

## 脉冲信号被噪声调制的单模激光随机共振\*

张莉 元秀华<sup>†</sup> 武力

(华中科技大学光电子科学与工程学院, 武汉光电国家实验室, 武汉 430074)

(2011年9月22日收到; 2011年11月1日收到修改稿)

建立了一个脉冲信号受噪声调制的新型的单模激光随机共振模型, 采用线性化近似的方法计算了相应的光强关联函数和系统的输出信噪比, 并详细讨论了相应的随机共振现象. 研究表明: 由于噪声调制脉冲信号, 使得单模激光表现出崭新的随机共振现象, 即通过改变脉冲信号周期  $T$  来实现抑制或优化输出信噪比的目的.

**关键词:** 随机共振, 单模激光, 脉冲信号, 噪声调制

**PACS:** 05.40.Ca, 42.60.Mi

## 1 引言

随机共振 (SR) 研究近年来在基本理论、实验研究和应用开发等方面都有突出的新进展<sup>[1-14]</sup>. 2003 和 2004 年, Goychuk 等<sup>[1]</sup> 和 Casado-Pasoud 等<sup>[2]</sup> 提出非马尔科夫 SR 理论. 2004 年 Santos 等<sup>[9]</sup> 实验发现 SR 和相干共振 (CR) 共存的现象. 中国学者的文章指出自治 CR 向 SR 的过渡<sup>[8]</sup> 和噪声感应输运与 SR 的联系<sup>[7]</sup> 等. 近年来, 人们在人体科学中着重开拓 SR 在神经<sup>[3]</sup>、听觉<sup>[4]</sup>、和脑功能<sup>[5]</sup> 等方面的应用.

由于单模激光随机共振研究在现代激光通信中具有重要意义, 因此不少学者对其各个方面进行了广泛研究. 在考虑抽运噪声和量子噪声相关的基础上, 研究了噪声关联强度受信号的调制<sup>[10]</sup> 或信号频率受白噪声<sup>[11]</sup> 及色噪声<sup>[12]</sup> 调制等复杂情况下的单模激光. Wang 等<sup>[13]</sup> 研究了单模半导体激光的随机共振. Xu 等<sup>[14]</sup> 研究了单模激光在平方色抽运噪声驱动下的随机共振. 但是在上述提到的研究中, 激光器的调制信号多采用连续的周期余弦信号, 而在实际的光通信系统中, 激光器通常是被脉冲信号调制. 另外在上述的 SR 研究中, 外噪声和弱周期信号大多以加法形式引入系统, 而对外噪声和弱周期信号以乘法形式进入系统则研究较少. 因此本文提出的单模激光 SR 模型在两个方面不同于以

前的模型: 其一是采用现代激光通信使用的脉冲信号代替以前采用的余弦信号, 其二是考虑脉冲信号受到高斯白噪声的调制. 我们发现, 这一模型表现出单模激光随机共振的一个新的方面, 即脉冲信号周期  $T$  对信噪比的抑制与优化效应.

## 2 模型

和传统 SR 研究不同, 本文不采用余弦信号输入, 而是采用现代激光通信中需要的脉冲信号输入, 具体模型如下:

$$\frac{dI}{dt} = -2KI + \frac{2\Gamma I}{1 + \beta I} + D + \frac{2I}{1 + \beta I} \xi(t) + 2\sqrt{I}\eta(t) + \varsigma(t)f(t), \quad (1)$$

其中,  $I$  为激光光强,  $K$  为损失系数,  $\Gamma$  是增益系数,  $\beta = A/\Gamma$ ,  $A$  为自饱和系数. 如果去掉最后一项 (即信号项), 它就是单模激光增益噪声模型<sup>[15]</sup>. 设抽运噪声  $\xi(t)$  和量子噪声  $\eta(t)$  之间存在关联<sup>[16,17]</sup>

