

含分数阶微分的线性单自由度振子的动力学分析*

申永军[†] 杨绍普 邢海军

(石家庄铁道大学机械工程学院, 石家庄 050043)

(2011年9月29日收到; 2011年10月26日收到修改稿)

研究了一个含分数阶微分的线性单自由度振子, 通过平均法得到了系统的近似解析解. 在近似解中, 分数阶微分项的系数和阶次以等效线性阻尼和等效线性刚度的形式影响着系统的动力学特性, 这一点与现有文献中直接将分数阶微分项归类为阻尼进行处理的方法完全不同. 比较了近似解析解和数值解, 二者的符合精度很高, 证明了近似解析解的准确性. 分析了分数阶系数和分数阶阶次对系统响应特性的影响, 发现分数阶系数和分数阶阶次都既可以通过等效线性阻尼影响系统的共振振幅, 又可以通过等效线性刚度影响系统的共振频率.

关键词: 分数阶微分, 平均法, 近似解析解

PACS: 05.45.-a, 45.10.Hj

1 引言

1695年, 法国数学家 Hospital 和德国数学家 Leibniz 提出了分数阶微积分, 至今已经有 300 多年历史. 在这个过程中, 很多学者围绕着分数阶微积分的定义、性质、计算以及与整数阶微积分的关系展开研究, 已经取得了较大的进展^[1-5]. 同时, 很多工程问题也可以用分数阶微分/积分方程来描述, 因此分数阶微积分的研究和发展也促进了很多工程问题的解决.

在工程问题中, 分数阶微积分的应用领域主要有两类^[3-25]: 一类是在控制系统中通过引入分数阶微积分, 来影响或者改变系统的闭环控制特性, 从而提高系统的控制效果和鲁棒性; 另一类是模拟含记忆特性的工程材料的本构关系, 由于真实材料介于理想固体与理想流体之间, 因此分数阶微积分能够准确刻画材料的真实本构关系. 这两方面的研究构成了分数阶微积分在工程领域的应用主流, 比较典型的如分数阶微分方程的多解和稳定性研究^[6,7]、不同类型的分数阶微分方程的混沌控制与同步研究^[10,11,17-25]、含分数阶微分项的非线性

系统动力学特性研究^[9,14-16]等.

由于分数阶微积分的计算较为复杂, 因此在上述研究中大部分文献采用了数值计算方法. 数值计算方法^[2,3,26,27]也是分数阶微积分研究的一个主流分支. Deng 等^[26,27]将分数阶微积分的数值计算方法归纳为三类, 包括在频域中通过多个整数阶算子近似模拟分数阶算子, 在分数阶微分方程的积分和迭代过程中进行线性化处理, 以及直接建立分数阶非线性微分方程的特殊函数解并数值迭代处理等. 同时, Deng 等给出了一种数值计算分数阶微分系统的有效算法, 并且进行了误差分析. 数值方法在某种程度上只能给出特定参数的解, 当参数变化范围较大时数值解的工作量就过于庞大. 目前采用解析方法对分数阶微积分的研究主要是通过分析系统的特征方程, 从而判定系统的解的数目和稳定性问题, 或者直接研究系统的分数阶微分项在特殊分数阶次时的解析解或者近似解析解等, 而且研究过程中很多学者把分数阶微分项直接当作阻尼处理, 这是不合适的. 本文以一个含分数阶微分项的单自由度线性振子为例, 通过平均法得到了系统的近似解析解, 同时通过等效线性阻尼和等效线性刚度表征了分数阶微分项的系数和阶次对系统动力

* 国家自然科学基金 (批准号: 11072158, 10932006)、河北省杰出青年科学基金 (批准号: E2010002047)、教育部新世纪优秀人才支持计划和教育部长江学者和创新团队发展计划 (批准号: IRT0971) 资助的课题.

[†] E-mail: shenyongjun@126.com

学的影响,通过解析结果和数值结果比较证明了方法的准确性.

