

厄尔尼诺和南方涛动海气耦合模型中 参数估计的变分方法*

宋君强 曹小群[†] 张卫民 朱小谦

(国防科学技术大学计算机学院, 长沙 410073)

(2011年8月18日收到; 2011年9月27日收到修改稿)

提出一种基于变分原理估计厄尔尼诺和南方涛动海气耦合模型中未知参数的方法. 首先将所研究的非线性海气耦合动力方程引入到目标泛函中; 接着利用变分方法导出伴随方程和待辨识参数泛函梯度的公式; 然后设计了估计未知参数的算法. 数值试验结果表明变分方法是一种能有效估计海气耦合非线性系统未知参数的方法.

关键词: 海气耦合模型, 参数估计, 极限环, 变分方法

PACS: 04.20.Fy, 31.15.xt, 92.10.am

1 引言

厄尔尼诺和南方涛动 (ENSO) 是分别发生在热带大气和海洋中的异常事件, 是与赤道太平洋海气相互作用相关的循环气候现象. ENSO 事件的发生严重影响了全球各地区气候生态变化、全球经济发展和人类生活等, 甚至带来许多灾害. 因此, 国内外科学家用不同方法对 ENSO 的局部和整体性态进行了多方位的研究^[1-12]. 相对于复杂全球海气耦合模式, 振子模型能简化和刻画海气两种介质相互作用的本质物理过程, 从而成功研究 ENSO 的物理机理, 并模拟出与 ENSO 有关的气候现象. 例如, 莫嘉琪等分别利用何吉欢提出的变分迭代算法 (VIM)^[13,14]、广义变分迭代方法 (GVIM)^[15] 和同伦摄动方法 (HPM)^[16,17] 对多个 ENSO 振子系统进行了研究, 并获得它们的高精度近似解析解^[9-12]; Wang 等^[5] 通过数学推导和物理简化建立了一个描述 ENSO 事件的海气振荡子的随机动力学模式; 封国林等^[6-8] 进一步证明了 Wang 模式必含有惟一的极限环解, 且代表一个内在的耦合系统的年际振荡子.

海气振子系统中许多重要物理参数都是随时间变化和可调的, 如何根据某个时期的历史观测资料合理确定 ENSO 模型中的未知参数是一个重要问题, 对 ENSO 动力学机理的认识具有重要意义. 目前国内外有关的工作主要有: Campbell^[18] 使用贝叶斯多级方法对 ENSO 单个时滞振子方程中的未知参数进行了估计, 并对 ENSO 事件进行预报, 结果令人鼓舞; Burgers 等^[19] 通过对观测数据进行线性拟合估计了 ENSO 再激励振子系统参数, 提高了对 ENSO 现象的解释; 杜华栋等^[20,21] 利用变分资料同化方法对一个典型的 ENSO 动力学模式中的参数和外界强迫的反演进行了理论推导和数值试验. 理论上, ENSO 系统的参数估计问题是动力系统研究中典型的反问题, 与正问题不同, 它是通过观测数据来反求模型中不可测的未知参数. 由于测量信息的不准确、不充分和系统自身的非线性等性质, 导致反问题的求解通常是不适定的^[22]. 因此海气耦合动力系统参数估计问题的求解需要采用特殊方法^[18-21]. 本文提出一种估计 ENSO 非线性系统未知参数的变分方法. 首先利用 Lagrange 乘子将所研究的 ENSO 动力系统控制方程引入到目标泛函中, 将以微分方程组为约束的最优化问题

* 国家自然科学基金 (批准号: 41105063, 61070041) 资助的课题.

[†] E-mail: caoxiaoqun@nudt.edu.cn

转换为无约束最优化问题;接着利用变分原理导出需要的伴随方程和目标泛函关于待辨识参数的梯度;然后给出变分方法估计未知参数的算法流程;最后通过数值试验结果证明该方法具有较高的估计精度,同时具有较好的抗噪声性能.需要说明的是,文中主要使用 Lagrange 乘子来解决问题,但 He 等^[23-26]指出,在识别复杂系统的 Lagrange 乘子时, Lagrange 乘子是独立变分的,而在识别后它却是其他变量的函数,容易产生临界变分.何氏半反推方法 (semi-inverse method) 可以克服临界变分现象,已经成功应用在众多领域^[23-28].因此,如何采用半反推方法取得更好的效果是以后需要进一步开展的工作.

