

# 一个基于 Chen 系统的新混沌系统的分析与同步\*

张国山<sup>†</sup> 牛弘

(天津大学电气与自动化工程学院, 天津 300072)

(2011 年 7 月 20 日收到; 2011 年 10 月 27 日收到修改稿)

通过在 Chen 系统的第一个方程中加入一个可变系数的乘积项, 构造了一个新的三维自治混沌系统. 新系统可通过调节其可变系数实现不同系数组合下系统的混沌产生或混沌抑制, 即调节该乘积项的可变系数, 可使不出现混沌的 Chen 系统产生混沌现象, 同时也可使产生混沌运动的 Chen 系统不再产生混沌现象. 详细分析了新系统的特性, 研究了新系统的混沌同步问题, 并给出了相应的仿真结果.

**关键词:** Chen 系统, 新三维自治混沌系统, 混沌抑制, 混沌同步

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Pq, 05.45.Xt

## 1 引言

混沌运动是 1963 年由美国气象学家 Lorenz<sup>[1,2]</sup> 在研究区域小气候、求解他所提出的模型方程时首先发现的. 自那之后, 混沌运动得到了全世界科学工作者的普遍关注. 1999 年, 陈关荣等<sup>[2,3]</sup> 在 Lorenz 系统的基础上, 利用工程反馈控制的方法构造了一个新的三维自治混沌系统, 这就是著名的 Chen 系统. 随后, 吕金虎等<sup>[4]</sup> 又提出了一个新的 Lü 混沌系统, 该系统建立了 Lorenz 系统与 Chen 系统之间的桥梁<sup>[5]</sup>. 近年来, 随着对混沌运动研究的不断深入, 人们提出了许多新的混沌系统, 如 Qi 系统<sup>[6,7]</sup>、Liu 系统<sup>[8]</sup> 等.

由于混沌运动具有丰富而复杂的非线性动力学行为, 如貌似随机但在一定程度上又具有确定性, 具有层层嵌套、自相似的分形结构, 对初值极其敏感, 故被戏称为“蝴蝶效应”. 混沌运动及相关理论已经应用到信号处理、保密通信、弱信号检测、混沌电路等多个领域中. 随着人们对混沌运动认识的不断深入, 混沌运动的研究与应用必将得到更大的发展.

本文通过在 Chen 系统的第一个方程中加入一

个可变系数的乘积项, 构造了一个新的三维自治混沌系统. 新系统可通过调节其可变系数实现原 Chen 系统在不同系数组合下的混沌产生或混沌抑制. 对可变系数的值选取的灵活性使新系统的应用范围极其广泛, 它不仅运用到保密通信等需要使系统产生混沌的实际应用中, 同时, 由于它具有混沌抑制的功能, 也可以运用到抑制混沌干扰等过程中. 本文还采用单变量单向耦合替换法对新系统进行了同步控制, 实现了响应系统与驱动系统的混沌同步.

## 2 新系统的模型与基本特性

### 2.1 新系统的模型

Chen 系统的模型如下所示:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $x, y, z \in \mathbb{R}$  为状态变量,  $a, b, c$  为已知正常数, 当  $a = 35, b = 3, c = 28$  时, 系统产生混沌. 其相轨迹如图 1 所示.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61074088) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: zhanggs@tju.edu.cn

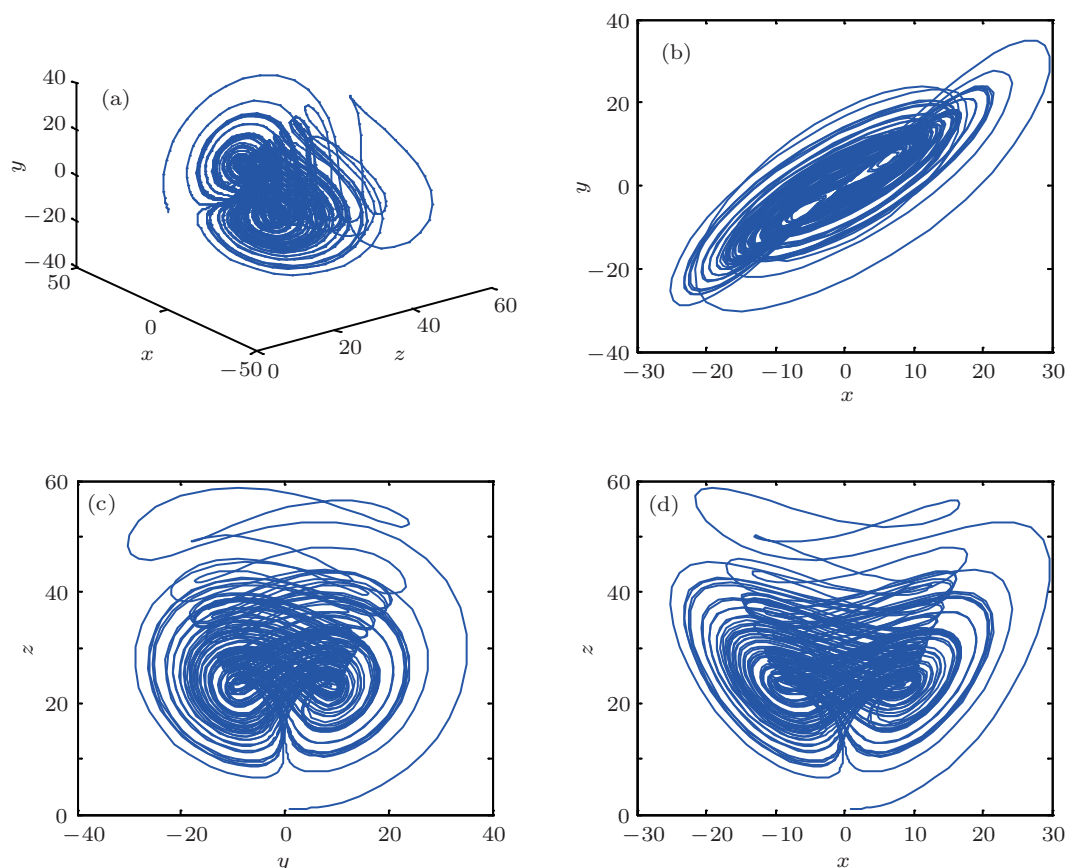


图1  $a = 35, b = 3, c = 28$ , 初值为  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$  时, Chen 系统 (1) 式的相轨迹图 (a)  $x-y-z$ ; (b)  $x-y$ ; (c)  $y-z$ ; (d)  $x-z$

本文提出的新系统是在 Chen 系统 (1) 式的第一个方程中加入一个可变系数的乘积项, 通过调整该可变系数可使新系统在不同的系数组合下产生或抑制混沌运动. 新系统的模型如下所示:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x) + Hyz, \\ \dot{y} &= (c-a)x - xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $H \in \mathbb{R}$  为可变系数.

