非线性热弹耦合 Sine-Gordon 型系统的整体吸引子*

张建文[1)†] 任永华[1)] 吴润衡[2)] 冯涛[1)]

1) (太原理工大学数学学院, 太原 030024)

2) (北方工业大学理学院, 北京 100041)

(2011 年 9 月 20 日收到; 2011 年 10 月 20 日收到修改稿)

研究受 Peierls-Nabarro 力作用的非线性热弹耦合 Sine-Gordon 型系统的动力行为. 利用算子半群理论证明了在一定的初边界条件下系统存在连续解, 利用算子半群分解技巧构造了渐近紧的不变吸收集, 进而证明了系统存在整体吸引子.

关键词: 非线性热效应, Sine-Gordon 型系统, 整体吸引子

PACS: 04.20.Ex, 02.30.Jr, 05.90.+m, 02.60.Lj

1 引 言

长期以来, 对于非线性发展方程领域中, Sine-Gordon 型方程的研究一直受到众多科技工作者的高度关注.Sine-Gordon 型方程是沿类脂膜的扩张波的传播、晶格位错的传播、磁性晶体的 Bloch 壁运动、Josephson 线中磁通量的传播和基本离子的统一理论等方面的重要模型. 文献 [1—9] 从不同角度对该类系统作了讨论. 其中文献 [4, 5] 致力于研究其经典和量子孤子; 文献 [2, 3, 7, 8, 10] 致力于寻找其各种各样的解, 如整体解 [1]、行波解 [2]、精确解 [6,7] 和相互作用解 [9] 等; 文献 [8] 采用数值方法求解该类方程及系统整体吸引子存在性研究. 然而, 未见到有关非线性热弹耦合 Sine-Gordon 型系统吸引子的研究. 本文基于文献 [3], 在计入 Peierls-Nabarro 力效应时, 研究了一类热弹耦合 Sine-Gordon 型系统的整体吸引子. 需要强调的是本文所考虑的热效应项为非线性热源项. 考虑如下非线性热弹耦合 Sine-Gordon 型系统

$$\begin{aligned} &u_{tt}-\alpha_1\Delta u_t-\Delta u+\beta_1\sin u+\alpha_2\theta=f(x),\\ &\theta_t-\Delta\theta+\alpha_2 u_t=g(\theta),\quad (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+, \end{aligned}\tag{1}$$

赋予初始条件

$$\begin{aligned} u(x,0)&=u_0(x),\\ u_t(x,0)&=u_1(x),\\ \theta(x,0)&=\theta_0(x)\quad x\in\Omega, \end{aligned}\tag{2}$$

和边界条件

$$u(x,t)\big|_{x\in\partial\Omega}=0,\quad \theta(x,t)\big|_{x\in\partial\Omega}=0\quad t\geqslant 0,\tag{3}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1>0$, $f\in H_0^1(\Omega)$, Ω 为 $\mathbb{R}$ 中的一个有界开集, 且具有充分光滑的边界 $\partial\Omega$. $u=u(x,t)$ 和 $\theta=\theta(x,t)$ 是 $\Omega\times[0,+\infty)$ 上的两个实值函数.

按照惯例, 本文将 $L^2(\Omega)$ 和 $H_0^1(\Omega)$ 中的内积与范数分别记为

$$(u,v)=\int_\Omega uv\,\mathrm{d}x,\quad |u|^2=(u,u),\quad \forall\, u,v\in L^2(\Omega),$$

$$((u,v))=\int_\Omega \nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x,\quad \|u\|^2=((u,u)),\quad \forall\, u,v\in H_0^1(\Omega),$$

并记 $|f(x)|=b_0$, $\|f(x)\|=b_1$. 另外, 还需假设

$$(H).g(\cdot)\in\mathbb{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall\, s\in\mathbb{R},$$

且 $|g(s)|\leqslant a_0$, $|g'(s)|\leqslant a_0$, $g(0)=0$, a_0 为正常数.

* 国家自然科学基金 (批准号: 11172194)、山西省自然科学基金 (批准号: 2010011008) 和山西省青年科技研究基金 (批准号: 2011021002-2) 资助的课题.