2 近似解析解

研究下面的含分数阶微分项的单自由度线性振子

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + c\dot{x}(t) + K_1 D^p[x(t)] = F \cos(\omega t), \quad (1)$$

其中 m, k, c, F, ω 分别为系统的质量、线性刚度、线性阻尼、激励力幅值和频率, $D^p[x(t)]$ 为 $x(t)$ 关于 t 的 p 阶导数 ($0 \leq p \leq 1$), K_1 为分数阶系数且 $K_1 > 0$. 分数阶微分有多种定义形式,它们在一定条件下是等价的,这里我们采用 Caputo 定义:

$$D^p[x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t \frac{x'(u)}{(t-u)^p} du, \quad (2)$$

其中 $\Gamma(z)$ 为 Gamma 函数,满足 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. 引入

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad 2\varepsilon\mu = \frac{c}{m}, \quad \varepsilon k_1 = \frac{K_1}{m}, \quad \varepsilon f = \frac{F}{m},$$

(1) 式可变为

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + 2\varepsilon\mu\dot{x}(t) + \varepsilon k_1 D^p[x(t)] = \varepsilon f \cos(\omega t). \quad (3)$$

(3) 式不是无量纲化结果,仅仅是为了从形式上满足利用平均法进行求解的要求.

研究主共振情况,即 $\omega \approx \omega_0$. 为了定量表示激励频率 ω 和系统固有频率 ω_0 的接近程度,引入 $\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\sigma$ (σ 为调谐参数),则 (3) 式可变为

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon\{f \cos(\omega t) + \sigma x(t) - 2\mu\dot{x}(t) - k_1 D^p[x(t)]\}. \quad (4)$$

设 (4) 式的解满足

$$x = a \cos(\omega t + \theta), \\ \dot{x} = -a\omega \sin(\omega t + \theta),$$

则根据平均法可以得到

$$\dot{a} = -\frac{1}{\omega} [P_1(a, \theta) + P_2(a, \theta)] \sin \varphi, \quad (5a)$$

$$a\dot{\theta} = -\frac{1}{\omega} [P_1(a, \theta) + P_2(a, \theta)] \cos \varphi, \quad (5b)$$

其中

$$\varphi = \omega t + \theta,$$

$$P_1(a, \theta) = \varepsilon[f \cos(\varphi - \theta) + \sigma a \cos \varphi + 2\mu a \omega \sin \varphi],$$

$$P_2(a, \theta) = -\varepsilon k_1 D^p[a \cos \varphi].$$

根据平均法^[28],可以对 (5) 式在区间 $[0, T]$ 之间进行积分平均,从而得到振幅 a 和相位 θ 的近似形式

$$\dot{a} = -\frac{1}{T\omega} \int_0^T [P_1(a, \theta) + P_2(a, \theta)] \sin \varphi d\varphi, \quad (6a)$$

$$a\dot{\theta} = -\frac{1}{T\omega} \int_0^T [P_1(a, \theta) + P_2(a, \theta)] \cos \varphi d\varphi, \quad (6b)$$

其中积分终止时间 T 可以取为 $T = 2\pi$ (如果 $P_i(a, \theta)$ ($i = 1, 2$) 是周期函数),或者 $T = \infty$ (如果 $P_i(a, \theta)$ ($i = 1, 2$) 是非周期函数). 这样 (6) 式中第一部分的积分为

$$\dot{a}_1 = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} P_1(a, \theta) \sin \varphi d\varphi \\ = -\frac{\varepsilon f}{2\omega} \sin \theta - \varepsilon\mu a, \quad (7a)$$

$$a\dot{\theta}_1 = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} P_1(a, \theta) \cos \varphi d\varphi \\ = -\frac{\varepsilon f}{2\omega} \cos \theta - \frac{\varepsilon\sigma a}{2\omega}. \quad (7b)$$