2 问题描述

考虑如下描述海表温度 (SST) 距平和温跃层厚度距平的 ENSO 事件动力模型^[6-8,12]:

$$\begin{aligned} \frac{dT_s}{dt} &= CT_s + Dh - \varepsilon T_s^3, \quad T_s|_{t=0} = T_0, \\ \frac{dh}{dt} &= -ET_s - R_h h, \quad h|_{t=0} = h_0. \end{aligned} \quad (1)$$

其中 T_s 表示赤道东太平洋的 SST 距平,它描述了海洋混合层的热力学变化情况; h 表示温跃层厚度距平,而 $(C, D, \varepsilon, E, R_h)$ 是 ENSO 海气耦合模型中立的模式参数,系数 D 代表了温跃层移动对 SST 的作用效果;对于其他参数的说明及取值情况,可以参阅文献^[6-8,12].对于 (1) 式所表示的非线性动力系统,当模式参数在适当范围内取值时,它的解呈非线性自激振荡的极限环形式.为了描述问题方便,引入以下向量: $\mathbf{x} = (T_s, h)^T$ 表示海气耦合模型的状态向量, $\mathbf{x}_0 = (T_0, h_0)$ 表示系统状态初值, $\boldsymbol{\theta} = (C, D, E, R_h)^T$ 表示海气耦合模型中需要估计的物理参数向量.另外引入两个非线性函数 $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = CT_s + Dh - \varepsilon T_s^3$ 和 $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = -ET_s - R_h h$, 则 ENSO 海气耦合模型 (1) 式可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}))^T, \\ \mathbf{x}|_{t=0} &= \mathbf{x}_0. \end{aligned} \quad (2)$$

目标是利用 ENSO 海气耦合模型的状态观测数据 $\mathbf{x}^{\text{obs}} = (T_s^{\text{obs}}, h^{\text{obs}})^T$ 估计不可测的未知参数向量 $\boldsymbol{\theta}$, 可以通过对下面的目标泛函进行最小化而获

得:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\text{obs}}\|^2 dt, \quad (3)$$

其中 $[0, T]$ 表示海气耦合模型 (2) 式的状态观测量 \mathbf{x}^{obs} 所分布的时间区间, \mathbf{x} 表示在一定的参数估计值下海气耦合模型状态变量在时间区间上的演化轨迹.显然,海气耦合模型参数估计问题实际上是在微分方程系统 (2) 式约束下的目标泛函的最优化问题,决策变量为 $\boldsymbol{\theta}$, 优化目标为最小化 J .但是,由于模型的强非线性和不稳定性,系统参数很难估计;另外目标泛函 $J(\boldsymbol{\theta})$ 中存在多个局部极值点,以上原因使准确计算目标泛函关于决策变量 $\boldsymbol{\theta}$ 的梯度变得非常重要.下面利用变分方法准确获得梯度向量 $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J = (\nabla_C J, \nabla_D J, \nabla_E J, \nabla_{R_h} J)^T$ 的表达式及计算梯度必需的伴随方程.

3 海气耦合模型参数估计的变分方法

首先引入随时间变化的 Lagrange 乘子向量 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda(t), p(t))^T$, 将以非线性微分方程 (2) 式为约束条件的最优化问题转化为如下形式的无约束最优化问题:

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\text{obs}}\|^2 dt \\ &+ \int_0^T [\lambda \cdot (\dot{T}_s - F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})) \\ &+ p \cdot (\dot{h} - G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}))] dt. \end{aligned} \quad (4)$$

(4) 式的一阶变分为

$$\begin{aligned} \delta J(\boldsymbol{\theta}) &= \int_0^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\text{obs}})^T \cdot \delta \mathbf{x} dt \\ &+ \int_0^T [\delta \lambda \cdot (\dot{T}_s - F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})) \\ &+ \delta p \cdot (\dot{h} - G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}))] dt \\ &+ \int_0^T [\lambda \cdot (\delta \dot{T}_s - \delta F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})) \\ &+ p \cdot (\delta \dot{h} - \delta G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}))] dt. \end{aligned} \quad (5)$$

上式中 $\delta \mathbf{x}$, $\delta \lambda$ 和 δp 分别表示海气耦合模型状态向量和 Lagrange 乘子的一阶变分.而目标泛函 $J(\boldsymbol{\theta})$ 、函数 $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ 和 $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ 的一阶变分按定义可以进一步写为

$$\begin{aligned} \delta J(\boldsymbol{\theta}) &= (\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J)^T \cdot \delta \boldsymbol{\theta}, \\ \delta F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\partial F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \delta \mathbf{x} + \left(\frac{\partial F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \cdot \delta \boldsymbol{\theta}, \\
 &\delta G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \\
 &= \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \delta \mathbf{x} + \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \cdot \delta \boldsymbol{\theta}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

由函数 $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ 和 $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ 的表达式, 可以得到它们的一阶变分表达式为

$$\begin{aligned}
 \delta F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) &= \begin{pmatrix} C - 3\varepsilon T_s^2 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \delta T_s \\ \delta h \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} T_s & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \delta C \\ \delta D \end{pmatrix}, \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) &= \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & -R_h \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \delta T_s \\ \delta h \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} -T_s & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \delta E \\ \delta R_h \end{pmatrix}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