† E-mail: zhangjianwen@tyut.edu.cn

2 解的存在惟一性

设 $A=-\Delta$, 则 A 是 $D(A)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ 的自伴正定线性算子, 并且其特征值 $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_m\leqslant\cdots$$
$$\lambda_m\to+\infty(m\to+\infty).$$

令 $E=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$, $E_1=D(A)\times H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$, 定义空间 E 的内积和范数分别为

$$(\varphi_1,\varphi_2)_E=\mu((u_1,u_2))+(w_1,w_2)+(\theta_1,\theta_2),$$
$$\|\varphi\|_E=(\varphi,\varphi)_E^{1/2}.$$

其中

$$\forall\,\boldsymbol{\varphi}_i=(u_i,w_i,\theta_i)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\varphi}=(u,w,\theta)^{\mathrm{T}}\in E,\quad i=1,2,$$
$$\mu=\frac{4+\alpha_1^2\lambda_1}{4+2\alpha_1^2\lambda_1}>0.$$

可类似定义 $E_1=D(A)\times H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ 的内积和范数.

令 $u_t=v$, 那么系统 (1)—(3) 等价于空间 E 中的如下初值问题:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_t&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{U}+N(\boldsymbol{U}),\\ \boldsymbol{U}(0)&=\boldsymbol{U}_0=(u_0,u_1,\theta_0)^{\mathrm{T}},\end{aligned}\tag{4}$$

记

$$u_1\equiv v_0\quad(u_0,u_1,\theta_0)^{\mathrm{T}}\in E.$$

其中

$$\boldsymbol{U}=(u,v,\theta)^{\mathrm{T}}\in E,$$
$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&I&0\\ \Delta&\alpha_1\Delta&0\\ 0&0&\Delta\end{pmatrix},$$
$$N(\boldsymbol{U})=\begin{pmatrix}0\\ -\alpha_2\theta-\beta_1\sin u+f\\ -\alpha_2v+g(\theta)\end{pmatrix}.$$

$D(\boldsymbol{C})=D(A)\times D(A)\times D(A)$, I 为 $L^2(\Omega)$ 上的恒等算子.

令

$$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&-I&0\\ -\Delta&-\alpha_1\Delta&0\\ 0&0&-\Delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-I&0\\ A&\alpha_1A&0\\ 0&0&A\end{pmatrix},$$

由文献 [4] 知, 若 $\boldsymbol{B}$ 为扇形算子, 则 $\boldsymbol{C}$ 可以生成一个解析半群 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{C}t}$. 由 $\boldsymbol{B}$ 是闭的和稠密的及文献 [3] 中给出的相关估计, 可得 $\boldsymbol{B}$ 是扇形算子, 即 $\boldsymbol{C}$ 是解析半群 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{C}t}$ 的无穷小生成元. 由参考文献 [10] 可知, $N(\boldsymbol{U})$ 在 E 上是全局 Lipschitz 连续的. 再由假设 (H), 显然有 $N(\boldsymbol{U})$ 是连续可微的, 结合文献 [3,10] 可得如下定理.

定理 1 若假设 (H) 成立, 对任意的 $\boldsymbol{U}_0\in E$, 初值问题 (4) 存在惟一解

$$\boldsymbol{U}(\cdot)=\boldsymbol{U}(\cdot,\boldsymbol{U}_0)\in\boldsymbol{C}(\mathbb{R}_+;E),$$

使得 $\boldsymbol{U}(0,\boldsymbol{U}_0)=\boldsymbol{U}_0$, 且 $\boldsymbol{U}(t)$ 满足积分方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(t)=&\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{U}_0)\\ =&\mathrm{e}^{\boldsymbol{C}t}\boldsymbol{U}_0+\int_0^t\mathrm{e}^{\boldsymbol{C}(t-s)}N(\boldsymbol{U}(s))\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{5}$$

此时称 $\boldsymbol{U}(t)$ 为初值问题 (4) 的一个温和解, 并且有

(i) 若 $\boldsymbol{U}_0\in D(\boldsymbol{C})$, 则存在 $\boldsymbol{U}(\cdot)\in\boldsymbol{C}(\mathbb{R}_+;D(\boldsymbol{C}))\cap\boldsymbol{C}^1(\mathbb{R}_+;E)$ 满足 (4).

(ii) $\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{U}_0)$ 关于 t 和 $\boldsymbol{U}_0$ 共同连续.

根据定理 1, 对 $\forall t\geqslant0$, 引入一个映射 $S(t):\boldsymbol{U}_0\to\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{U}_0)$, 其中 $\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{U}_0)$ 是 (4) 的温和解, 那么 $\{S(t),t\geqslant0\}$ 定义了 E 上的一个连续半群. 下面证明半群 $\{S(t),t\geqslant0\}$ 具有整体吸引子 [11,12].