为了计算 (6a) 式中第二部分的积分

$$\dot{a}_2 = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T\omega} \int_0^T P_2(a, \theta) \sin \varphi d\varphi \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon k_1}{T\omega} \int_0^T D^p[a \cos \varphi] \sin \varphi d\varphi, \quad (8)$$

首先计算下面两个基本公式:

$$B_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\sin(\omega t)}{t^p} dt,$$

$$B_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\cos(\omega t)}{t^p} dt.$$

这两个公式在文献 [14] 中给出了当 $\omega = 1$ 时的求解过程和结果,但是结果却是错误的. 令 $t = s^{\frac{1}{1-p}}$ 以及 $dt = \frac{1}{1-p} s^{\frac{p}{1-p}} ds$, 则有

$$B_1 = \frac{1}{1-p} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{T^{1-p}} \sin(\omega s^{\frac{1}{1-p}}) ds, \\ B_2 = \frac{1}{1-p} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{T^{1-p}} \cos(\omega s^{\frac{1}{1-p}}) ds. \quad (9)$$

利用留数定理和围道积分,可以得到

$$B_1 = \frac{\omega^{p-1} \Gamma(2-p)}{1-p} \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \\ = \omega^{p-1} \Gamma(1-p) \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right), \\ B_2 = \frac{\omega^{p-1} \Gamma(2-p)}{1-p} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \\ = \omega^{p-1} \Gamma(1-p) \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right). \quad (10)$$

研究 (8) 式,

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon k_1}{T\omega} \int_0^T \left\{ D^p [a \cos(\omega t + \theta)] \sin(\omega t + \theta) \right\} dt \\ &= \frac{-\varepsilon a k_1}{\Gamma(1-p)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \left[\int_0^t \frac{\sin(\omega u + \theta)}{(t-u)^p} du \right] \sin(\omega t + \theta) \right\} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

引入 $s = t - u$ 和 $ds = -du$, 则有

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 &= \frac{-\varepsilon a k_1}{\Gamma(1-p)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \left[\int_0^t \frac{\sin(\omega t + \theta - \omega s)}{s^p} ds \right] \sin(\omega t + \theta) \right\} dt \\ &= \frac{-\varepsilon a k_1}{\Gamma(1-p)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \left[\int_0^t \frac{\cos(\omega s)}{s^p} ds \right] \sin(\omega t + \theta) \sin(\omega t + \theta) \right\} dt \\ &\quad + \frac{\varepsilon a k_1}{\Gamma(1-p)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \left[\int_0^t \frac{\sin(\omega s)}{s^p} ds \right] \cos(\omega t + \theta) \sin(\omega t + \theta) \right\} dt. \end{aligned} \quad (12)$$

定义上式中第一部分为 A_1 并进行分部积分可以得到

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-\varepsilon a k_1}{4\omega\Gamma(1-p)} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2\omega t - \sin(2\omega t + 2\theta)}{T} \left[\int_0^t \frac{\cos(\omega s)}{s^p} ds \right] \right\} \Big|_0^T \\ &\quad + \frac{\varepsilon a k_1}{4\omega\Gamma(1-p)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{[2\omega t - \sin(2\omega t + 2\theta)] \cos(\omega t)}{t^p} \right] dt. \end{aligned} \quad (13)$$

根据 (8)—(10) 式可以得到

$$A_1 = -\frac{\varepsilon a k_1 \omega^{p-1}}{2} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right). \quad (14)$$

同理, 可以确定当 $T \rightarrow \infty$ 时 (12) 式中第二部分将会趋近于 0, 因此

$$\dot{a}_2 = A_1 = -\frac{\varepsilon a k_1 \omega^{p-1}}{2} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right). \quad (15a)$$

利用同样的方法, 可以得到

$$a\dot{\theta}_2 = \frac{\varepsilon a k_1 \omega^{p-1}}{2} \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right). \quad (15b)$$

