathrm{H}_n(x)\,|x\rangle\langle x| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathrm{H}_n(x) : \mathrm{e}^{-(x-\boldsymbol{X})^2} : = 2^n : \boldsymbol{X}^n :. \tag{12}$$

这证明了 (8) 式的正确性. 由 (11) 式和 IWOP 技术还可验证 (5) 式的正确性:

$$\boldsymbol{X}^n = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x x^n\,|x\rangle\langle x| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x : \mathrm{e}^{-(x-\boldsymbol{X})^2} : x^n = (2\mathrm{i})^{-n} : \mathrm{H}_n(\mathrm{i}\boldsymbol{X}). \tag{13}$$

根据 (1) 式和 Baker-Hausdorff 公式, 可以进一步得到算符恒等式

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_n(f\boldsymbol{X}) &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\mathrm{e}^{2tf\boldsymbol{X}-t^2}\Big|_{t=0}\\ &= (1-f^2)^{n/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(\sqrt{1-f^2}t)^n} : \mathrm{e}^{2t\sqrt{1-f^2}\frac{f\boldsymbol{X}}{\sqrt{1-f^2}}-\left(t\sqrt{1-f^2}\right)^2} : \Big|_{t=0}\\ &= (1-f^2)^{n/2} : \mathrm{H}_n\left[\frac{f}{\sqrt{1-f^2}}\boldsymbol{X}\right] : \\ &\quad (f\neq 1).\end{aligned} \tag{14}$$

由完备性的展开式 (11) 式又可得

$$\mathrm{H}_n(f\boldsymbol{X}) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x|\,\mathrm{H}_n(fx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x : \mathrm{e}^{-(x-\boldsymbol{X})^2} : \mathrm{H}_n(fx). \tag{15}$$

将 (14) 式与 (15) 式相比较 (实际上并未直接做积分计算), 可以得到一个积分公式

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{H}_n(fx) = (1-f^2)^{n/2}\mathrm{H}_n\left[\frac{fy}{\sqrt{1-f^2}}\right]. \tag{16}$$

(16) 式通过变量代换得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{\frac{-(x-y)^2}{2\mu}}\mathrm{H}_n(x) = \sqrt{2\pi\mu}(1-2\mu)^{n/2}\mathrm{H}_n\left[y(1-2\mu)^{-1/2}\right]. \tag{17}$$

类似地, 可以得到 $\mathrm{H}_n(f\boldsymbol{X})$ 的反正规乘积 (记为 $\vdots\ \vdots$) 形式的展开公式为

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_n(f\boldsymbol{X}) &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\mathrm{e}^{2tf\boldsymbol{X}-t^2}|_{t=0}\\ &= (1+f^2)^{n/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(\sqrt{1+f^2}t)^n}\vdots\,\mathrm{e}^{2t\sqrt{1+f^2}\frac{f\boldsymbol{X}}{\sqrt{1+f^2}}-(t\sqrt{1+f^2})^2}\vdots|_{t=0}\\ &= (1+f^2)^{n/2}\vdots\,\mathrm{H}_n\left(\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\boldsymbol{X}\right)\vdots.\end{aligned} \tag{18}$$

特别地, 当 $f=1$ 时, 有

$$\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X}) = 2^{n/2}\vdots\,\mathrm{H}_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\vdots. \tag{19}$$

而反正规乘积展开 $\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{X}}$ 得

$$\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{X}} = \vdots\,\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{X}}\vdots\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4}} = \vdots\,\mathrm{e}^{-\lambda^2/4+\lambda\boldsymbol{X}}\vdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda/2)^n}{n!}\vdots\,\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X})\vdots. \tag{20}$$

于是又有恒等式

$$\boldsymbol{X}^n = (1/2)^n\vdots\,\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X})\vdots. \tag{21}$$

结合相干态 $|z\rangle$ 的完备性

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}|z\rangle\langle z| = \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} :\mathrm{e}^{-|z|^2+z\boldsymbol{a}^++z^*\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^+\boldsymbol{a}}: =1,$$

得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}^n =&(1/2)^n \vdots \mathrm{H}_n(\boldsymbol{X})\vdots\\ =&(1/2)^n\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}|z\rangle\langle z|\mathrm{H}_n\left(\frac{z+z^*}{\sqrt{2}}\right)\\ =&(1/2)^n\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\mathrm{H}_n\left(\frac{z+z^*}{\sqrt{2}}\right)\\ &:\mathrm{e}^{-|z|^2+z\boldsymbol{a}^++z^*\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^+\boldsymbol{a}}:. \end{aligned}\tag{22}$$