3 整体吸引子的存在性

令 $w=u_t+\varepsilon u$, 系统 (1)—(3) 或 (4) 式可以等价地写成

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\varphi}_t+H(\boldsymbol{\varphi})=F(\boldsymbol{\varphi}),\\ &\boldsymbol{\varphi}(0)=(u_0,u_1+\varepsilon u_0,\theta_0)^{\mathrm{T}},\end{aligned}\tag{6}$$

记 $u_1+\varepsilon u_0\equiv w_0$, $(u_0,w_0,\theta_0)^{\mathrm{T}}\in E$.
其中

$$\boldsymbol{\varphi}=(u,w,\theta)^{\mathrm{T}},$$
$$\varepsilon=\frac{\alpha_1\lambda_1}{4+2\alpha_1^2\lambda_1}>0,$$
$$H(\boldsymbol{\varphi})=\begin{pmatrix}\varepsilon u-w\\ Au-\varepsilon(\alpha_1A-\varepsilon)u+(\alpha_1A-\varepsilon)w+\alpha_2\theta\\ \alpha_2\varepsilon u+\alpha_2w+A\theta\end{pmatrix},$$
$$F(\boldsymbol{\varphi})=\begin{pmatrix}0\\ -\beta_1\sin u+f(x)\\ g(\theta)\end{pmatrix}.$$

由定理 1, 显然 (6) 式可定义算子半群 $\{S_\varepsilon(t), t \geqslant 0\}$,

$$S_\varepsilon(t): E \rightarrow E,$$
$$\boldsymbol{\varphi}(0) = (u_0, u_1 + \varepsilon u_0, \theta_0)^{\mathrm{T}}$$
$$\rightarrow (u(t), u_t(t) + \varepsilon u(t), \theta(t))^{\mathrm{T}} = \varphi.$$

其中 $S_\varepsilon(t)$ 与 $S(t)$ 的关系为

$$S_\varepsilon(t) = R_\varepsilon S(t) R_{-\varepsilon},$$

$R_\varepsilon: \{a, b, c\} \rightarrow \{a, b + \varepsilon a, c\}$ 是 E 上的同构.

因此要证明半群 $\{S(t), t \geqslant 0\}$ 具有整体吸引子, 只需证明半群 $\{S_\varepsilon(t), t \geqslant 0\}$ 具有整体吸引子. 为了得到有界吸收集, 引入以下两个重要的引理.

引理 1 对 $\forall \boldsymbol{\varphi} = (u, w, \theta)^{\mathrm{T}} \in E$, $\exists \delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$, 使得下式成立:

$$(H(\boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi})_E \geqslant \delta_1 \|\boldsymbol{\varphi}\|_E^2 + \delta_2 |w|^2 + \delta_3 |\theta|^2, \quad (7)$$

其中

$$\delta_1 = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2\mu\lambda_1},$$
$$\delta_2 = \alpha_1\lambda_1 - \varepsilon - \delta_1 - \frac{\varepsilon^4}{\mu\lambda_1(\varepsilon - \delta_1)},$$
$$\delta_3 = \lambda_1 - \delta_1 - \frac{\alpha_2^2\varepsilon^2}{\mu\lambda_1(\varepsilon - \delta_1)}.$$

证明 易证所给出的 δ_1, δ_2, δ_3 满足 $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$. 并且有

$$\varepsilon - \delta_1 > 0,$$
$$\alpha_1\lambda_1 - \varepsilon - \delta_1 - \delta_2 > 0,$$
$$\lambda_1 - \delta_1 - \delta_3 > 0.$$

从而

$$\begin{aligned}
&(H(\boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi})_E - \delta_1 \|\boldsymbol{\varphi}\|_E^2 - \delta_2 |w|^2 - \delta_3 |\theta|^2 \\
\geqslant & \frac{(\varepsilon - \delta_1)\mu}{2} \|u\|^2 - \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\lambda_1}} \|u\| \cdot |w| \\
&+ \frac{(\alpha_1\lambda_1 - \varepsilon - \delta_1 - \delta_2)}{2} |w|^2 \\
&+ \frac{(\varepsilon - \delta_1)\mu}{2} \|u\|^2 - \frac{\alpha_2\varepsilon}{\sqrt{\lambda_1}} \|u\| \cdot |\theta| \\
&+ \frac{(\lambda_1 - \delta_1 - \delta_3)}{2} |\theta|^2 \\
&+ \frac{(\alpha_1\lambda_1 - \varepsilon - \delta_1 - \delta_2)}{2} |w|^2 \\
&- 2\alpha_2 |w| \cdot |\theta| + \frac{(\lambda_1 - \delta_1 - \delta_3)}{2} |\theta|^2. \quad (8)
\end{aligned}$$