## 2.2 对称性

新系统 (2) 式关于  $z$  轴对称, 即通过坐标变换  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ , 系统的模型并不发生改变.

## 2.3 耗散性

新系统 (2) 式满足如下等式:

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$$

$$= -a + c - b = -(a + b - c),$$

其中  $V$  表示相体积. 当上式满足  $(a + b - c) > 0$  时,  $\nabla V = -(a + b - c) < 0$ , 新系统 (2) 式是耗散的. 这说明当选取参数满足  $(a + b - c) > 0$  时, 系统的状态变化是有界的<sup>[5]</sup>, 而这与  $H$  的选取无关. 系统的指数衰减率为

$$\frac{dV}{dt} = e^{-(a+b-c)},$$

即当系统的初始状态为  $V_0$  时, 经过时间  $t$ , 系统的状态衰减为  $V_0 e^{-(a+b-c)t}$ .

## 2.4 系统平衡点的特性

根据平衡状态的性质, 令 (2) 式的右边为 0, 得到新系统 (2) 式的平衡状态方程为

$$\begin{aligned} a(y-x) + Hyz &= 0, \\ (c-a)x - xz + cy &= 0, \\ xy - bz &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

解方程组 (3) 式, 根据  $a, b, c$  和  $H$  的不同取值, 讨论可得以下几种情况.

令

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 3Habc + a^2b(1-H), \\
 m_2 &= \sqrt{[3Habc + a^2b(1-H)]^2 - 4H^2a^2b^2c(2c-a)} \\
 &= \sqrt{a^2b^2[(a-c)^2H^2 - 2a(a-3c)H + a^2]}, \\
 x_1 &= \frac{ab\sqrt{2H^2c(m_1+m_2)}}{2H^2abc - H(m_1+m_2)}, \\
 x_2 &= \frac{ab\sqrt{2H^2c(m_1-m_2)}}{2H^2abc - H(m_1-m_2)}, \\
 y_1 &= \sqrt{\frac{m_1+m_2}{2H^2c}}, \\
 y_2 &= \sqrt{\frac{m_1-m_2}{2H^2c}}, \\
 z_1 &= \frac{a(m_1+m_2)}{2H^2abc - H(m_1+m_2)}, \\
 z_2 &= \frac{a(m_1-m_2)}{2H^2abc - H(m_1-m_2)},
 \end{aligned}$$

则新系统 (2) 式的平衡点可表示为:

I  $2c - a < 0$ , 即  $a > 2c$ . 新系统 (2) 式有 3 个平衡点, 分别为  $S_1 = (0, 0, 0)$ ,  $S_2 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $S_3 = (-x_1, -y_1, z_1)$ .

II  $2c - a = 0$ , 即  $a = 2c$ . 当  $H \leq -2$  时, 新系统 (2) 式有 3 个平衡点, 分别为  $S_1 = S_2 = S_3 = (0, 0, 0)$ ; 当  $H > -2$  时, 新系统 (2) 式有 5 个平衡点, 分别为  $S_1 = S_2 = S_3 = (0, 0, 0)$ ,  $S_4 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $S_5 = (-x_1, -y_1, z_1)$ .

III  $2c - a > 0$ , 即  $a < 2c$ .

1) 当

$$\begin{aligned}
 &\frac{a(a-3c) - 2a\sqrt{c(2c-a)}}{(a-c)^2} \\
 &< H < \frac{a(a-3c) + 2a\sqrt{c(2c-a)}}{(a-c)^2}
 \end{aligned}$$

时, 新系统 (2) 式仅有 1 个平衡点, 为  $S_1 = (0, 0, 0)$ ;

2) 当

$$H < \frac{a(a-3c) - 2a\sqrt{c(2c-a)}}{(a-c)^2}$$

或

$$H > \frac{a(a-3c) + 2a\sqrt{c(2c-a)}}{(a-c)^2}$$

时, 若  $H < \frac{a}{a-3c}$ , 则新系统 (2) 式仅有 1 个平衡点, 为  $S_1 = (0, 0, 0)$ ; 若  $H > \frac{a}{a-3c}$ , 则新系

统 (2) 式有 5 个平衡点, 分别为  $S_1 = (0, 0, 0)$ ,  $S_2 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $S_3 = (-x_1, -y_1, z_1)$ ,  $S_4 = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $S_5 = (-x_2, -y_2, z_2)$ .

3) 当

$$H = \frac{a(a-3c) - 2a\sqrt{c(2c-a)}}{(a-c)^2}$$

或

$$H = \frac{a(a-3c) + 2a\sqrt{c(2c-a)}}{(a-c)^2}$$

时,  $m_2 = 0$ , 若  $H > \frac{a}{a-3c}$ , 则新系统 (2) 式有 3 个平衡点, 分别为  $S_1 = (0, 0, 0)$ ,  $S_2 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $S_3 = (-x_1, -y_1, z_1)$ ; 若  $H < \frac{a}{a-3c}$ , 则新系统 (2) 式仅有 1 个平衡点, 为  $S_1 = (0, 0, 0)$ ; 若  $H = \frac{a}{a-3c}$ , 则新系统 (2) 式有 3 个平衡点, 分别为  $S_1 = S_2 = S_3 = (0, 0, 0)$ .

### 3 新系统混沌运动的产生

#### 3.1 新系统可变系数 $H$ 的选取与固定 $H$ 下新系统的相轨迹

在新系统 (2) 式中, 合理选取可变系数  $H$  的值, 可使 Chen 系统 (1) 式中某些不产生混沌的系数组合产生混沌现象.

选取  $a = 23$ ,  $b = 3$ ,  $c = 18$ , 初值为  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ , 此时 Chen 系统 (1) 式的 Lyapunov 指数分别为  $\lambda_1 = 0.0023856 \approx 0$ ,  $\lambda_2 = -0.042021 < 0$ ,  $\lambda_3 = -7.9604 < 0$ , 各相轨迹曲线如图 2 所示. 可见, 此时的 Chen 系统 (1) 式处于周期运动状态, 并未产生混沌运动, 这与图 3 所示的当  $H = 0$  时新系统 (2) 式关于  $x$  的分岔图相符.

固定  $a = 23$ ,  $b = 3$ ,  $c = 18$ , 使  $H \geq 0$  且在  $[0, 40]$  之间变化, 可得新系统 (2) 式随  $H$  变化时关于  $x$  的分岔图及相应的 Lyapunov 指数谱, 分别如图 3 和图 4 所示.