将 (7) 式和 (15) 式联合起来, 则有

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon f}{2\omega} \sin\theta - \varepsilon\mu a - \frac{\varepsilon a k_1 \omega^{p-1}}{2} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right), \quad (16a)$$

$$a\dot{\theta} = -\frac{\varepsilon f}{2\omega} \cos\theta - \frac{\varepsilon\sigma a}{2\omega} + \frac{\varepsilon a k_1 \omega^{p-1}}{2} \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right). \quad (16b)$$

将原系统参数代入上式得到

$$\dot{a} = -\frac{F}{2m\omega} \sin\theta - \frac{a}{2m} C(p), \quad (17a)$$

$$a\dot{\theta} = -\frac{F}{2m\omega} \cos\theta - \frac{\omega a}{2} + \frac{a}{2m\omega} K(p), \quad (17b)$$

其中两个新的参数

$$C(p) = c + K_1 \omega^{p-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right), \quad (18a)$$

$$K(p) = k + K_1 \omega^p \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \quad (18b)$$

分别定义为系统的等效线性阻尼系数和等效线性刚度系数, 这样我们就得到了系统的近似解析解.

(18) 式表明: 在该系统中分数阶微分项不仅起着类似于阻尼的作用, 同时也起着线性刚度的作用; 分数阶微分项所起的作用不仅和分数阶系数 K_1 有关, 更主要决定于分数阶阶次 p , 当 $p \rightarrow 0$ 时, 分数阶微分项几乎等同于线性刚度, 当 $p \rightarrow 1$ 时, 分数阶微分项几乎等同于线性阻尼. 这个结论和现有文献中将分数阶微分项完全按照阻尼处理是完全不同的.

3 定常解和稳定性分析

下面研究定常解 (即稳态解). 令 $\dot{a} = 0$ 和 $\dot{\theta} = 0$, 则有

$$F \sin\bar{\theta} + \bar{a}\omega C(p) = 0, \quad (19a)$$

$$\bar{a}K(p) - m\omega^2\bar{a} = F \cos\bar{\theta}. \quad (19b)$$

从上式消去 $\bar{\theta}$, 可以得到幅频曲线方程

$$\bar{a}^2 \left\{ \omega^2 C^2(p) + [K(p) - m\omega^2]^2 \right\} = F^2, \quad (20)$$

和定常解振幅

$$\bar{a} = \frac{F}{\sqrt{\omega^2 C^2(p) + [K(p) - m\omega^2]^2}}, \quad (21)$$

以及相频曲线方程

$$\bar{\theta} = \arctan \left[\frac{-\omega C(p)}{K(p) - m\omega^2} \right]. \quad (22)$$

研究定常解的稳定性, 令 $a = \bar{a} + \Delta a$, $\theta = \bar{\theta} + \Delta\theta$, 并且代入 (17) 式, 得到

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta a}{dt} &= -\frac{C(p)}{2m} \cdot \Delta a - \frac{F \cos \bar{\theta}}{2m\omega} \cdot \Delta\theta, \\ \frac{d\Delta\theta}{dt} &= \frac{F \cos \bar{\theta}}{2m\bar{a}^2\omega} \cdot \Delta a + \frac{F \sin \bar{\theta}}{2m\bar{a}\omega} \cdot \Delta\theta. \end{aligned} \quad (23)$$

根据 (19) 式, 得到系统的特征行列式为

$$\det \begin{bmatrix} -\frac{C(p)}{2m} - \lambda & \frac{\omega\bar{a}}{2} - \frac{\bar{a}}{2m\omega}K(p) \\ -\frac{\omega}{2\bar{a}} + \frac{1}{2m\omega\bar{a}}K(p) & -\frac{C(p)}{2m} - \lambda \end{bmatrix} = 0, \quad (24)$$

展开 (24) 式得到特征方程

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \frac{C(p)}{m}\lambda + \frac{C^2(p)}{4m^2} \\ + \left[\frac{1}{2m\omega}K(p) - \frac{\omega}{2} \right]^2 = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

其特征根为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{C(p)}{2m} \pm i \left[\frac{1}{2m\omega}K(p) - \frac{\omega}{2} \right]. \quad (26)$$

由于 $K_1 > 0$, 因此特征根实部恒小于 0, 从而确定由 (21) 式得到的定常解恒稳定.