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= \langle \eta(t) \rangle = 0, \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= Q\delta(t - t'), \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= D\delta(t - t'), \\ \langle \xi(t)\eta(t') \rangle &= \langle \xi(t')\eta(t) \rangle \\ &= \lambda\sqrt{QD}\delta(t - t'), \\ &(-1 \leq \lambda \leq 1), \end{aligned} \quad (2)$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61103248) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: Yuanxh@mail.hust.edu.cn

式中  $Q$  和  $D$  分别为抽运噪声和量子噪声强度,  $\lambda$  是衡量噪声间关联程度的参数. 新引入的脉冲信号  $f(t)$  是平方正弦脉冲:

$$f(t) = \begin{cases} B \sin^2 \left[ \frac{\pi(t - nT)}{2\tau} \right], & t \in (nT, nT + 2\tau) \\ (n = 0, 1, 2, 3, \dots), & \\ 0, & t \in (nT + 2\tau, (n+1)T) \\ (n = 0, 1, 2, 3, \dots), & \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $B$  是脉冲信号的振幅,  $T$  是脉冲信号的周期,  $2\tau$  是脉冲信号持续的时间.  $f(t)$  被高斯白噪声  $\varsigma(t)$  所调制, 其统计性质为

$$\begin{aligned} \langle \varsigma(t) \rangle &= 0, \\ \langle \varsigma(t)\varsigma(t') \rangle &= L\delta(t - t'), \\ \langle \varsigma(t)\xi(t') \rangle &= \langle \varsigma(t)\eta(t') \rangle = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $L$  为高斯白噪声强度. 由于线性近似有着别的近似所不具有的优点, 即对信号和噪声没有过多的要求, 所以本文采用这一近似方法处理 (1) 式, 以便求得光强关联函数和输出信噪比. 下面将会看到, 由于脉冲信号  $f(t)$  受到噪声  $\varsigma(t)$  的调制, 使得输出信噪比  $R$  随脉冲信号周期  $T$  的变化曲线出现新型的极值化现象.

### 3 光强关联函数和信噪比

首先将 (1) 式在确定论定态光强  $I_0$  附近线性化, 即令

$$I = I_0 + \varepsilon(t), \quad (5)$$

其中,  $I_0 = (\Gamma - K)/(\beta K)$ ,  $\varepsilon(t)$  为微扰项. 将 (5) 式代入 (1) 式, 略去  $\varepsilon(t)$  的高次项, 可得线性化的光强演化方程<sup>[15]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= -\gamma\varepsilon(t) + \frac{2I_0}{1 + \beta I_0} \xi(t) + 2\sqrt{I_0}\eta(t) \\ &+ D + \varsigma(t)f(t), \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $\gamma = 2K(\Gamma - K)/\Gamma$ .

光强关联函数  $c(t)$  定义为  $\lim_{t' \rightarrow \infty} \langle I(t')I(t'+t) \rangle$ , 而

$$\begin{aligned} \langle I(t')I(t'+t) \rangle &= I_0^2 + I_0 \langle \varepsilon(t') \rangle + I_0 \langle \varepsilon(t'+t) \rangle \\ &+ \langle \varepsilon(t')\varepsilon(t'+t) \rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

可见, 为了求  $c(t)$ , 须由 (6) 式解出  $\varepsilon(t)$ . 设  $t' = 0$  时,  $\varepsilon(0) = 0$ , 则

$$\varepsilon(t') = e^{-\gamma \int_0^{t'} dx''} \int_0^{t'} \left[ \frac{2I_0}{1 + \beta I_0} \xi(x) + 2\sqrt{I_0}\eta(x) \right.$$

$$\left. + D + \varsigma(x)f(x) \right] e^{\gamma \int_0^{x'} dx'} dx. \quad (8)$$