对比图 3 和图 4 可以看出, 新系统 (2) 式随  $H$  变化的分岔图和 Lyapunov 指数谱是一一对应且一致相符的. 当  $\lambda_1 \approx 0$ ,  $\lambda_2, \lambda_3 < 0$  时, 新系统处于周期状态; 当  $\lambda_1 \approx 0$ ,  $\lambda_2 \approx 0$ ,  $\lambda_3 < 0$  时, 新系统处于二维拟周期状态; 当  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 \approx 0$ ,  $\lambda_3 < 0$  时, 新系统处于混沌状态. 同时还可以看出, 当  $H \in [22.2, 40]$  时,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 \approx 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ , 说明

系统一直处于混沌状态. 表 1 给出了几个不同的  $H$  值所对应的 Lyapunov 指数值. 选择  $H = 26.1$ , 此时  $\lambda_1 = 1.3956, \lambda_2 = -2.99 \times 10^{-5}, \lambda_3 = -9.3956$ , 可计算出新系统 (2) 式的 Lyapunov 维数  $d_L$  [9] 为

$$d_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$$

$$= 2 + \frac{1.3956 - 2.99 \times 10^{-5}}{9.3956} = 2.1485,$$

其中  $j$  是使  $\sum_{i=1}^j \lambda_i > 0$  的最大整数.

由上式可见, 当  $H = 26.1$  时,  $d_L$  是一分数维, 说明新系统 (2) 式确实存在混沌现象. 选取新系统 (2) 式的初值仍为  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ , 对该系统进行仿真, 其各相轨迹曲线如图 5 所示.

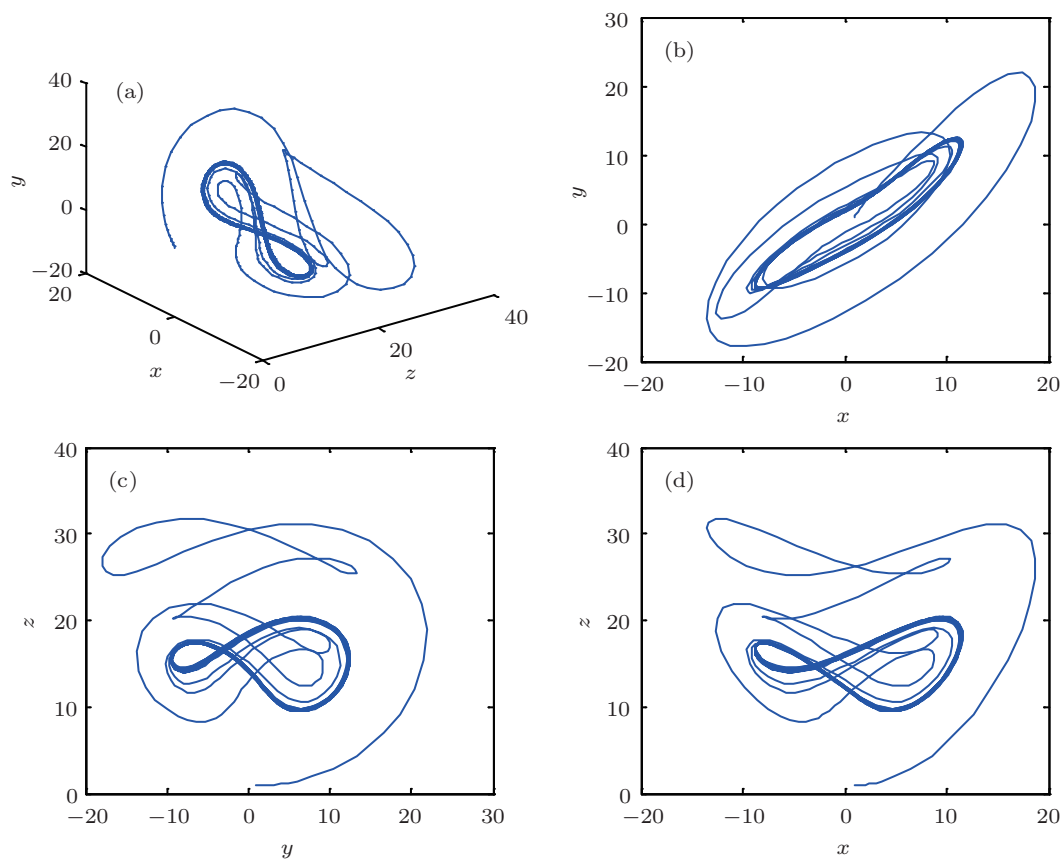


图 2  $a = 23, b = 3, c = 18$ , 初值为  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$  时, Chen 系统 (1) 式的相轨迹图 (a)  $x$ - $y$ - $z$ ; (b)  $x$ - $y$ ; (c)  $y$ - $z$ ; (d)  $x$ - $z$