对于 $\int_0^T \lambda \cdot \delta \dot{T}_s dt$ 和 $\int_0^T p \cdot \delta \dot{h} dt$ 分别进行分步积分有

$$\int_0^T \lambda \cdot \delta \dot{T}_s dt = (\lambda \cdot \delta T_s) \Big|_0^T - \int_0^T \dot{\lambda} \cdot \delta T_s dt, \quad (9)$$

$$\int_0^T p \cdot \delta \dot{h} dt = (p \cdot \delta h) \Big|_0^T - \int_0^T \dot{p} \cdot \delta h dt. \quad (10)$$

将 (6)—(10) 式代入 (5) 式, 通过合并同类项, 可以得到下面的等式:

$$\begin{aligned}
 &(\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J)^T \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \\
 &= \int_0^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\text{obs}})^T \cdot \delta \mathbf{x} dt + \int_0^T [\delta \lambda \cdot (\dot{T}_s - F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})) \\
 &+ \delta p \cdot (\dot{h} - G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}))] dt + (\lambda \cdot \delta T_s) \Big|_0^T \\
 &- \int_0^T [\dot{\lambda} + (C - 3\varepsilon T_s^2)\lambda - Ep] \cdot \delta T_s dt \\
 &- \int_0^T (T_s \lambda \cdot \delta C + h \lambda \cdot \delta D) dt + (p \cdot \delta h) \Big|_0^T \\
 &- \int_0^T (\dot{p} + D\lambda - R_h p) \cdot \delta h dt \\
 &+ \int_0^T (T_s p \cdot \delta E + h p \cdot \delta R_h) dt. \quad (11)
 \end{aligned}$$

进一步将以下两式代入 (11) 式:

$$\begin{aligned}
 &(\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J)^T \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \\
 &= \nabla_C J \cdot \delta C + \nabla_D J \cdot \delta D + \nabla_E J \cdot \delta E
 \end{aligned}$$

$$+ \nabla_{R_h} J \cdot \delta R_h, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\text{obs}})^T \cdot \delta \mathbf{x} dt \\
 &= \int_0^T [(T_s - T_s^{\text{obs}})\delta T_s + (h - h^{\text{obs}})\delta h] dt, \quad (13)
 \end{aligned}$$

而且由于一阶变分 δT_s , δh , $\delta \lambda$, δp 和 $\delta \boldsymbol{\theta}$ 可以取任意值, 同时在 ENSO 海气耦合系统 (1) 或 (2) 式中初值条件 $\mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{x}_0$ 固定不变, 因此有 $\delta T_s|_{t=0} = 0$, $\delta h|_{t=0} = 0$; 而 $\mathbf{x}|_{t=T}$ 的值变化, 即 $\delta T_s|_{t=T} \neq 0$ 和 $\delta h|_{t=T} \neq 0$. 由以上条件可以得到下面的伴随方程组和目标泛函关于未知物理参数的梯度表达式:

$$\begin{aligned}
 &-\dot{\lambda} - (C - 3\varepsilon T_s^2)\lambda + Ep \\
 &+ (T_s - T_s^{\text{obs}}) = 0, \quad \lambda|_{t=T} = 0, \\
 &-\dot{p} - D\lambda + R_h p + (h - h^{\text{obs}}) = 0, \\
 &p|_{t=T} = 0, \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_C J &= - \int_0^T (T_s \lambda) dt, \\
 \nabla_D J &= - \int_0^T (h \lambda) dt, \\
 \nabla_E J &= \int_0^T (T_s p) dt, \\
 \nabla_{R_h} J &= \int_0^T (h p) dt. \quad (15)
 \end{aligned}$$

(14) 式称为 ENSO 动力模型方程 (1) 式的伴随方程组及伴随初值条件, 前面引入的 Lagrange 乘子向量成为了随时间变化的伴随向量. 从 (14) 式中不难看出, 伴随方程的求解需要预先获得 ENSO 动力系统的演化轨迹 $\mathbf{x}(t) = (T_s(t), h(t))^T$, 同时 $\dot{\lambda}$ 和 \dot{p} 前面的负号表示对伴随方程在时间上从 T 到 0 进行逆向积分. (15) 式是目标泛函关于未知参数向量梯度的表达式, 易知梯度的计算需要首先数值求解海气耦合模型的动力方程 (1) 式及其伴随方程 (15) 式, 得到状态量和伴随量的演化轨迹 $T_s(t)$, $h(t)$, $\lambda(t)$ 和 $p(t)$. 需要说明的是, 上面虽然是针对海气耦合模型 (1) 式引入了非线性函数 $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ 和 $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$, 但是变分方法对微分方程组 (2) 式所描述的其他海气耦合动力系统具有普适性, 唯一要求是函数 $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ 和 $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ 为一阶可微. 确定待辨识物理参数的泛函梯度之后, 可以选择合适的下降算法 (如共轭梯度算法和拟牛顿算法), 按照下式对各个未知参数进行迭代:

$$\theta_j^{i+1} = \theta_j^i - \nabla_{\theta_j} J|_{\theta^i} \cdot \rho_j^{i+1} \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (16)$$