由噪声  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  和  $\varsigma(t)$  的统计性质知,  $\varepsilon(t')$  和  $\varepsilon(t'+t)$  的平均值在  $t' \rightarrow \infty$  时是一常数  $DI_0/\gamma$ , 故 (7) 式前三项的傅里叶变换为

$$(I_0^2 + 2DI_0/\gamma)2\pi\delta(\omega), \quad (9)$$

$\omega$  为频率. 从 (9) 式可知道, 它们对输出信号总功率和输出噪声平均功率的贡献均可不予列入. 这是因为标准的信噪比定义为输出信号总功率  $P_S$  ( $P_S = \int_{0^+}^{\infty} S_1(\omega)d\omega$ ,  $S_1(\omega)$  为输出信号功率谱) 与输出噪声在脉冲信号频率  $\omega = 2\pi/T$  处的平均功率之比, 显然 (9) 式对  $P_S$  不产生贡献, 而对噪声平均功率则由于脉冲信号排除零频, 故也不产生贡献. 因此我们可以直接写出

$$\begin{aligned} c(t) &= \lim_{t' \rightarrow \infty} \langle I(t')I(t'+t) \rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty} \langle \varepsilon(t')\varepsilon(t'+t) \rangle \\ &= \lim_{t' \rightarrow \infty} \left\langle \left( e^{-\gamma t'} \int_0^{t'} \left[ \frac{2I_0}{1 + \beta I_0} \xi(x) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\sqrt{I_0}\eta(x) + D + \varsigma(x)f(x) \right] e^{\gamma x} dx \right. \\ &\quad \left. \times e^{-\gamma(t'+t)} \int_0^{t'+t} \left[ \frac{2I_0}{1 + \beta I_0} \xi(x_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\sqrt{I_0}\eta(x_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + D + \varsigma(x_1)f(x_1) \right] e^{x_1} dx_1 \right\rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

(10) 式展开后共有 16 项, 根据  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  和  $\varsigma(t)$  的统计性质, 只有 6 项不为零, 记为

$$\begin{aligned} c(t) &= \lim_{t' \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^6 \bar{c}_i \\ &= \lim_{t' \rightarrow \infty} \langle \varepsilon(t')\varepsilon(t'+t) \rangle_1 \\ &\quad + \lim_{t' \rightarrow \infty} \langle \varepsilon(t')\varepsilon(t'+t) \rangle_2, \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $\langle \varepsilon(t')\varepsilon(t'+t) \rangle_1$  和  $\langle \varepsilon(t')\varepsilon(t'+t) \rangle_2$  分别为输出信号和输出噪声部分. 而

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= e^{-\gamma t'} e^{-\gamma(t'+t)} \int_0^{t'} D e^{\gamma x} dx \\ &\quad \times \int_0^{t'+t} D e^{\gamma x_1} dx_1, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_2 &= e^{-\gamma t'} e^{-\gamma(t'+t)} \int_0^{t'} \frac{2I_0}{1 + \beta I_0} e^{\gamma x} dx \\ &\quad \times \int_0^{t'+t} \frac{2I_0}{1 + \beta I_0} \langle \xi(x)\xi(x_1) \rangle e^{\gamma x_1} dx_1, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\bar{c}_3 = e^{-\gamma t'} e^{-\gamma(t'+t)} \int_0^{t'} 2\sqrt{I_0} e^{\gamma x} dx$$

$$\times \int_0^{t'+t} 2\sqrt{I_0} \langle \eta(x) \eta(x_1) \rangle e^{\gamma x_1} dx_1, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_4 &= e^{-\gamma t'} e^{-\gamma(t'+t)} \int_0^{t'} f(x) e^{\gamma x} dx \\ &\times \int_0^{t'+t} f(x_1) \langle \zeta(x) \zeta(x_1) \rangle e^{\gamma x_1} dx_1, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_5 &= e^{-\gamma t'} e^{-\gamma(t'+t)} \int_0^{t'} \frac{2I_0}{1+\beta I_0} e^{\gamma x} dx \\ &\times \int_0^{t'+t} 2\sqrt{I_0} \langle \xi(x) \eta(x_1) \rangle e^{\gamma x_1} dx_1, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_6 &= e^{-\gamma t'} e^{-\gamma(t'+t)} \int_0^{t'} 2\sqrt{I_0} e^{\gamma x} dx \\ &\times \int_0^{t'+t} \frac{2I_0}{1+\beta I_0} \langle \eta(x) \xi(x_1) \rangle e^{\gamma x_1} dx_1. \quad (17) \end{aligned}$$