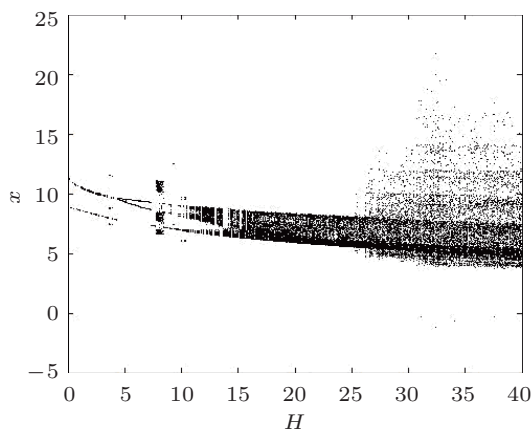


图 3 新系统 (2) 式随  $H$  变化时关于  $x$  的分岔图

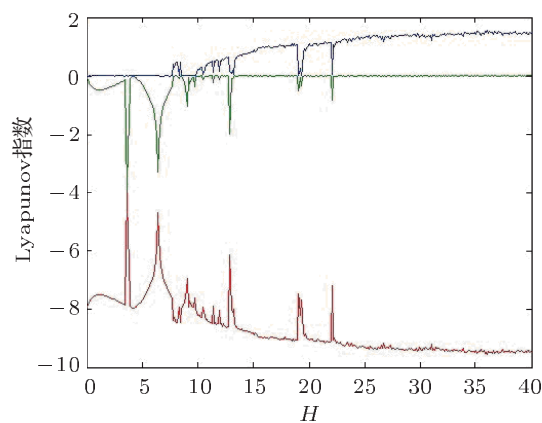


图 4 新系统 (2) 式随  $H$  变化的 Lyapunov 指数谱

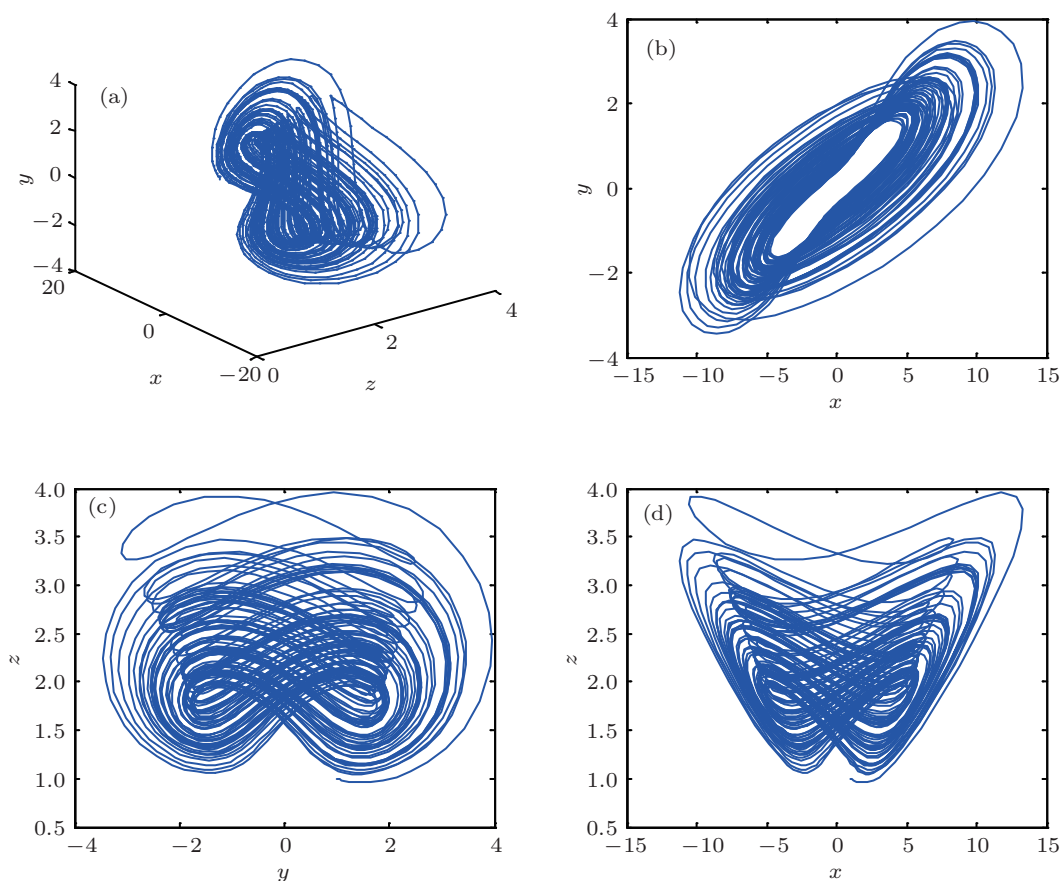


图5 当  $a = 23, b = 3, c = 18, H = 26.1$ , 初值  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$  时, 新系统 (2) 式各相迹曲线 (a)  $x-y-z$ ; (b)  $x-y$ ; (c)  $y-z$ ; (d)  $x-z$

表1 不同  $H$  值所对应的 Lyapunov 指数值

$H$	$\lambda_1$	$\lambda_2/10^{-5}$	$\lambda_3$
21.5	1.1356	-4.91	-9.1356
25.2	1.3566	-3.80	-9.3566
26.1	1.3956	-2.99	-9.3956
32.7	1.4163	4.81	-9.4164
23.8	1.1748	5.46	-9.1749
15.9	1.0083	8.75	-9.0084

对比图 5 与图 1 可以发现, 当新系统 (2) 式与 Chen 系统 (1) 式具有相同的初值时, 新系统 (2) 式的各相迹曲线与 Chen 系统 (1) 式在形状上有相似之处. 但是, 加入了非线性乘积项的新系统 (2) 式的吸引子范围与 Chen 系统 (1) 式相比明显缩小, 这有利于新系统 (2) 式的电路实现. 因为在电路实现中, 所选用的模拟元器件的输入电压一般在  $\pm 15\text{ V}$  左右, 若吸引子范围太大, 则需对系统模型进行一定的数学变化后才可以进行其相应电路的实现.

### 3.2 $a = 23, b = 3, c = 18, H = 26.1$ 时新系统的耗散性

当  $a = 23, b = 3, c = 18, H = 26.1$  时,  $(a + b - c) = 23 + 3 - 18 = 8 > 0$ , 新系统 (2) 式满足耗散性条件  $\nabla V = -(a + b - c) = -8 < 0$ , 且系统的耗散性与可变系数  $H$  的取值无关, 则在  $a = 23, b = 3, c = 18$  下, 新系统 (2) 式是耗散的.

### 3.3 $a = 23, b = 3, c = 18, H = 26.1$ 时新系统的平衡点分析

当  $a = 23, b = 3, c = 18, H = 26.1$  时, 新系统 (2) 式共有 5 个平衡点, 分别为

$$\begin{aligned}
 S_1 &= (0, 0, 0), \\
 S_2 &= (3.5686, 1.2972, 1.5430), \\
 S_3 &= (-3.5686, -1.2972, 1.5430), \\
 S_4 &= (12.8598, -1.7320, -7.4243), \\
 S_5 &= (-12.8598, 1.7320, -7.4243).
 \end{aligned}$$

现以平衡点  $S_1 = (0, 0, 0)$  为例对平衡点处的相关特性进行分析. 在平衡点  $S_1 = (0, 0, 0)$  处对新系统 (2) 式进行线性化, 可得其 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}.$$

该 Jacobian 矩阵中并不包含可变系数  $H$ . 又因为  $a, b, c$  为新系统 (2) 式的已知参数, 则该 Jacobian 矩阵为一常矩阵. 其特征方程为

$$f(\lambda') = (\lambda' + a)(\lambda' - c)(\lambda' + b) + a(a - c)(\lambda' + b) = (\lambda' + b)[\lambda'^2 + (a - c)\lambda' + a^2 - 2ac].$$

求解该特征方程, 得其特征根分别为

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= -b, \\ \lambda'_2 &= \frac{-(a - c) + \sqrt{(a - c)^2 - 4(a^2 - 2ac)}}{2} \\ &= \frac{-(a - c) + \sqrt{-3(a - c)^2 + 4c^2}}{2}, \\ \lambda'_3 &= \frac{-(a - c) - \sqrt{(a - c)^2 - 4(a^2 - 2ac)}}{2} \\ &= \frac{-(a - c) - \sqrt{-3(a - c)^2 + 4c^2}}{2}. \end{aligned}$$

将  $a = 23, b = 3, c = 18$  代入到特征根的表达式中, 求得该组系数下的 3 个特征根分别为

$$\lambda'_1 = -3,$$

$$\lambda'_2 = 14.9714,$$

$$\lambda'_3 = -19.9714,$$

其中  $\lambda'_2 > 0, \lambda'_1, \lambda'_3 < 0$ , 则平衡点  $S_1 = (0, 0, 0)$  为一鞍结点. 其余 4 个平衡点的分析方法与此处相同, 各平衡点的性质分别如表 2 中所示.