比较 (21) 和 (22) 式, 并利用 (5) 式得

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\mathrm{H}_n\left(\frac{z+z^*}{\sqrt{2}}\right):\mathrm{e}^{-|z|^2+z\boldsymbol{a}^++z^*\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^+\boldsymbol{a}}:\\ =&(\mathrm{i})^{-n}:\mathrm{H}_n(\mathrm{i}\boldsymbol{X}):.\end{aligned}\tag{23}$$

这又暗示了一个新的积分公式

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\mathrm{H}_n\left(\frac{z+z^*}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{e}^{-|z|^2+zx+z^*y}\\ =&(\mathrm{i})^{-n}\mathrm{H}_n\left(\mathrm{i}\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{e}^{xy}.\end{aligned}\tag{24}$$

现在我们利用厄米多项式算符恒等式来求 $\mathrm{e}^{2t\sqrt{g}\boldsymbol{X}-g\boldsymbol{X}^2}$ 的正规乘积形式:

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{2t\sqrt{g}\boldsymbol{X}-g\boldsymbol{X}^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{g}\boldsymbol{X})^n}{n!}\mathrm{H}_n(t)\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}(2\mathrm{i})^{-n}\frac{(\sqrt{g})^n}{n!}:\mathrm{H}_n(\mathrm{i}\boldsymbol{X}):\mathrm{H}_n(t)\\ =&\frac{1}{\sqrt{1+g}}:\exp\left[\frac{g(t^2-\boldsymbol{X}^2)+2\sqrt{g}t\boldsymbol{X}}{1+g}\right]:,\end{aligned}\tag{25}$$

其中用了公式

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n!}:\mathrm{H}_n(x_1):\mathrm{H}_n(x_2)\\ =&\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\exp\left[\frac{t^2(x_1^2+x_2^2)-2tx_1x_2}{t^2-1}\right].\end{aligned}\tag{26}$$

可以用 IWOP 技术来验证 (25) 式:

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{2t\sqrt{g}\boldsymbol{X}-g\boldsymbol{X}^2}\\ =&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{2t\sqrt{g}x-gx^2}:\mathrm{e}^{-(x-\boldsymbol{X})^2}:\\ =&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x:\mathrm{e}^{-(g+1)x^2+(2t\sqrt{g}+2\boldsymbol{X})x-\boldsymbol{X}^2}:\\ =&\frac{1}{\sqrt{1+g}}:\exp\left[\frac{g(t^2-\boldsymbol{X}^2)+2\sqrt{g}t\boldsymbol{X}}{1+g}\right]:,\end{aligned}\tag{27}$$

这与 (25) 式相一致. 将 $\mathrm{e}^{2t\sqrt{g}\boldsymbol{X}-g\boldsymbol{X}^2}$ 作用于真空态, 得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{2t\sqrt{g}\boldsymbol{X}-g\boldsymbol{X}^2}|0\rangle\\ =&\frac{1}{\sqrt{1+g}}\exp\left[\frac{g(t^2-\frac{\boldsymbol{a}^{+2}}{2})+\sqrt{2g}t\boldsymbol{a}^+}{1+g}\right]|0\rangle.\end{aligned}\tag{28}$$

这是一个压缩-平移相干态. 可见以上的厄米多项式算符恒等式对于研究量子压缩确实有用.

3 由新的厄米多项式算符恒等式推导压缩粒子数态函数

压缩算符在坐标表象中的表达式为 [11]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(\mu)=&\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x/\mu\rangle\langle x|\\ =&\sqrt{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle\langle \mu x|,\end{aligned}\tag{29}$$

令

$$|x\rangle=\pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}x\boldsymbol{a}^+-\frac{\boldsymbol{a}^{+2}}{2}\right)|0\rangle,$$

$$|0\rangle\langle 0|=:\exp(-\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}):,$$