最终可以获得 ENSO 动力模型方程 (1) 式中的未知参数值. 当 $i = 0$ 时 θ^i 代表未知参数向量的初始猜测值; ρ_j^{i+1} ($j = 1, 2, \dots, m$) 表示第 j 个未知参数的第 i 次迭代步长, 其具体大小由下降算法决定. 变分方法估计海气耦合模型中未知参数的具体算法流程如图 1 所示, 详细说明如下:

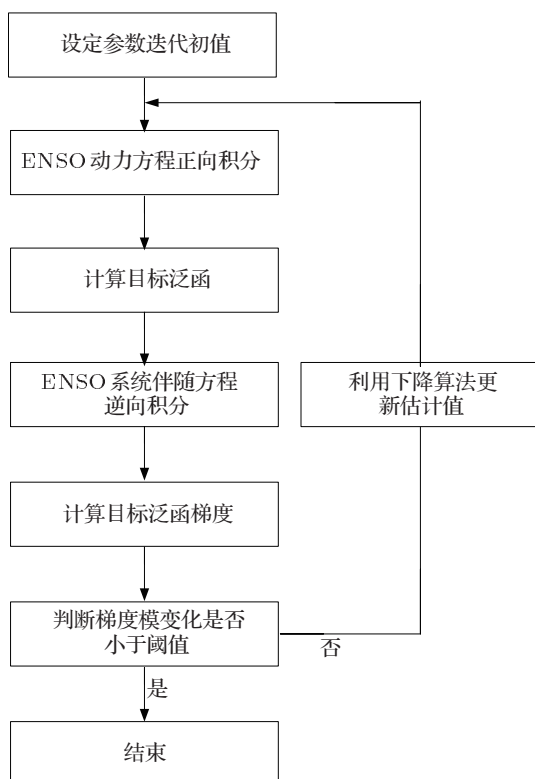


图 1 变分方法估计 ENSO 动力系统参数的流程图

第一步 设定各个未知物理参数的初始猜测值;

第二步 利用新的猜测值, 对海气耦合模型动力方程 (1) 式进行正向积分, 获得系统状态量的演化轨迹 $\mathbf{x}(t)$ 并加以存储;

第三步 利用 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{x}^{\text{obs}}(t)$, 根据 (3) 式计算目标泛函 $J(\theta)$ 的值;

第四步 利用 $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}^{\text{obs}}(t)$ 和伴随初值条件, 对伴随模式 (14) 式从 $t = T$ 到 $t = 0$ 进行时间上的反向积分, 求得伴随向量的演化轨迹 $\lambda(t)$ 和 $p(t)$ 并加以存储;

第五步 利用 $\mathbf{x}(t)$, $\lambda(t)$ 和 $p(t)$, 按照 (15) 式计算目标泛函关于各个未知参数的梯度值;

第六步 利用标准下降算法求出步长 ρ_j^{i+1} , 根据 (16) 式对各个未知参数进行迭代, 求出新估计值. 如果满足程序终止条件 (如达到所要求的收敛

精度或是虽未达到此精度, 但已达到预先指定的最大迭代次数), 则终止程序, 同时获得未知参数的估计值; 若不满足, 利用新的物理参数向量 θ 值从第二步开始进行新的迭代循环.

4 数值试验结果及分析

在数值试验中, 采用四阶 Runge-Kutta 算法求解 ENSO 动力系统常微分方程组 (1) 式. 相应伴随方程的数值模式可以通过对连续伴随方程 (12) 式进行离散得到. 本文中由于考虑到强非线性系统对误差的敏感性, 采用理论推导的方式求得 ENSO 动力系统离散模式所对应的伴随模式, 积分步长与正模式相同. 模型参数设为 $(C, D, E, R_h) = (0.5, 1.0, 0.5, 0.5)$, 该组参数值满足系统 (1) 存在唯一稳定极限环的判据 [6-8]. 模式初始状态量 (T_0, h_0) 取为 $(-1.0, 2.0)$, 取积分步长 $\Delta\tau = 0.05$, 设定时间积分区间为 $[0, 2]$. 然后对模式进行积分, 得到系统在离散时间序列 $\{0, d\tau, 2d\tau, \dots, 40d\tau\}$ 上的标准状态变量值. 试验中只取部分状态量作为模拟观测, 分别抽取 $\{0, 9d\tau, 17d\tau, \dots, 40d\tau\}$ 序列时刻的状态量 (T, h) 生成两组观测资料. 观测包含 $n = 6 \times 2$ 个数据, 然后可在所选状态量上叠加高斯随机数作为观测噪声, 观测噪声的均值取为 0、标准偏差取为 σ_o . 观测值可以表示为 $\mathbf{x}_i^{\text{obs}} = (T^{\text{obs}}(t_i), h^{\text{obs}}(t_i))^T, i = 1, 2, \dots, N$. 离散形式的目标泛函表示为