下面分析特殊情况. 如果 $K_1 = 0$, 此时为最基本的单自由度线性系统的强迫振动问题, 前述等效线性阻尼系数 $C(p)$ 和等效线性刚度系数 $K(p)$ 分别退化为线性阻尼系数 c 和线性刚度系数 k , 则定常解振幅变为

$$\bar{a} = \frac{F}{\sqrt{\omega^2 c^2 + [k - m\omega^2]^2}}. \quad (27)$$

这个结果和经典的振动力学教材^[29,30]中的结果完全相同, 从而间接验证了本文方法和结果的正确性.

4 数值仿真和分数阶参数研究

研究 (1) 式所表示的系统 (下文成为系统 (1)), 选取基本参数 $m = 5$, $k = 10$, $c = 0.3$, $F = 2$, $K_1 = 1.5$, $p = 0.5$, 根据 (21) 式可画出幅频曲线, 如图 1 中实线所示. 同时, 为了进行比较, 本文采用文献 [2,3] 中介绍的数值方法研究系统 (1), 该方法的近似公式为

$$D^p[x(t_l)] \approx h^{-p} \sum_{j=0}^l C_j^p x(t_{l-j}), \quad (28)$$

其中 $t_l = lh$ 为时间采样点, h 为时间步长, C_j^p 为分数阶二项式系数, 并且具有如下迭代关系:

$$C_0^p = 1, \quad C_j^p = \left(1 - \frac{1+p}{j}\right) C_{j-1}^p. \quad (29)$$

计算过程中步长 $h = 0.004$, 计算时间为 300 s, 将前 200 s 响应略去并取后 100 s 响应的最大值作为稳态响应的幅值, 所得数值积分的结果也示于图 1 中, 以圆圈表示. 可见二者符合良好, 说明本文结果具有很高的精度.

分析分数阶微分项中两个参数的影响. 当分数阶阶次 p 分别选取为 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 时, 稳态解振幅的曲线如图 2 所示. 可见, 当 p 逐渐增大时, 由于等效线性阻尼也在逐渐增大, 因此系统振幅的最大值 (即共振振幅) 逐渐减小; 同时, 由于此时等效线性刚度在逐渐减小, 因此系统的固有频率 (或者说共振频率) 也在减小. 因此, 分数阶阶次 p 对系统有重要影响: 不仅影响系统的共振振幅, 而且还影响系统的共振频率.