从表 2 中可以看出, 当  $a = 23, b = 3, c = 18, H = 26.1$  时, 新系统 (2) 式存在不稳定平衡点, 使得在不稳定平衡点领域中的轨道随时间迅速分开, 对初始条件极端敏感, 不具有轨道稳定性. 这使混沌运动的奇怪吸引子成为具有复杂结构的集合<sup>[1]</sup>.

综上所述可以看出, 当  $a = 23, b = 3, c = 18, H = 26.1$  时, 呈混沌运动的新系统 (2) 式从整体来说是稳定的, 耗散作用是一种稳定作用, 使吸引子外的一切轨线最后都要收缩进入到吸引子中. 但就局部来说, 吸引子内的运动又不稳定, 相邻轨道要相互排斥, 按指数形式分离. 所以混沌吸引子是这种整体稳定性和局部不稳定性的矛盾结合体<sup>[1]</sup>.

### 3.4 $a = 23, b = 3, c = 18, H = 26.1$ 时新系统对初值的敏感性

将新系统 (2) 式的初值变为  $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0) = (1.0001, 1, 1)$ , 在其他条件均不变时对该系统重新进行仿真, 得到其各相轨迹曲线与初值为  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$  时的比较, 如图 6 所示, 图 6 中  $t$  为时间.

表 2  $a = 23, b = 3, c = 18, H = 26.1$  时各平衡点的性质

平衡点	Jacobian 矩阵的特征根	性质
$S_1 = (0, 0, 0)$	$\lambda'_1 = -3, \lambda'_2 = 14.9714, \lambda'_3 = -19.9714$	鞍结点
$S_2 = (3.5686, 1.2972, 1.5430)$	$\lambda'_1 = -16.7198,$ $\lambda'_2 = 4.3599 + 10.5162i,$ $\lambda'_3 = 4.3599 - 10.5162i$	不稳焦点
$S_3 = (-3.5686, -1.2972, 1.5430)$	$\lambda'_1 = -16.7198,$ $\lambda'_2 = 4.3599 + 10.5162i,$ $\lambda'_3 = 4.3599 - 10.5162i$	不稳焦点
$S_4 = (12.8598, -1.7320, -7.4243)$	$\lambda'_1 = -23.1077,$ $\lambda'_2 = 7.5538 + 19.8527i,$ $\lambda'_3 = 7.5538 - 19.8527i$	不稳焦点
$S_5 = (-12.8598, 1.7320, -7.4243)$	$\lambda'_1 = -23.1077,$ $\lambda'_2 = 7.5538 + 19.8527i,$ $\lambda'_3 = 7.5538 - 19.8527i$	不稳焦点

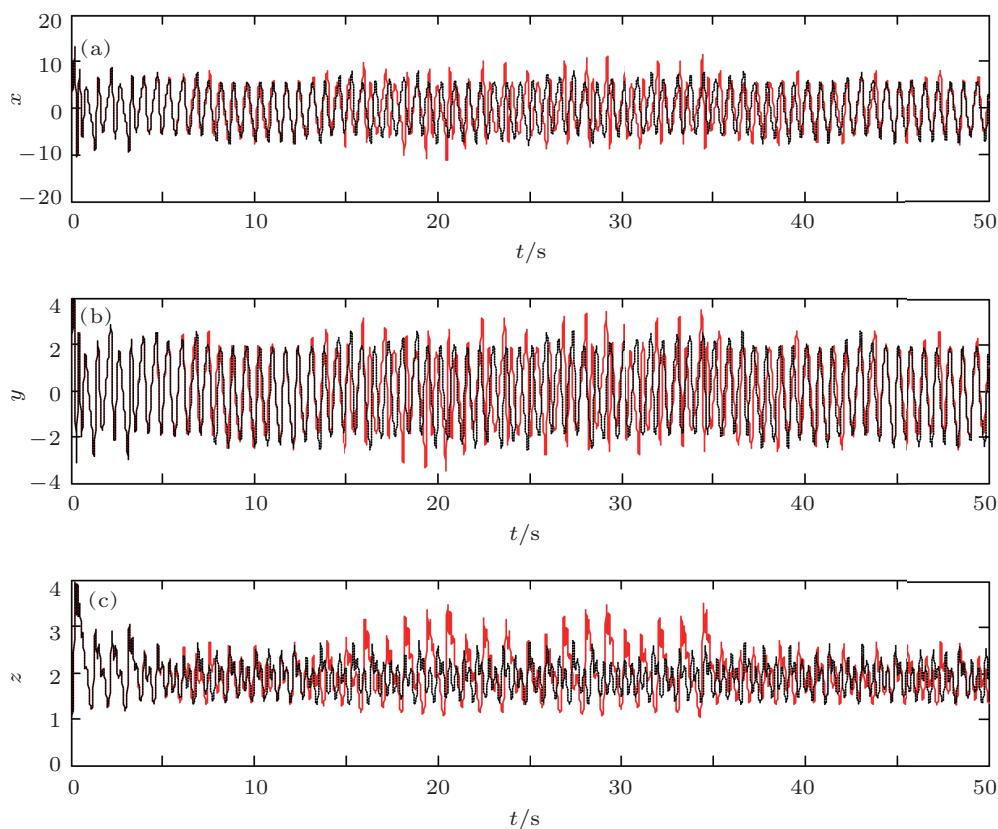


图6 新系统(2)式在不同初值时各状态所对应相轨迹曲线的比较图,图中实线为 $x_0 = 1$ ,虚线为 $x_0 = 1.0001$   
(a)  $x$ ; (b)  $y$ ; (c)  $z$

从图6中可以看出,仅仅是将新系统(2)式中的 $x$ 的初值变化了0.01%,其他条件均不变,经过很短的一段时间后,新系统(2)式的各相轨迹曲线的变化明显.这说明新系统(2)式具有初值敏感性,而初值敏感性是混沌运动的一个重要特征.

综上所述,在Chen系统(1)式的第一个方程中加入 $Hyz$ 乘积项后,所生成的新系统(2)式可使原Chen系统中不能产生混沌现象的系数组合产生混沌运动现象,扩大了使系统可以产生混沌现象的系数组合范围,并且由于该乘积项的系数 $H$ 可变,给新系统(2)式的调节带来了很大的方便.