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^{\text{obs}}\|^2, \quad (17)$$

式中 N 表示观测数量, $\|\cdot\|^2$ 表示 Euclidean 范数, 这里有 $\|\mathbf{x}_i\|^2 = T_i^2 + h_i^2$. 在获得 ENSO 系统离散形式的正模式、伴随模式、目标泛函及其梯度表达式后, 利用标准下降算法可以对 θ 进行最优估计, 未知参数的迭代初值设定为 $\theta^0 = (0.2, 1.3, 1.0, 0.1)$. 在对 ENSO 系统未知参数进行变分迭代估计的过程中, 未知参数向量 θ 的每次更新, 都要对 ENSO 系统离散模式进行一次正向 ($0 \rightarrow T$) 数值积分, 以便计算目标泛函 $J(\theta)$ 的大小; 同时对 ENSO 系统离散伴随模式进行一次逆向 ($T \rightarrow 0$) 数值积分, 以便计算目标泛函梯度 $\nabla_{\theta} J$ 的值.

利用图 1 中的算法流程可以得到 $\theta = (C, D, E, R_h)^T$ 的迭代估计序列值, 图 2-7 显示了不存在观测噪声 (即 $\sigma_o = 0$) 时的仿真结果. 图 2-5

显示的是各个未知参数在迭代估计过程中值的变化; 图 6 和图 7 表示的是目标泛函值的下降图. 从图 2—5 中可以看到, 未知参数向量 θ 在经历 60 次迭代后已经非常接近真实值, 同时目标泛函基本上不再下降. 理论上当目标泛函关于未知参数的梯度模 $\|\nabla_{\theta_j} J\| = 0$ 时, 未知参数向量取最优估计值. 但本文中为了减小计算量, 采用通常的迭代收敛标准, 即前后两次迭代的目标泛函梯度模的变化小于预先指定的阈值 $\|\nabla_{\theta_j} J\| - \|\nabla_{\theta_{j+1}} J\| < 10^{-5}$, 此时的计算误差小于机器误差, 可以忽略. 虽然目标泛函的值下降较小. 但梯度模仍在减小, 经过 169 次迭代后, 目标泛函达到收敛, 得到各个参数的估计值为 $C = 0.5000073$, $D = 1.0000001$, $E = 0.5000006$ 和 $R_h = 0.5000014$. 分析图 2—7 中所示的试验结果可得, 采用变分方法估计 ENSO 系统的未知参数具有较高的准确性, 所有参数的估计精度达到了 $O(10^{-4})$. 另外变分方法的优势是, 通过伴随方

程能够准确计算出目标泛函梯度, 因此使目标泛函能快速下降, 只经过 60 次迭代估计值就非常接近真实值. 表 1 给出了在不同观测噪声水平情况下变分方法对 ENSO 系统的未知参数估计结果. 从表 1 可以看出, 在不存在观测误差时, 未知参数的估计精度最高, 各个参数的估计结果可以精确到小数点后第 5 位, 表明了变分方法估计混沌系统未知参数的有效性. 随着误差增加, 参数的估计精度下降, 但迭代估计结果仍然收敛到真值附近, 即使当观测误差的标准偏差为 $\sigma_o = 0.2$ 时, 未知参数的估计结果仍然非常接近真实值, 可以精确到小数点后 2 位, 说明变分方法具有较好的抗噪声性能. 另外, 从表 1 还可以看出, 当不存在观测误差时, 迭代收敛时的目标泛函值基本上为 0, 随着观测误差的增加, 一方面达到收敛时需要的迭代次数增多, 另外一方面收敛时的目标泛函值增大.