下面分别求  $\langle \varepsilon(t') \varepsilon(t'+t) \rangle_1$  和  $\langle \varepsilon(t') \varepsilon(t'+t) \rangle_2$  及相应的功率谱  $S_1(\omega)$  和  $S_2(\omega)$ ,

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(t') \varepsilon(t'+t) \rangle_1 &= \bar{c}_4 \\ &= e^{-\gamma(2t'+t)} LB^2 \int_0^{t'} \sin^4 \left( \frac{\pi(x-nT)}{2\tau} \right) \\ &\times e^{2\gamma x} dx. \quad (18) \end{aligned}$$

完成积分并对每一周期平均, 令  $t' \rightarrow \infty$  后进行傅里叶变换, 可得到输出信号功率谱  $S_1(\omega)$  为

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t' \rightarrow \infty} \langle \varepsilon(t') \varepsilon(t'+t) \rangle_1 e^{i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} M e^{-\gamma t} e^{i\omega t} dt \\ &= M \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}, \quad (19) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} M &= \frac{LB^2}{T} (e^{4\gamma\tau} - 1) \left[ \frac{3}{16\gamma} - \frac{\gamma}{4\gamma^2 + \pi^2/\tau^2} \right. \\ &\left. + \frac{\gamma}{8(4\gamma^2 + 4\pi^2/\tau^2)} \right]. \end{aligned}$$

输出信号总功率为

$$P_s = \int_0^{\infty} S_1(\omega) d\omega = M\pi. \quad (20)$$

由(12)—(14)及(16), (17)各式, 不难计算出输出噪声功率谱

$$\begin{aligned} S_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t' \rightarrow \infty} \langle \varepsilon(t') \varepsilon(t'+t) \rangle_2 e^{i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} N e^{-\gamma t} e^{i\omega t} dt \\ &= N \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}, \quad (21) \end{aligned}$$

其中

$$N = \frac{DI_0}{\gamma} + \frac{\lambda\sqrt{QDI_0}^3/2}{2\gamma(1+\beta I_0)} + \frac{QI_0^2}{\gamma(1+\beta I_0)^2}.$$

输出噪声在脉冲信号频率为  $2\pi/T$  时的平均功率为

$$S_2\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right) = N \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \left(2\pi/T\right)^2}, \quad (22)$$

最后, 由(20)和(22)式得信噪比

$$\begin{aligned} R &= \frac{P_s}{S_2\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)} \\ &= \frac{M\pi\left(\gamma^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right)}{2N\gamma}. \quad (23) \end{aligned}$$

## 4 结果和讨论

在线性近似下, 本文模型显示两种类型的 SR: 一种是信噪比  $R$  随噪声强度  $Q$  或  $D$  的变化曲线出现极大值, 这是传统的 SR; 另一种是本文模型特有的, 信噪比  $R$  随脉冲信号周期  $T$  的变化曲线有两个极值, 一个极小值和一个极大值, 它是广义意义下的 SR.

1)  $R$ - $Q$  曲线, 分别用脉冲信号的占空比  $2\tau/T$  和噪声的关联程度  $\lambda$  为参数, 作  $R$ - $Q$  曲线如图 1 所示. 图 1(a) 显示,  $R$ - $Q$  曲线有极大值. 当  $2\tau/T$  逐渐减小, 峰变低, 位置不变. 图 1(b) 则呈现不同的特点: 当  $\lambda$  由  $-1$  逐渐增大至  $+1$  时, 曲线极大值位置左移, 峰高下降, 共振峰最后消失, 曲线单调下降.