因为

$$\frac{(\varepsilon - \delta_1)\mu}{2} > 0,$$
$$\frac{\alpha_1\lambda_1 - \varepsilon - \delta_1 - \delta_2}{2} > 0,$$
$$\frac{\lambda_1 - \delta_1 - \delta_3}{2} > 0,$$

并且经过计算还可以得到

$$\begin{aligned}
&4 \cdot \frac{(\varepsilon - \delta_1)\mu}{2} \cdot \frac{\alpha_1\lambda_1 - \varepsilon - \delta_1 - \delta_2}{2} - \frac{\varepsilon^4}{\lambda_1} \geqslant 0, \\
&4 \cdot \frac{(\varepsilon - \delta_1)\mu}{2} \cdot \frac{\lambda_1 - \delta_1 - \delta_3}{2} - \frac{\alpha_2^2\varepsilon^2}{\lambda_1} \geqslant 0, \\
&4 \cdot \frac{\alpha_1\lambda_1 - \varepsilon - \delta_1 - \delta_2}{2} \\
&\times \frac{\lambda_1 - \delta_1 - \delta_3}{2} - 4\alpha_2^2 \geqslant 0.
\end{aligned} \quad (9)$$

所以得到

$$(H(\boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi})_E - \delta_1 \|\boldsymbol{\varphi}\|_E^2 - \delta_2 |w|^2 - \delta_3 |\theta|^2 \geqslant 0,$$

即证.

引理 2 对 $\forall \boldsymbol{\varphi} = (u, w, \theta)^{\mathrm{T}} \in E$, 有 $(F(\boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi})_E \leqslant c_1 + \delta_2 |w|^2 + \delta_3 |\theta|^2$ 成立, 这里

$$c_1 = \frac{\beta_1^2 |\Omega|}{2\delta_2} + \frac{b_0^2}{2\delta_2} + \frac{a_0^2}{4\delta_3},$$

δ_2 和 δ_3 如前所示, $|\Omega|$ 表示 Ω 的测度.

证明 利用 Young 不等式估计 $(F(\boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi})_E$, 得

$$\begin{aligned}
(F(\boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi})_E \leqslant & \beta_1 k_1 |\Omega| + k_2 b_0^2 + k_3 a_0^2 \\
&+ \left(\frac{\beta_1}{4k_1} + \frac{1}{4k_2}\right) |w|^2 \\
&+ \frac{1}{4k_3} |\theta|^2. \quad (10)
\end{aligned}$$

令 $k_1 = \dfrac{\beta_1}{2\delta_2}$, $k_2 = \dfrac{1}{2\delta_2}$, $k_3 = \dfrac{1}{4\delta_3}$, 则有

$$(F(\boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi})_E \leqslant c_1 + \delta_2 |w|^2 + \delta_3 |\theta|^2,$$

即证.

将 $\boldsymbol{\varphi}_t + H(\boldsymbol{\varphi}) = F(\boldsymbol{\varphi})$ 与 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 E 中作内积, 并利用引理 1、引理 2 以及 Gronwall 不等式可得

$$\begin{aligned}
||\boldsymbol{\varphi}(t)||_E^2 \leqslant & ||\boldsymbol{\varphi}(0)||_E^2 \exp(-2\delta_1 t) \\
&+ \frac{c_1}{\delta_1}(1 - \exp(-2\delta_1 t)).
\end{aligned}$$

所以 $\limsup\limits_{t \to \infty} ||\boldsymbol{\varphi}||_E^2 \leqslant \dfrac{c_1}{\delta_1}$. 令 $\rho_0^2 = \dfrac{2c_1}{\delta_1}$, 则可以在 E 中做一个球 $B_E(0, \rho_0)$, 它以 0 为中心, 以 ρ_0 为半径. 显然, 球 $B_E(0, \rho_0)$ 对于半群 $\{S_\varepsilon(t), t \geqslant 0\}$ 在 E 中是吸收的. 于是得到了如下引理.

引理 3 半群 $\{S_\varepsilon(t), t \geqslant 0\}$ 在 E 中存在有界吸收集.