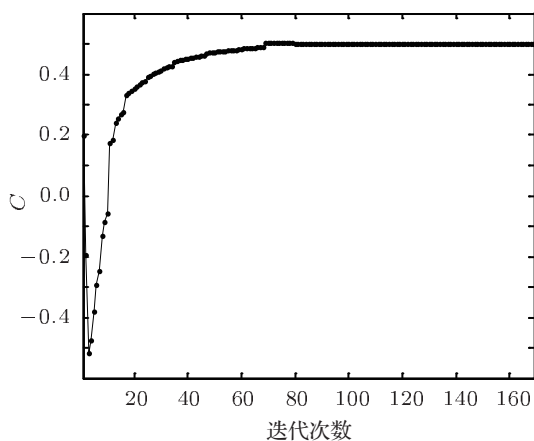


图 2 参数 C 的辨识结果曲线

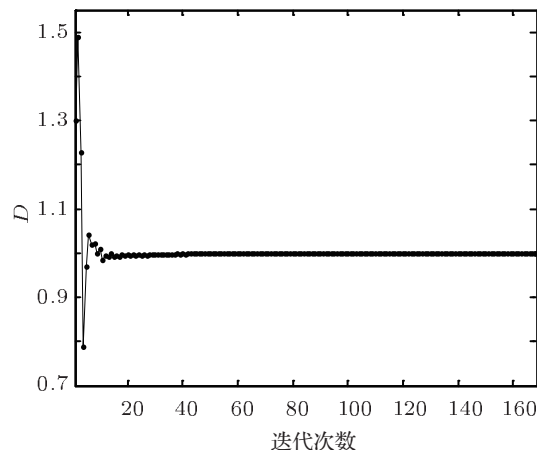


图 3 参数 D 的辨识结果曲线

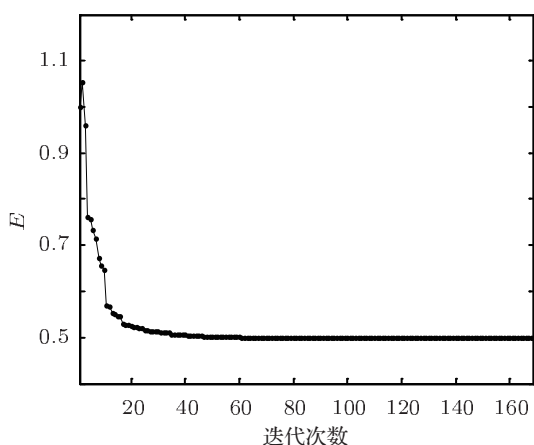


图 4 参数 E 的辨识结果曲线

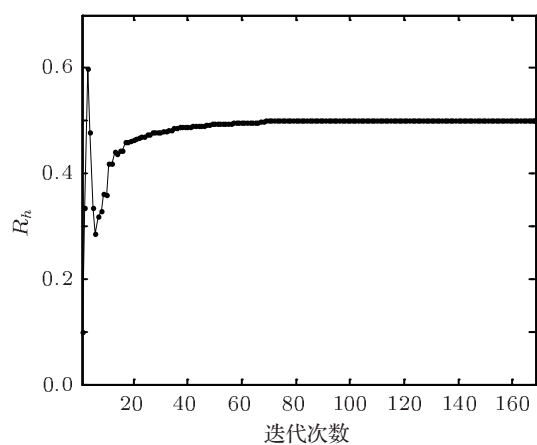


图 5 参数 R_h 的辨识结果曲线

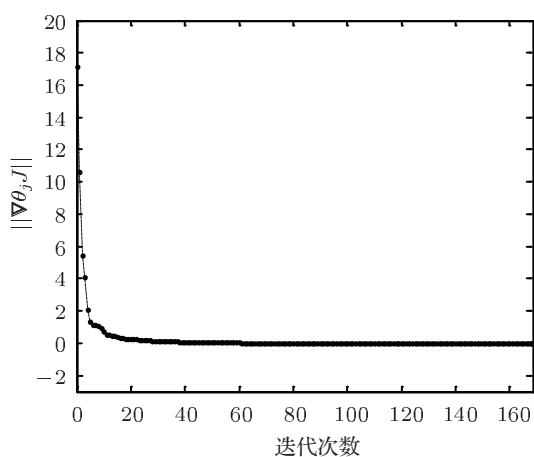


图6 目标泛函梯度模下降图

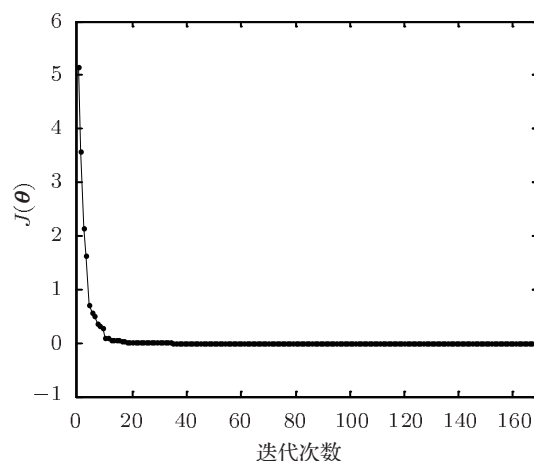


图7 目标泛函 $J(\theta)$ 收敛曲线

表1 不同观测噪声水平情况下 ENSO 系统的参数估计结果

	C	D	E	R_h	$J(\theta)$	迭代次数
真值	0.5000000	1.0000000	0.5000000	0.5000000	—	—
$\sigma_o = 0.0$	0.5000073	1.0000001	0.5000006	0.5000014	4.5173×10^{-11}	169
$\sigma_o = 0.1$	0.5000362	1.0000383	0.4999506	0.5000659	1.9361×10^{-5}	205
$\sigma_o = 0.2$	0.5008553	0.9987875	0.4991867	0.5007649	3.4329×10^{-4}	240

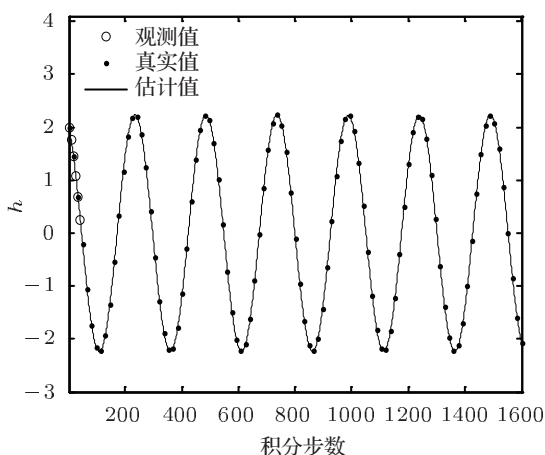


图8 无噪声时状态变量 h 的比较

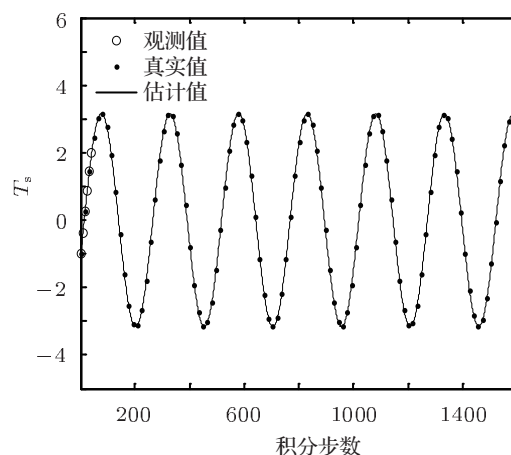


图9 无噪声时状态变量 T_s 的比较