2)  $R$ - $D$  曲线和  $R$ - $Q$  曲线定性上完全类似, 也属于传统 SR. 如图 2 所示.

3)  $R$ - $T$  曲线, 分别以  $2\tau/T$  和  $\lambda$  为参数, 绘出的信噪比  $R$  随信号周期  $T$  变化的  $R$ - $T$  曲线如图 3 所示. 图 3(a) 显示, 在占空比  $2\tau/T$  取定值情况下, 改变信号周期  $T$ , 则  $R$  随着  $T$  的增大先经历一极小, 再出现一极大. 改变占空比  $2\tau/T$  的取值, 则极小值的深度、共振峰的高度以及极值的位置均发生变化. 具体为: 当  $2\tau/T$  取值从 1 开始减小, 取值 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 则峰和谷的位置均向右移, 但峰变低, 谷变浅. 这是新型的 SR, 即通过改变脉冲信号周期  $T$  来达到抑制或优化信噪比的目的.

图 3(b) 是以噪声关联程度  $\lambda$  为参数的  $R$ - $T$  曲线. 可看出  $R$ - $T$  曲线在  $\lambda$  的整个值域  $[-1, 1]$  均处于抑制与共振并存的状态. 随着  $T$  的增大, 先呈现极小后出现极大值. 改变参数  $\lambda$ , 由  $-1$  增至  $+1$ , 曲线逐渐下降, 但极值位置不变.

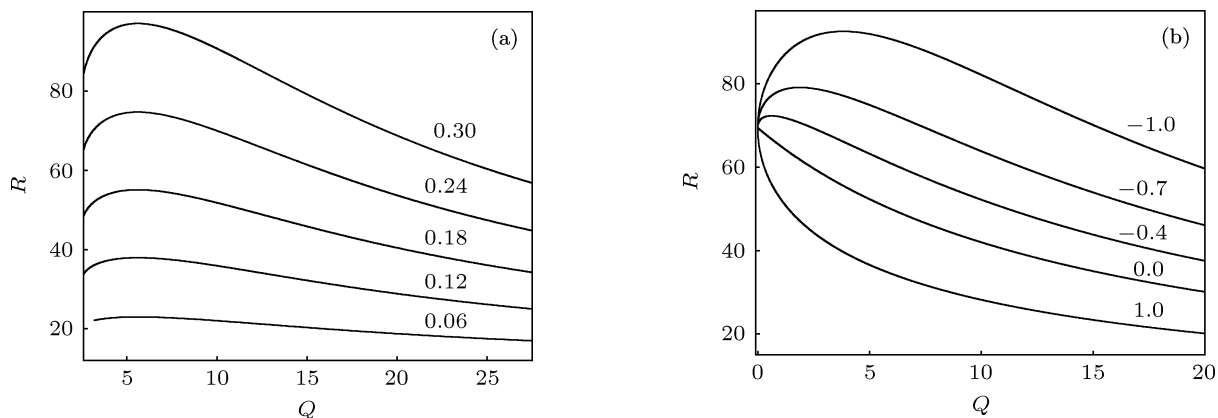


图1  $D = 1.5, B = 1, T = 1, L = 1, r = 1.2, I_0 = 0.1, \beta = 0.1$  时, 信噪比  $R$  随抽运噪声强度  $Q$  的变化曲线 (a)  $2\tau/T = 0.3, 0.24, 0.18, 0.12, 0.06, \lambda = -1$ ; (b)  $\lambda = -1, -0.7, -0.4, 0, 1, 2\tau/T = 0.3$