现在开始讨论半群 $\{S_\varepsilon(t), t \geqslant 0\}$ 的渐近紧性. 设 $\boldsymbol{\varphi}(t) = (u(t), w(t), \theta(t))^{\mathrm{T}}$ 是系统 (6) 的解, 其初值为 $\boldsymbol{\varphi}(0) = (u_0, w_0, \theta_0)^{\mathrm{T}}$.

令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t)=&\boldsymbol{\varphi}_1(t)+\boldsymbol{\varphi}_2(t),\\ \forall\,\boldsymbol{\varphi}_i(t)=&(u_i(t),w_i(t),\theta_i(t))^{\mathrm{T}},\\ w_i(t)=&u_{it}(t)+\varepsilon u_i(t),\quad i=1,2.\\ \boldsymbol{\varphi}_1(t)=&S_1(t)\boldsymbol{\varphi}(0),\\ \boldsymbol{\varphi}_2(t)=&S_2(t)\boldsymbol{\varphi}(0),\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$ 分别满足如下两个方程:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\varphi}_{1t}+H(\boldsymbol{\varphi}_1)=0\quad\forall\,t\geqslant0,\\ &\boldsymbol{\varphi}_1(0)=(u_0,w_0,\theta_0)^{\mathrm{T}}\in E,\end{aligned}\tag{11}$$

和

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\varphi}_{2t}+H(\boldsymbol{\varphi}_2)=F(\boldsymbol{\varphi})\quad\forall t\geqslant0,\\ &\boldsymbol{\varphi}_2(0)=(0,0,0)^{\mathrm{T}}\in E,\end{aligned}\tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}$ 是系统 (6) 的解. 显然 $S_\varepsilon(t)=S_1(t)+S_2(t)$.

引理 4 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$ 分别满足

$$\|\boldsymbol{\varphi}_1\|_E^2\leqslant\|\boldsymbol{\varphi}_1(0)\|_E^2\exp(-2\delta_4t)\quad\forall\,T\geqslant0,\tag{13}$$

以及

$$\left\|A^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_2\right\|_E^2\leqslant\frac{2c_2}{\delta_5}\quad\forall\,T\geqslant0,\tag{14}$$

其中 c_2,δ_4,δ_5 将在证明过程中给出.

证明 仿照引理 1 和引理 3 的证明, 可知 (13) 式成立, 即 $S_1(t)$ 指数衰减.

因为

$$\boldsymbol{\varphi}_2(0)=(0,0,0)^{\mathrm{T}}\in D(C),$$

由定理 1 可知:

$$\boldsymbol{\varphi}_2\in\boldsymbol{C}(\mathbb{R}_+;D(\boldsymbol{C}))\cap\boldsymbol{C}^1(\mathbb{R}_+;E).$$

将 $A\boldsymbol{\varphi}_2$ 与 (12) 式在 E 中作内积可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||A^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_2||_E^2+(H(\boldsymbol{\varphi}_2),A\boldsymbol{\varphi}_2)_E\\ =&(F(\boldsymbol{\varphi}),A\boldsymbol{\varphi}_2)_E.\end{aligned}\tag{15}$$

仿照引理 1 的证明, 可得, $\exists\ \delta_5>0,\delta_6>0,\delta_7>0$, 使得

$$\begin{aligned}&(H(\boldsymbol{\varphi}_2),A\boldsymbol{\varphi}_2)_E\\ \geqslant&\delta_5\left\|A^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_2\right\|_E^2+\delta_6\left|A^{1/2}w_2\right|^2\\ &+\delta_7\left|A^{1/2}\theta_2\right|^2.\end{aligned}\tag{16}$$

这里可取 $\delta_5=\delta_1,\delta_6=\delta_2,\delta_7=\delta_3$.

另一方面, 通过计算有

$$\begin{aligned}&(F(\boldsymbol{\varphi}_2),A\boldsymbol{\varphi}_2)_E\\ \leqslant&\frac{\beta_1^2}{2\delta_6}|\varOmega|+\frac{b_1^2}{2\delta_6}+\frac{a_0^2}{4\delta_7}\\ &+\delta_6\left|A^{1/2}w_2\right|^2+\delta_7\left|A^{1/2}\theta_2\right|^2.\end{aligned}\tag{17}$$

将 (16) 和 (17) 式代入 (15) 式并应用 Gronwall 不等式可得

$$||A^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_2||_E^2\leqslant\frac{c_2}{\delta_5}(1-\exp(-2\delta_5t))\leqslant\frac{2c_2}{\delta_5},$$