## 4 Chen系统的混沌运动的抑制

### 4.1 当 $a = 35, b = 3, c = 28$ 时Chen系统的混沌抑制问题

当 $a = 35, b = 3, c = 28$ ,初值为 $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ 时,Chen系统(1)式的相轨迹如图1所示.可通过改变可变系数 $H$ 的取值,使Chen系统(1)式在初值仍为 $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ 时不再产生混

沌运动,而是收敛到其平衡点.当 $H = -0.35$ 时,可实现上述目的,其各相轨迹曲线如图7所示.此时系统有5个平衡点,分别为

$$\begin{aligned} S_1 &= (0, 0, 0), \\ S_2 &= (8.4326, 13.7361, 38.6101), \\ S_3 &= (-8.4326, -13.7361, 38.6101), \\ S_4 &= (8.6268, 18.9142, 54.3899), \\ S_5 &= (-8.6268, -18.9142, 54.3899). \end{aligned}$$

其Lyapunov指数分别为 $\lambda_1 = -0.64392, \lambda_2 = -0.64517, \lambda_3 = -8.7109$ .同时, $(a + b - c) = 35 + 3 - 28 = 10 > 0$ ,说明此时新系统(2)式满足耗散性条件 $\nabla V = -(a + b - c) = -10 < 0$ ,系统是耗散的.

### 4.2 当 $a = 15, b = 3, c = 10$ 时Chen系统的混沌抑制问题

在Chen系统(1)式中,当 $a = 15, b = 3, c = 10$ ,初值 $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ 时,Chen系统(1)式会产生混沌运动,其各相轨迹曲线如图8所示.



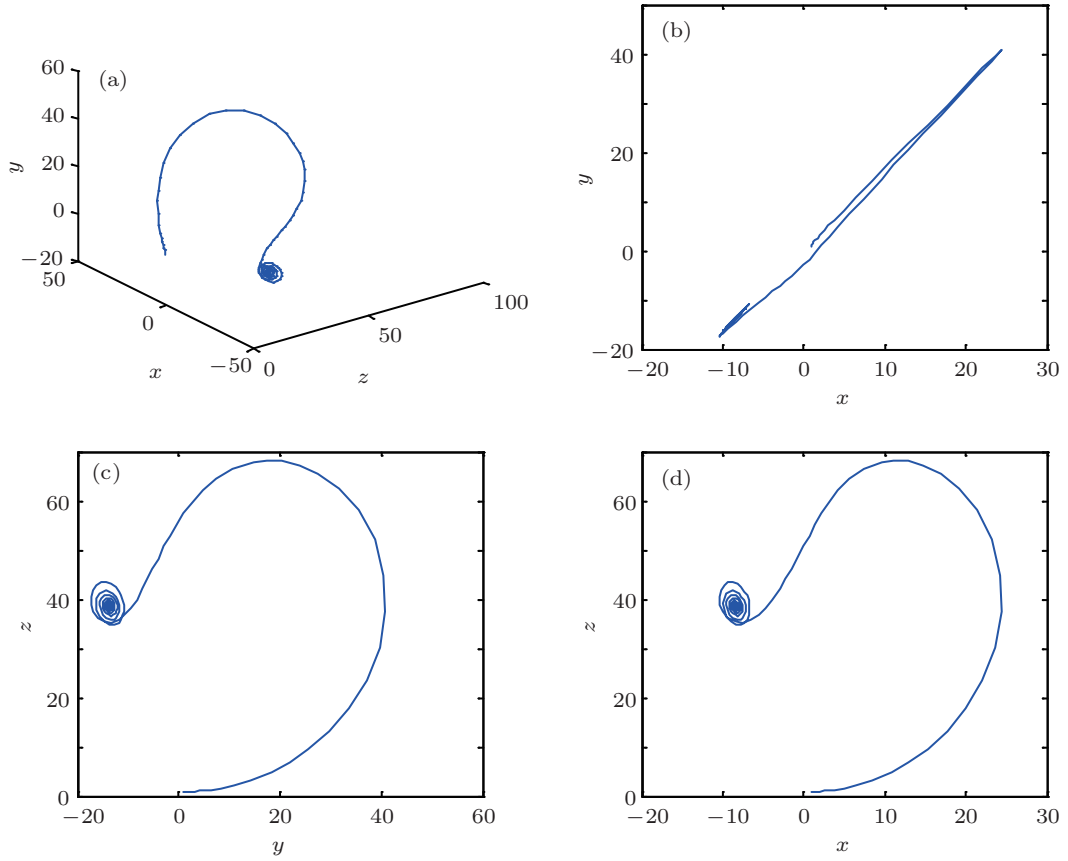


图7 当  $a = 35, b = 3, c = 28, H = -0.35$ , 初值  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$  时, 新系统 (2) 式各相轨迹的曲线 (a)  $x-y-z$ ; (b)  $x-y$ ; (c)  $y-z$ ; (d)  $x-z$

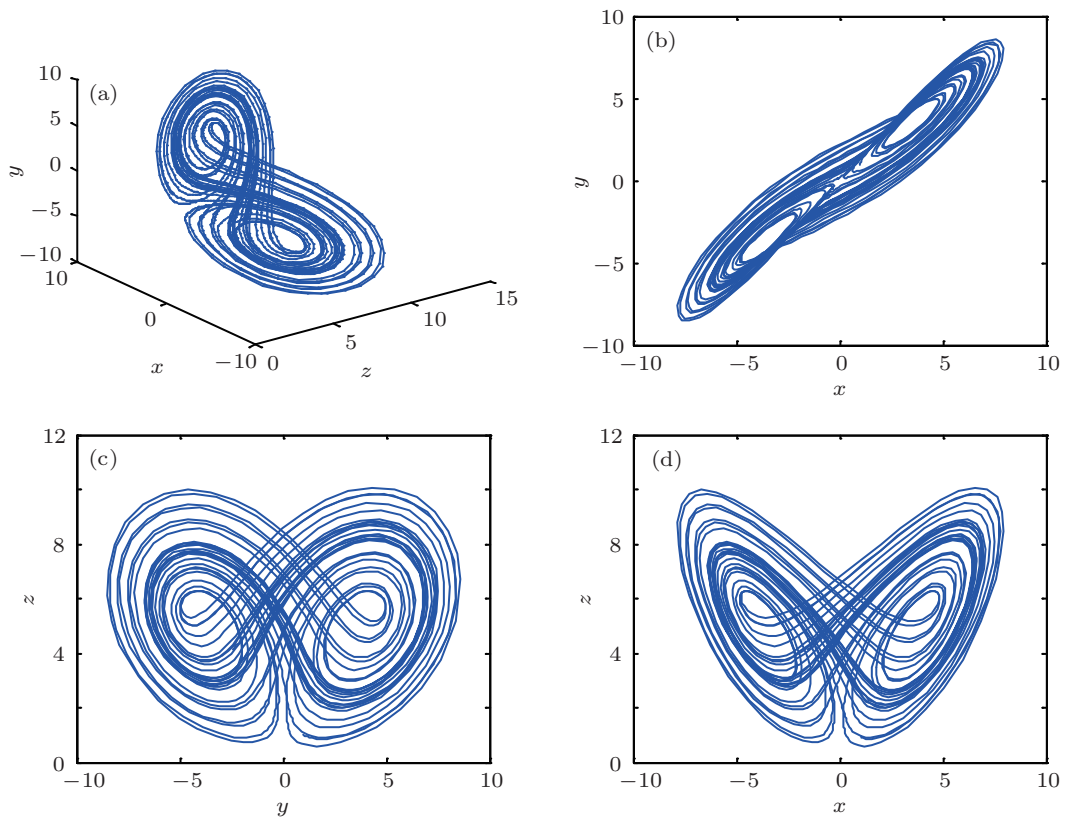


图8 当  $a = 15, b = 3, c = 10$ , 初值  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$  时, Chen 系统 (1) 式各相轨迹的曲线 (a)  $x-y-z$ ; (b)  $x-y$ ; (c)  $y-z$ ; (d)  $x-z$