为了进一步说明变分方法估计 ENSO 海气耦合非线性动力系统中未知参数的有效性, 将无观测噪声时 θ 的估计值代入海气耦合模型 (1) 式中进行积分, 可以得到状态量 (T_s, h) 的估计轨迹. 图 8, 9 和 10 中分别显示了温跃层厚度、SST 距平和 ENSO 系统极限环的估计值、观测值和真实值.

从图 8—10 可知, 在所研究的时间区间内, 估计轨迹和真实值之间非常符合, 进一步说明了变分方法对未知参数 θ 估计的正确性. 同时也表明, 即使只取部分观测数据, 也能够正确估计出海气耦合振子系统中的未知参数, 且对系统的极限环解有很好的模拟.

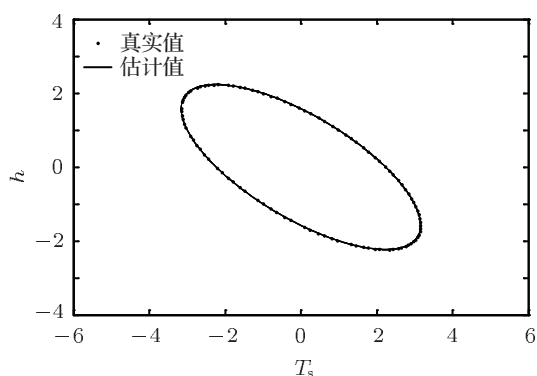


图 10 无噪声时 ENSO 系统极限环的比较

5 结论

本文利用变分方法解决 ENSO 海气耦合动力

系统中未知参数的估计问题. 利用变分原理导出了 ENSO 系统的伴随方程和目标泛函关于未知参数梯度的表达式, 给出了变分方法估计 ENSO 系统未知参数的算法流程, 最后通过数值试验结果验证了方法的有效性. 主要结论归纳如下: 1) 变分方法对以 $\dot{\mathbf{x}} = (F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}))^T$ 为控制方程的所有 ENSO 系统具有普适性, 惟一条件是非线性函数 $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ 和 $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ 具有一阶可微性; 2) 不存在观测噪声时变分方法具有很高的估计精度; 3) 存在观测误差时, 迭代估计值序列仍能收敛到真值附近, 说明变分方法具有较好的抗噪声性能. 需要强调的是, 本文利用 Lagrange 乘子法容易产生临界变分现象, 即在识别某些特殊系统的 Lagrange 乘子时, 会出现 Lagrange 乘子为零或只能得到部分欧拉方程的现象. 因此, 对某些系统的参数估计效果可以进一步提高.