由 (17) 式得

$$\begin{aligned}&S(\mu)\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X})S(\nu)\\ =&\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\mu}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x/\mu\rangle\langle x|\mathrm{H}_n(x)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\,|x'\rangle\langle x'\nu|\\ =&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\nu}\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi\mu}}\mathrm{H}_n(x):\exp\left[-\frac{x^2}{2}\frac{\mu^2\nu^2+1}{\mu^2}\right.\\ &\left.+\sqrt{2}\frac{x\boldsymbol{a}^+}{\mu}+\sqrt{2}\nu x\boldsymbol{a}-\frac{\boldsymbol{a}^{+2}}{2}-\frac{\boldsymbol{a}^2}{2}-\boldsymbol{a}^+\boldsymbol{a}\right]:\\ =&\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi\mu}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathrm{H}_n(x):\exp\left[-\frac{1}{2\frac{\mu^2}{1+\mu^2\nu^2}}\right.\\ &\times\left(x-\frac{\sqrt{2}\mu\boldsymbol{a}^++\sqrt{2}\nu\mu^2\boldsymbol{a}}{1+\mu^2\nu^2}\right)^2\\ &\left.+\frac{(1-\mu^2\nu^2)}{2(1+\mu^2\nu^2)}(\boldsymbol{a}^{+2}-\boldsymbol{a}^2)-\frac{(1-\mu\nu)^2}{1+\mu^2\nu^2}\boldsymbol{a}^+\boldsymbol{a}\right]:\\ =&\sqrt{\frac{2\nu\mu}{1+\mu^2\nu^2}}\left(1-\frac{2\mu^2}{1+\mu^2\nu^2}\right)^{n/2}\\ &:\mathrm{H}_n\left[\frac{\sqrt{2}(\frac{\boldsymbol{a}^+}{\nu}+\mu\boldsymbol{a})}{\sqrt{(\frac{1}{\nu\mu}+\nu\mu)(\frac{1}{\nu\mu}+\frac{\mu}{\nu}(\nu^2-2))}}\right]\\ &\times\exp\left[\frac{(1-\mu^2\nu^2)}{2(1+\mu^2\nu^2)}(\boldsymbol{a}^{+2}-\boldsymbol{a}^2)\right.\end{aligned}$$

$$-\frac{(1-\mu\nu)^2}{1+\mu^2\nu^2}\boldsymbol{a}^+\boldsymbol{a}\bigg]:, \tag{30}$$

这是一个新的恒等式. 下面我们讨论几种特殊情况. 当 $\mu=1/\nu$, $\boldsymbol{S}(\nu)=\boldsymbol{S}^{-1}(\mu)$ 时, (29) 式变为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{S}(\mu)\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X})\boldsymbol{S}^{-1}(\mu)\\
=&(1-\mu^2)^{n/2}:\mathrm{H}_n\left[\frac{\mu\boldsymbol{X}}{\sqrt{1-\mu^2}}\right]:\\
=&\mathrm{H}_n(\mu\boldsymbol{X}).
\end{aligned} \tag{31}$$

这与 (15) 式的结果一致. 当 $\nu=1$ 时, 由

$$\frac{2\mu}{1+\mu^2}=\operatorname{sech}\lambda,\quad \frac{\mu^2-1}{1+\mu^2}=\tanh\lambda,\quad \mu=\mathrm{e}^{\lambda},$$

(30) 式可化简为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{S}(\mu)\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X})\\
=&(-\tanh\lambda)^{n/2}\operatorname{sech}^{1/2}\lambda\\
&:\mathrm{H}_n\left(\frac{\boldsymbol{a}^\dagger+\mu\boldsymbol{a}}{\sqrt{-\sinh 2\lambda}}\right)\exp\left[\frac{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}^{+2}\tanh\lambda}{2}\right.\\
&\left.-(1-\operatorname{sech}\lambda)\boldsymbol{a}^+\boldsymbol{a}\right]:.
\end{aligned} \tag{32}$$

由 $\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X})|0\rangle=\sqrt{n!}\sqrt{2^n}|n\rangle$, 可以得到压缩粒子数态的表达式

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}(\mu)|n\rangle=&\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\boldsymbol{S}(\mu)\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X})|0\rangle\\
=&\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}(-\tanh\lambda)^{n/2}\operatorname{sech}^{1/2}\lambda\\
&\times\mathrm{H}_n\left[\frac{\boldsymbol{a}^\dagger}{\sqrt{-\sinh 2\lambda}}\right]\\
&\times\exp\left(\frac{-\tanh\lambda}{2}\boldsymbol{a}^{+2}\right)|0\rangle.
\end{aligned} \tag{33}$$