采用与  $a = 35, b = 3, c = 28$  时 Chen 系统 (1) 式的混沌抑制相同的方法, 对新系统 (2) 式在平衡点处的  $H$  值范围进行数学计算, 并结合相应的数值仿真, 可得出当  $H \in [-0.5, -0.39]$ , 初值仍为  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$  时, 新系统 (2) 式不再产生混沌运动, 而是收敛到其平衡点. 现取  $H = -0.45$  时进行数值仿真, 其各相轨迹曲线如图 9 所示. 观察图 9 可以看出, 当  $a = 15, b = 3, c = 10, H = -0.45$ , 初值为  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$  时, 新系统 (2) 式确未产生混沌运动, 而是收敛到其平衡点. 此时系统有 5 个平衡点, 分别为

$$\begin{aligned} S_1 &= (0, 0, 0), \\ S_2 &= (4.3301, 5.7735, 8.3333), \\ S_3 &= (-4.3301, -5.7735, 8.3333), \\ S_4 &= (4.8990, 12.2474, 20.0000), \\ S_5 &= (-4.8990, -12.2474, 20.0000). \end{aligned}$$

其 Lyapunov 指数分别为  $\lambda_1 = -0.68751, \lambda_2 = -0.68817, \lambda_3 = -6.6243$ . 同时,  $(a + b - c) =$

$15 + 3 - 10 = 8 > 0$ , 说明此时新系统 (2) 式满足耗散性条件  $\nabla V = -(a + b - c) = -8 < 0$ , 系统是耗散的.

综上所述, 适当选取可变系数  $H$  的值, 在同一初值下, 不仅可使原 Chen 系统 (1) 式中不能产生混沌运动的系数组合产生混沌运动, 还可使原 Chen 系统 (1) 式中产生混沌运动的系数组合不再产生混沌运动, 而是收敛到其平衡点.  $H$  值选取的灵活性使新系统 (2) 式的应用范围极其广泛. 它不仅运用到保密通信等需要使系统产生混沌运动的实际应用中, 而且, 由于它同时具有混沌抑制的功能, 也可以运用到抑制混沌干扰等过程中.

### 5 新系统的混沌同步

采用单变量单向耦合替换法<sup>[10]</sup>使新系统 (2) 式达到混沌同步. 以驱动系统中的  $y_1$  作为驱动变量, 替换响应系统的第二个方程中的  $y_2$ , 可得驱动系统和响应系统的方程.

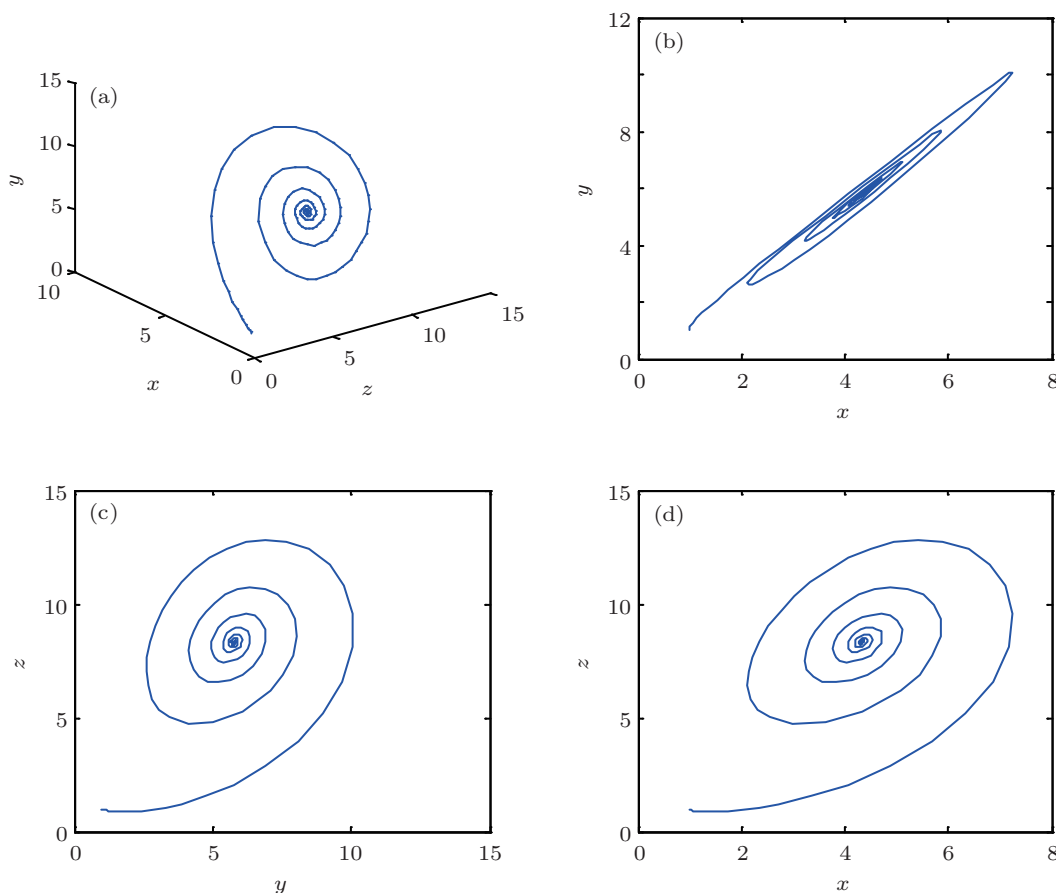


图 9 当  $a = 15, b = 3, c = 10, H = -0.45$ , 初值  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$  时, 新系统 (2) 式各相轨迹的曲线 (a)  $x$ - $y$ - $z$ ; (b)  $x$ - $y$ ; (c)  $y$ - $z$ ; (d)  $x$ - $z$

驱动系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(y_1 - x_1) + Hy_1z_1, \\ \dot{y}_1 &= (c - a)x_1 - x_1z_1 + cy_1, \\ \dot{z}_1 &= x_1y_1 - bz_1; \end{aligned}$$

响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= a(y_2 - x_2) + Hy_2z_2, \\ \dot{y}_2 &= (c - a)x_2 - x_2z_2 + cy_2, \\ \dot{z}_2 &= x_2y_2 - bz_2; \end{aligned}$$

其中  $a = 23, b = 3, c = 18, H = 26.1$ , 驱动系统的初值为  $(x_{10}, y_{10}, z_{10}) = (6, 6, 6)$ , 响应系统的初值为  $(x_{20}, y_{20}, z_{20}) = (1, 1, 1)$ .