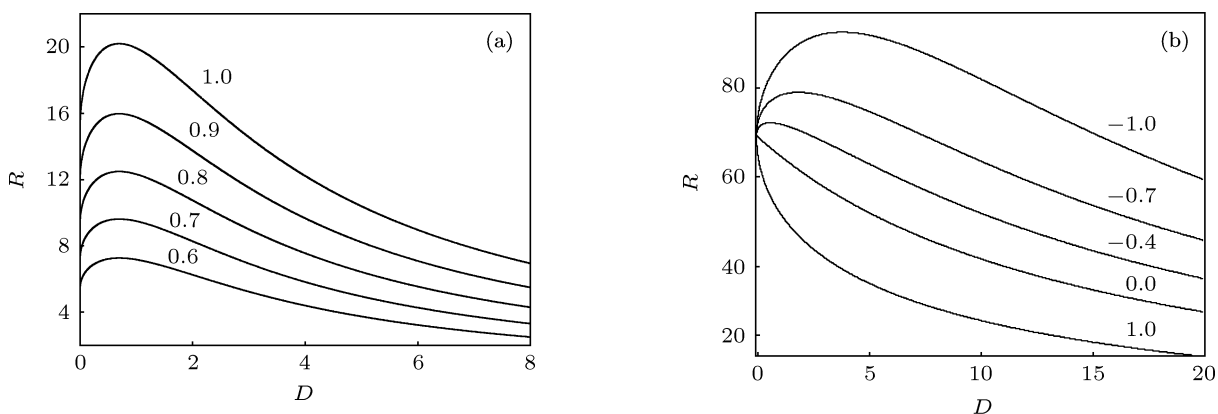


图2  $D = 1.5, B = 1, T = 1, L = 1, r = 1.2, I_0 = 2, \beta = 0.1$  时, 信噪比  $R$  随量子噪声强度  $D$  的变化曲线 (a)  $2\tau/T = 1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, \lambda = -1$ ; (b)  $\lambda = -1, -0.7, -0.4, 0, 1, 2\tau/T = 0.3$

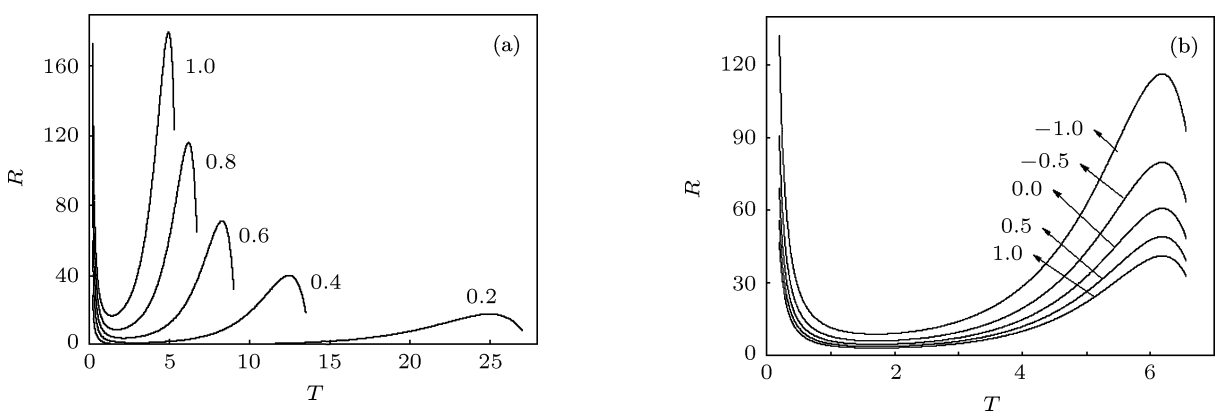


图3  $Q = 2, D = 1.5, B = 1, L = 1, r = 1.2, I_0 = 2, \beta = 0.1$  时, 信噪比  $R$  随脉冲信号周期  $T$  的变化曲线 (a)  $2\tau/T = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, \lambda = -1$ ; (b)  $\lambda = -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2\tau/T = 0.8$