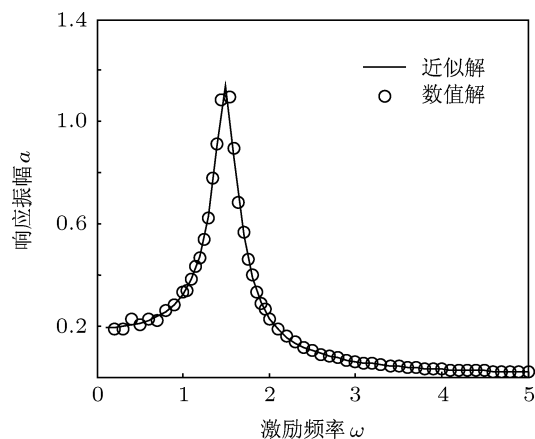


图 1 近似解和数值解的幅频曲线

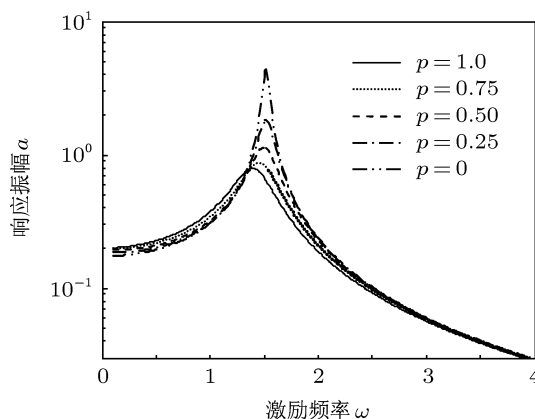
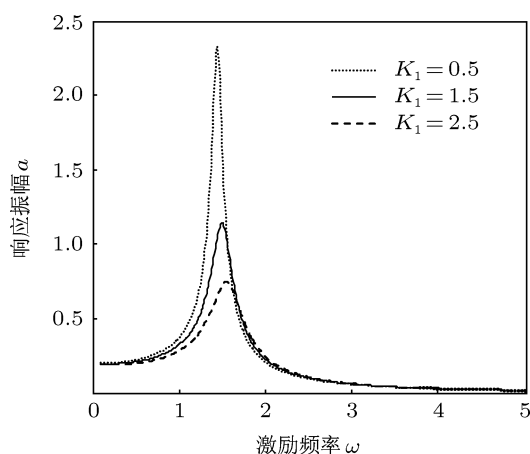


图 2 分数阶阶次 p 对幅频曲线的影响

图3 分数阶系数 K_1 对幅频曲线的影响

当分数阶系数 K_1 分别选取为 0.5, 1.5, 2.5 时, 稳态解振幅曲线如图 3 所示. 可见, 当 K_1 逐渐增大时, 由于等效线性阻尼也在逐渐增大, 因此系统的共振振幅在逐渐减小; 同时, 由于此时等效线性刚

度也在逐渐增大, 系统的共振频率也在增大. 因此, 分数阶系数 K_1 对系统响应的影响也体现在两个方面, 即共振振幅和共振频率.

5 结论

通过研究一个含分数阶微分项的单自由度线性振子, 利用平均法得到了系统的近似解, 分析了分数阶微分项对系统动力学的影响. 结果发现分数阶微分项的系数和阶次对系统的动力学有重要影响, 主要体现在: 通过定义等效线性阻尼系数和等效线性刚度系数, 可以清晰描述分数阶微分项的系数和阶次对系统的影响; 分数阶微分项的系数和阶次不仅可以通过等效线性阻尼系数影响系统的共振振幅, 而且还可以通过等效线性刚度系数影响系统的共振频率. 解析结果和数值结果的符合程度证实了本文方法和结果的准确性, 因此本文方法还可以用来分析含分数阶微分项的其他动力学系统.