再利用相干态的超完备性以及 (17) 式, 可以得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}_n(\mu\boldsymbol{X})\,\mathrm{e}^{g\boldsymbol{a}^{+2}}\\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x|\,\mathrm{H}_n(\mu x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\,\mathrm{e}^{gz^{*2}}\langle z|\\
&\times\exp\left[-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}xz-\frac{z^2}{2}-\frac{|z|^2}{2}\right]\\
=&\frac{1}{\sqrt{\pi(1+2g)}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathrm{H}_n(\mu x)\\
&:\exp\left[\frac{-x^2-\frac{\boldsymbol{a}^2}{2}}{1+2g}+\left(\frac{\sqrt{2}\boldsymbol{a}}{1+2g}+\sqrt{2}\boldsymbol{a}^\dagger\right)x\right.\\
&\left.-\frac{\boldsymbol{a}^{+2}}{2}-\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}\right]:\\
=&\mathrm{e}^{g\boldsymbol{a}^{+2}}:\frac{1}{1+2g}[1-\mu^2(1+2g)]^{n/2}\\
&\times\mathrm{H}_n\left\{\frac{\mu[(2g+1)\boldsymbol{a}^\dagger+\boldsymbol{a}]}{\sqrt{2[1-\mu^2(2g+1)]}}\right\}.
\end{aligned} \tag{34}$$

这也是一个新的算符等式. 当 $g=-\tanh\lambda/2$ 时,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}_n(\mu X)\,\mathrm{e}^{g\boldsymbol{a}^{+2}}|0\rangle\\
=&\frac{1}{1+2g}[1-\mu^2(1+2g)]^{n/2}\\
&\times\mathrm{H}_n\left[\frac{\mu(2g+1)\boldsymbol{a}^\dagger}{\sqrt{2[1-\mu^2(2g+1)]}}\right]\mathrm{e}^{g\boldsymbol{a}^{+2}}|0\rangle\\
=&\operatorname{sech}^{1/2}(-\tanh\lambda)^{n/2}\mathrm{H}_n\left(\frac{\boldsymbol{a}^\dagger}{\sqrt{-\sinh 2\lambda}}\right)\\
&\times\exp\left(\frac{-\tanh\lambda}{2}\boldsymbol{a}^{+2}\right)|0\rangle,
\end{aligned} \tag{35}$$

这与 (33) 式一致.

4 结 论

我们用 IWOP 技术得到了一些关于厄米多项式的算符恒等式, 这对于研究压缩粒子数态波函数十分有用. 与此同时, 我们也得到了一些积分公式, 这些恒等式也可用于计算其他量子光场的性质.

[1] Song J, Fan H Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6806 (in Chinese) [宋军, 范洪义 2010 物理学报 **59** 6806]

[2] Fan H Y, Lu H L, Fan Y 2006 *Ann. Phys.* **321** 480

[3] Li W, Wang Y G, Yang B J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 024203 (in Chinese) [李巍, 王永钢, 杨伯君 2011 物理学报 **60** 024203]

[4] Liu X J, Zhao M Z, Liu Y M, Zhou B J, Peng Z H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3227 (in Chinese) [刘小娟, 赵明卓, 刘一曼, 周并举, 彭朝晖 2010 物理学报 **59** 3227]

[5] Fan H Y 1990 *Phys. Rev.* A **41** 1526

[6] Fan H Y, Cai B Z 1994 *Phys. Rev.* A **50** 3754

[7] Fan H Y 2000 *Commun. Theor. Phys.* **34** 149

[8] Jiang N Q, Zheng Y Z 2006 *Phys. Rev.* A **74** 012306

[9] Jiang N Q, Jin B Q, Zhang Y, Cai G C 2008 *EPL* **84** 14002

[10] Jiang N Q, Fan H Y, Hu Y L 2011 *J. Phys.* A: *Math. Theor.* **44** 195302

[11] Fan H Y, Klauder J R 1988 *J. Phys.* A: *Math. Theor.* **21** 725

New Hermite-polynomial-operator identities and their application in quantum squeezing*

Fan Hong-Yi Zhan De-Hui† Yu Wen-Jian Zhou Jun

(*Department of Material Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026*, China*)

(Received 28 July 2011; revised manuscript received 3 September 2011)

Abstract

By introducing the Hermite-polynomial-operator $\mathrm{H}_n(\boldsymbol{X})$, where $\boldsymbol{X}$ is the coordinate operator (or the quadrature operator in quantum optics theory), and combining the technique of integration within an ordered product of operators, we derive some new operator identities about quantum squeezing, which are useful for studying the squeezed number state.

Keywords: integration within an ordered product, Hermite-polynomial, squeezing operator.

PACS: 03.65.Ta

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.10874174) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20070358009).

† E-mail: dhzhan@mail.ustc.edu.cn