## 5 结论

从上面的讨论可知, 抽运噪声与量子噪声间的关联强度  $\lambda$  是个非常重要的参数, 它的正负决定

了  $R$ - $Q$ (或  $R$ - $D$ ) 曲线是否出现 SR 现象. 即在负  $\lambda$  且绝对值较大时信噪比  $R$  出现极大值, 随着负  $\lambda$  绝对值变小, 以及  $\lambda$  取正值, 共振峰消失, 曲线单调变化. 脉冲信号的占空比  $2\tau/T$  可以增强 SR 现象.  $R$ - $Q$ (或  $R$ - $D$ ) 曲线的共振峰随着占空比  $2\tau/T$  的增

加, 高度增加, 但位置不变.  $R$ - $T$  曲线随着信号周期  $T$  的增大出现先抑制后共振的新特性. 共振峰

的高度可由  $\lambda$  或  $2\tau/T$  来控制. 峰和谷的位置取决于  $2\tau/T$  的大小, 但不受  $\lambda$  的影响.

- [1] Goychuk I, Hanggi P 2004 *Phys. Rev. E* **69** 021104
- [2] Casado-Pascual J, Gomez-Ordóñez J, Morillo M 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 210601
- [3] Volman V, Levine H 2008 *Phys. Rev. E* **77** 060903
- [4] Long Z C, Qin Y G 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 208103
- [5] Hidaka I, Nozaki D, Yamamoto Y 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3740
- [6] Liu L, Wu D J 2009 *College Physics* **16** 28 (in Chinese) [刘立, 吴大进 2009 大学物理 **16** 28]
- [7] Zheng Z G, Hu G, Hu B B 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2273
- [8] Cao Z J, Li P F, Hu G 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 882
- [9] Santos G J E, Rivera M, Parmananda P 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 230601
- [10] Chen D Y, Wang Z L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 102 (in Chinese) [陈德彝, 王忠龙 2009 物理学报 **58** 102]
- [11] Zhang L Y, Jin G X, Cao L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4706 (in Chinese) [张良英, 金国祥, 曹力 2008 物理学报 **57** 4706]
- [12] Jin G X, Zhang L Y, Cao L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1380
- [13] Wang J, Bai Y M, Cao L, Wu D J 2006 *Physica A* **368** 31
- [14] Xu D S, Cao L, Wu D J 2009 *Int. J. Mod. Phys. B* **22** 4665
- [15] Hernandez-Garcia E, Toral R, San Miguel M 1990 *Phys. Rev. A* **42** 6823
- [16] Zhu S Q 1993 *Phys. Rev. A* **47** 2405
- [17] Wang J, Zhu S Q 1995 *Phys. Lett. A* **207** 47

## Stochastic resonance for pulse signal modulated by noise in a single-mode laser system\*

Zhang Li Yuan Xiu-Hua<sup>†</sup> Wu Li

(Wuhan National Laboratory for Optoelectronics, College of Optoelectronic Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

(Received 22 September 2011; revised manuscript received 1 November 2011)

### Abstract

A new model of stochastic resonance, in which the pulse signal is modulated by noise, is established for a single-mode laser system. The corresponding intensity correlation function and the output signal-to-noise ratio of the system are calculated in the linear approximation. The phenomena of stochastic resonance are thoroughly discussed. Results reveal that due to the pulse signal modulated by noise, the single-mode laser exhibits a novel stochastic resonance phenomenon, that is, the optimization or the restraint of output signal-to-noise ratio can be controlled by the adjustment of the pulse signal period  $T$ .

**Keywords:** stochastic resonance, single mode laser, pulse signal, modulated by noise

**PACS:** 05.40.Ca, 42.60.Mi

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61103248).

<sup>†</sup> E-mail: Yuanxh@mail.hust.edu.cn