- [1] Oldham K B, Spanier J 1974 *The Fractional Calculus-Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order* (New York: Academic Press) p1
- [2] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (London: Academic Press) p10
- [3] Petras I 2011 *Fractional-Order Nonlinear System* (Beijing: Higher Education Press) p19
- [4] Rossikhin Y A, Shitikova M V 2010 *Appl. Mech. Rev.* **63** 010801
- [5] Riewe F 1997 *Phys. Rev. E* **53** 3581
- [6] Wang Z Z, Hu H Y 2010 *Sci. China Phys. Mech.* **53** 345
- [7] Wang Z Z, Du M L 2011 *Shock Vib.* **18** 257
- [8] Rossikhin Y A, Shitikova M V 1997 *Acta Mech.* **120** 109
- [9] Li G G, Zhu Z Y, Cheng C J 2011 *Appl. Math. Mech.* **22** 294
- [10] Cao J Y, Ma C B, Xie H, Jiang Z D 2010 *J. Comput. Nonlin. Dyn.* **5** 041012
- [11] Wu X J, Lu H T, Shen S L 2009 *Phys. Lett. A* **373** 2329
- [12] Chen J H, Chen W C 2008 *Chaos Soliton Fract.* **35** 188
- [13] Lu J G 2006 *Phys. Lett. A* **354** 305
- [14] Wahi P, Chatterjee A 2004 *Nonlinear Dynam.* **38** 3
- [15] Chen L C, Zhu W Q 2009 *J. Vib. Control* **15** 1247
- [16] Huang Z L, Jin X L 2009 *J. Sound Vib.* **319** 1121
- [17] Zhang C F, Gao J F, Xu L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5124 (in Chinese) [张成芬, 高金峰, 徐磊 2007 物理学报 **56** 5124]
- [18] Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6865 (in Chinese) [刘崇新 2007 物理学报 **56** 6865]
- [19] Chen X R, Liu C X, Wang F Q, Li Q X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1416 (in Chinese) [陈向荣, 刘崇新, 王发强, 李永勋 2008 物理学报 **57** 1416]
- [20] Zhang R X, Yang Y, Yang S P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6039 (in Chinese) [张若洵, 杨洋, 杨世平 2009 物理学报 **58** 6039]
- [21] Hu J B, Zhang G A, Zhao L D, Zeng J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060504 (in Chinese) [胡建兵, 章国安, 赵灵冬, 曾金全 2011 物理学报 **60** 060504]
- [22] Li Q D, Chen S, Zhou P 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010502
- [23] Zhang R X, Yang S P 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3295
- [24] Qi D L, Wang Q, Yang J 2011 *Chin. Phys. B* **20** 100505
- [25] Wu Z M, Xie J Y 2007 *Chin. Phys.* **16** 1901
- [26] Deng W H, Li C P 2008 *Phys. Lett. A* **372** 401
- [27] Deng W H 2007 *J. Comput. Phys.* **227** 1510
- [28] Sanders J A, Verhulst F, Murdock J 2007 *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems* (New York: Springer) p150
- [29] Ni Z H 1988 *Vibration Mechanics* (Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press) p79 (in Chinese) [倪振华 1988 振动力学 (西安: 西安交通大学出版社) 第 79 页]
- [30] Liu Y Z, Chen W L, Chen L Q 1998 *Vibration Mechanics* (Beijing: Higher Education Press) p36 (in Chinese) [刘延柱, 陈文良, 陈立群 1998 振动力学 (北京: 高等教育出版社) 第 36 页]

Dynamical analysis of linear single degree-of-freedom oscillator with fractional-order derivative*

Shen Yong-Jun[†] Yang Shao-Pu Xing Hai-Jun

(*Department of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China*)

(Received 29 September 2011; revised manuscript received 26 October 2011)

Abstract

A linear single degree-of-freedom oscillator with fractional-order derivative is researched by the averaging method, and the approximately analytical solution is obtained. The effects of the parameters on the dynamical property, including the fractional coefficient and the fractional order, are characterized by the equivalent linear damping coefficient and the equivalent linear stiffness, and this conclusion is entirely different from the published results. The comparison of the analytical solution with the numerical results verifies the correctness of the approximately analytical results. The following analysis on the effects of the fractional parameters on the amplitude-frequency is fulfilled, and it is found that the fractional coefficient and the fractional order could affect not only the resonance amplitude through the equivalent linear damping coefficient, but also the resonance frequency by the equivalent linear stiffness.

Keywords: fractional-order derivative, averaging method, approximately analytical solution

PACS: 05.45.–a, 45.10.Hj

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11072158, 10932006), the Natural Science Fund for Distinguished Young Scholar of Hebei Province, China (Grant No. E2010002047), the Program for New Century Excellent Talents in University of Ministry of Education of China, and the Program for Changjiang Scholars and Innovative Research Team in University of Ministry of Education of China (Grant No. IRT0971).

[†] E-mail: shenyongjun@126.com