- [1] Philander S G H 1984 *J. Atmos. Sci.* **41** 604
- [2] Suarez M J, Schopf P S 1988 *J. Atmos. Sci.* **45** 3283
- [3] McCreary J P, Anderson D J L 1984 *Mon. Wea. Rev.* **112** 934
- [4] Zebiak S E, Cane M A 1987 *Mon. Wea. Rev.* **115** 2262
- [5] Wang B, Barcilon A, Fang Z 1999 *J. Atmos. Sci.* **56** 5
- [6] Feng G L, Dong W J, Jia X J, Cao H X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林, 董文杰, 贾晓静, 曹鸿兴 2002 物理学报 **51** 1181]
- [7] Feng G L, Dai X G, Wang A H, Chou J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林, 戴新刚, 王爱慧, 丑纪范 2001 物理学报 **50** 606]
- [8] Feng G L, Dong W J 2005 *Acta Meteor. Sin.* **63** 864 (in Chinese) [封国林, 董文杰 2005 气象学报 **63** 864]
- [9] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3245 (in Chinese) [莫嘉琪, 林万涛 2004 物理学报 **53** 3245]
- [10] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1081 (in Chinese) [莫嘉琪, 林万涛 2005 物理学报 **54** 1081]
- [11] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6 (in Chinese) [莫嘉琪, 王辉, 林万涛 2006 物理学报 **55** 6]
- [12] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2006 *Adv. Math.* **35** 232
- [13] He J H 1999 *Int. J. Nonl. Mech.* **34** 699
- [14] He J H 1998 *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **167** 57
- [15] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Publisher) pp129–141 (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州: 河南科学技术出版社) 第 129—141 页]
- [16] He J H 1999 *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **178** 257
- [17] He J H 2000 *Int. J. Nonl. Mech.* **35** 37
- [18] Campbell E P 2004 *Technical Report* **139** 18
- [19] Burgers G, Jin F F, van Oldenborgh G J 2005 *Geophys. Res. Lett.* **32** 13
- [20] Du H D, Huang S X, Cai Q F 2007 *Journal of Nanjing Institute of Meteorology* **30** 444 (in Chinese) [杜华栋, 黄思训, 蔡其发 2007 南京气象学院学报 **30** 444]
- [21] Du H D, Huang S X, Cai Q F 2009 *Mar. Sci. Bull.* **11** 13
- [22] Huang S X, Wu R S 2001 *Mathematical Physics Problems in Atmosphere Science* (Beijing: Meteorology Press) pp460–468 (in Chinese) [黄思训, 伍荣生 2001 大气科学中的数学物理问题 (北京: 气象出版社) 第 460–468 页]
- [23] He J H 2008 *Int. J. Modern. Phys. B* **22** 3487
- [24] He J H 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 797
- [25] He J H 2001 *Int. J. Nonlin. Sci. Numer.* **2** 309
- [26] He J H, Lee E W M 2009 *Phys. Lett. A* **373** 1644
- [27] Zheng C B, Liu B, Wang Z J, Zheng S K 2009 *Int. J. Nonlin. Sci. Numer.* **10** 1369
- [28] Zheng C B, Liu B, Wang Z J, Zheng S K 2009 *Int. J. Nonlin. Sci. Numer.* **10** 1523

Estimating parameters for coupled air-sea model with variational method*

Song Jun-Qiang Cao Xiao-Qun[†] Zhang Wei-Min Zhu Xiao-Qian

(School of Computer Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(Received 18 August 2011; revised manuscript received 27 September 2011)

Abstract

In this paper a method is presented to estimate the unknown parameters of nonlinear El Niño/La Niño-Southern Oscillation model based on the variational principle. Firstly, the equation of the coupled air-sea model is included into the objective functional. Secondly, the formulas of the adjoint equation and the functional gradient for unknown parameters are derived using the variational method. Finally, the algorithm to estimate unknown parameters of air-sea oscillator system is designed according to the above formulas. The numerical simulation results show that the proposed method is very effective and feasible to estimate the unknown parameters of nonlinear air-sea coupled dynamical system.

Keywords: air-sea coupled model, parameter estimation, limit cycle, variational method

PACS: 04.20.Fy, 31.15.xt, 92.10.am

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41105063, 61070041).

[†] E-mail: caoxiaoqun@nudt.edu.cn