其中

$$c_2+\frac{a_0^2}{4\delta_7}=\frac{\beta_1^2}{2\delta_6}|\varOmega|+\frac{b_1^2}{2\delta_6}.$$

所以有

$$||S_2(t)\boldsymbol{\varphi}(0)||_{E_1}^2=||\boldsymbol{\varphi}_2||_{E_1}^2=||A^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_2||_E^2\leqslant\frac{2c_2}{\delta_5}.$$

于是当 B_0 是 E 中的一个有界集时, $\cup_{t\geqslant0}S_2(t)B_0$ 是 E_1 中的有界集. 而 E_1 是紧嵌入 E 中的, 故 $\cup_{t\geqslant0}S_2(t)B_0$ 是 E_1 中的紧集. 结合引理 3 和引理 4, 得到如下定理.

定理 2 由系统 (6) 所定义的算子半群 $\{S_\varepsilon(t),t\geqslant0\}$ 在空间 E 中具有整体吸引子.

4 结 论

众所周知, Sine-Gordon 型系统解的定性研究受到众多学者的高度关注. 本文研究受 Peierls-Nabarro 力作用的非线性热弹耦合 Sine-Gordon 型系统的动力行为, 得到当初始条件 $u_0(x)\in H_0^1$, $u_1(x)\in L^2$ $\theta_0(x)\in L^2$ 时, 初边值问题存在惟一的连续解 $\boldsymbol{U}(t)=\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{U}_0)$. 由此, 可定义连续的动力系统 $S(t):\ \boldsymbol{U}_0\to\boldsymbol{U}(t,\boldsymbol{U}_0)$, 进而利用算子半群分解技巧构造了系统渐近紧的不变吸收集, 证明了系统存在整体吸引子.

[1] Zhang J W, Wang D X, Wu R H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2021 (in Chinese) [张建文, 王旦霞, 吴润衡 2008 物理学报 **57** 2021]

[2] Kriener C F, Zimmer J 2009 *Nonlinear Anal.* **70** 3146

[3] Chen S Q, Zhou S F, Li H Y 2008 *Commun. Appl. Math. Comput.* **22** 14 (in Chinese) [陈双全, 周盛凡, 李红艳 2008 应用数学与计算数学学报 **22** 14]

[4] Hollowood T J, Miramontes J L 2011 *J. High Energy Phys.* **4** 119

[5] Luo K F, Jiang X L, Yang Y L 2008 *Chin. Phys.* B **17** 2600

[6] Alvaro H S 2010 *Nonlinear Anal.* **11** 3930
[7] Taogetusang, Sirendaoerji 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5194 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2010 物理学报 **59** 5194]
[8] Ma L M, Wu Z M 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3099
[9] Lü D Z, Cui Y Y, Liu C H, Zhang Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6793 (in Chinese) [吕大昭, 崔艳英, 刘长河, 张艳 2010 物理学报 **59** 6793]
[10] Temam R 1988 *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics* (New York: Springer) pp1–648
[11] Zhang J W, Li J F, Wu R H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 070205 (in Chinese) [张建文, 李金峰, 吴润衡 2011 物理学报 **60** 070205]
[12] Wang D X, Zhang J W 2010 *J. Math. Anal. Appl.* **363** 468

The global attractor of nonlinear thermoelastic coupled Sine-Gordon system*

Zhang Jian-Wen1)† Ren Yong-Hua1) Wu Run-Heng2) Feng Tao1)

1) (*College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan* 030024*, China*)

2) (*College of Science, North China University of Technology, Beijing* 100041*, China*)

(Received 20 September 2011; revised manuscript received 20 October 2011)

Abstract

The dynamical behavior of a class of coupled system to the Sine-Gordon equations with the Peierls-Nabarro force is considered in this paper. First, the existence of the continuous solution is shown in the semi-group approach, under the certain initial-boundary value condition. Then, using the decomposing technique of semi-group, we construct the compact positively invariant sets, and the global attractor is proved.

Keywords: nonlinear thermal effect, Sine-Gordon equation, global attractor

PACS: 04.20.Ex, 02.30.Jr, 05.90.+m, 02.60.Lj

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10772131), the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 2010011008), and the Natural Science Foundation for Young Scientists of Shanxi Province, China (Grant No. 2011021002-2).

† E-mail: zhangjianwen@tyut.edu.cn