通过计算可得, 响应系统在  $y_1$  驱动下的 3 个条件 Lyapunov 指数分别为  $\lambda_{c1} = -6.7505, \lambda_{c2} = -7.5526, \lambda_{c3} = -11.6986$ , 均小于 0, 说明响应系统与驱动系统可以达到稳定同步.

通过数值仿真可以看出, 此时两系统的同步效果很好, 其误差曲线  $e_1 = x_2 - x_1, e_2 = y_2 - y_1, e_3 = z_2 - z_1$ , 如图 10 所示.

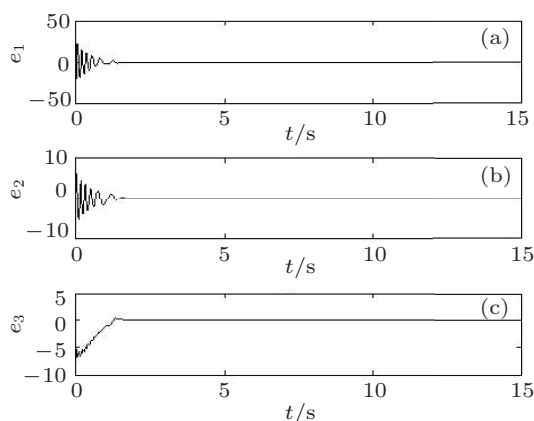


图 10 驱动系统与响应系统的误差曲线图 (a)  $t-e_1$ ; (b)  $t-e_2$ ; (c)  $t-e_3$

由图 10 可以看出, 大约经过 2 s, 响应系统与驱动系统很好地达到了混沌同步, 说明以  $y_1$  作为驱动变量替换响应系统的第二个方程中的  $y_2$  可使新

系统 (2) 式达到混沌同步.

基于同样的方法, 分别以  $x_1, y_1, z_1$  作为驱动变量逐一对应地替换响应系统的第一、第二、第三个方程中的  $x_2, y_2, z_2$ , 可以得到 9 个不同的响应系统. 使驱动系统 (初值仍为  $(x_{10}, y_{10}, z_{10}) = (6, 6, 6)$ ) 分别与这 9 个不同的响应系统 (初值均为  $(x_{20}, y_{20}, z_{20}) = (1, 1, 1)$ ) 进行混沌同步的仿真, 通过观察仿真结果发现, 除了以  $y_1$  作为驱动变量替换响应系统第二个方程中的  $y_2$  可使驱动系统与响应系统达到混沌同步外, 其余均不能实现混沌同步. 同样, 采用典型的 Pecora-Carroll (P-C)<sup>[11]</sup> 方法作为对比, 分别以  $x_1, y_1, z_1$  作为驱动变量, 构建相应的响应系统, 仿真结果表明, 此法仍不能使系统实现混沌同步. 因此, 选择  $y_1$  作为驱动变量替换响应系统的第二个方程中的  $y_2$  的同步方法是最合适的方法, 而且系统结构简单, 易于实现.

## 6 结论

本文给出了一个基于 Chen 系统的新的三维自治混沌系统, 该系统是在 Chen 系统的第一个方程中加入一个可变系数的乘积项, 通过调整该可变系数使新系统在不同的系数组合下产生或抑制混沌现象. 文中首先讨论了可变系数  $H$  变化时新系统的分岔图和 Lyapunov 指数谱, 并选择了一个适当的  $H$  值分析了新系统在该值下的运动状态. 通过仿真图可以看出, 新系统可使原 Chen 系统中不能产生混沌的系数组合产生混沌现象, 并且所得到的混沌吸引子范围较小, 便于电路实现. 其次给出了新系统的混沌抑制问题, 即适当选取可变系数  $H$  的值, 在同一初值下, 可使原 Chen 系统中产生混沌的系数组合不再产生混沌运动, 而是收敛到其平衡点. 最后采用单变量单向耦合替换法使响应系统与驱动系统达到了混沌同步, 且方法简单, 易于实现, 同步效果良好. 新系统将可应用于保密通信与控制混沌系统中.

[1] Liu B Z, Peng J H 2007 *Nonlinear Dynamics* (Beijing: Higher Education Press) pp120–131 (in Chinese) [刘秉正, 彭建华 2007 非线性动力学 (北京: 高等教育出版社) 第 120—131 页]  
 [2] Chen G R, Lü J H 2003 *Dynamic Analysis, Control and Synchronization of Lorenz System Families* (Beijing: Science Press) pp9–

130 (in Chinese) [陈关荣, 吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步 (北京: 科学出版社) 第 9—130 页]  
 [3] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465  
 [4] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 659  
 [5] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z, Celikovsky S 2002 *Int. J. Bifur.*

- Chaos* **12** 2917
- [6] Qi G Y, Chen G R, Du S Z, Chen Z Q, Yuan Z Z 2005 *Physica A* **352** 295
- [7] Wang F Z, Qi G Y, Chen Z Q, Zhang Y H, Yuan Z Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4005 (in Chinese) [王繁珍, 齐国元, 陈增强, 张宇辉, 袁著祉 2006 物理学报 **55** 4005]
- [8] Liu C X, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **22** 1031
- [9] Tomasz K (translated by Shi Y) 2008 *Chaos for Engineers: Theory, Application, and Control* (2nd Ed.) (Beijing: National Defense Industry Press) p62 (in Chinese) [卡毕坦尼亚克著 (施引译) 2008 面向工程的混沌学 —— 理论、应用及控制 (第2版) (北京: 国防工业出版社) 第62页]
- [10] Zhong G Q, Tang W K S 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 1423
- [11] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821

## Analysis and synchronization of a novel chaotic system based on Chen's system\*

Zhang Guo-Shan<sup>†</sup> Niu Hong

(School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

(Received 20 July 2011; revised manuscript received 27 October 2011)

### Abstract

In this paper, a new three-dimensional autonomous chaotic system is constructed by adding a product term with variable coefficient to the first equation of Chen's system. The new system with different groups of coefficients can be chaotic or not by adjusting the variable coefficient, that is, by adjusting the variable coefficient, chaos occurs in new system when Chen's system is not chaotic, or chaos is suppressed in new system even if Chen's system is chaotic. The characteristics of the new chaotic system are analyzed in detail and the synchronization of new system is considered. Moreover, the simulation results are also presented.

**Keywords:** Chen's system, the new three-dimensional autonomous chaotic system, chaos suppression, synchronization

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Pq, 05.45.Xt

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61074088).

<sup>†</sup> E-mail: zhanggs@tju.edu.cn