

(2+1) 维 Bogoyavlenskii-Schiff 系统的精确解和孤子激发*

曾文丽 马松华[†] 任清寰

(丽水学院物理系, 丽水 323000)

(2011 年 9 月 12 日收到; 2011 年 10 月 2 日收到修改稿)

借助 Maple 符号计算软件, 利用投射方程法和变量分离法, 得到了 (2+1) 维 Bogoyavlenskii-Schiff 系统的新显式精确解. 根据得到的孤波解, 构造出了该系统新颖的局域激发结构.

关键词: 投射方程法, Bogoyavlenskii-Schiff 系统, 精确解, 局域激发

PACS: 05.45.Yv, 03.65.Ge, 02.30.Jr

1 引言

目前, 人们在大脑的神经脉冲传播过程中, 在核聚变的等离子体中, 在非线性光学中, 在凝聚态物理中^[1-5] 等许多各种领域都发现了具有孤立子解的物理体系, 称为非线性可积系统, 求解孤子系统的精确解, 研究其局域激发模式, 一直是非线性理论工作者研究的重要课题. 近年来在国际学术界出现了研究孤子解的许多新方法^[6-12]. 其中最重要的方法之一就是文献 [13-15] 给出的多线性分离变量法, 该方法借助于 Bäcklund 变换和变量分离可以得到某个确定的非线性物理系统的解具有如下的通式:

$$u = \frac{2(a_2 a_1 - a_3 a_0) q_y p_x}{(a_0 + a_1 p + a_2 q + a_3 p q)^2},$$

其中 $p \equiv p(x, t)$, $q \equiv q(x, t)$ 为两个任意函数. 另外一种有效的方法是利用辅助方程求解未知方程的投射方程法, 实践证明该方法是求解非线性方程非常有效和简便的方法. 该方法已在求解高维非线性物理系统中得到了广泛的应用^[16-26]. 本文将投射方程法运用到著名的 (2+1) 维 Bogoyavlenskii-Schiff

(BS) 系统^[27-29]

$$Q_{xxxy} + 4Q_x Q_{xy} + 2Q_y Q_{xx} + 4Q_{tx} = 0, \quad (1)$$

研究其精确解和不同类型的孤子激发以及孤立波随时间的演化.

2 (2+1) 维 BS 系统的精确解

投射方程法的基本思想是: 对于给定的一个非线性物理模型

$$P(Q, Q_t, Q_{x_i}, Q_{x_i x_j}, \dots) = 0, \quad (2)$$

设它有如下形式的解

$$Q = A(x) + \sum_{i=1}^n B_i(x) \phi^i(q(x)) + C_i(x) \phi^{i-1}(q(x)) \sqrt{\sigma \phi + \phi^2(q(x))}, \quad (3)$$

其中 ϕ 满足

$$\phi' = \sigma \phi + \phi^2, \quad (4)$$

这里 $x = (x_0 = t, x_1, x_2, \dots, x_m)$, $A(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$ 和 $q(x)$ 为待定的 x 的任意函数. 将 (3) 和 (4) 式代入 (2) 式就可以得到一组 $A(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$ 和 $q(x)$ 的约束方程. 通过约束方程求得变量 $A(x)$,

* 浙江省自然科学基金 (批准号: Y6100257, Y6110140, Y6090545) 和丽水学院科研基金 (批准号: KZ09005) 资助的课题.

[†] E-mail: msh6209@yahoo.com.cn

$B_i(x)$, $C_i(x)$ 和 $q(x)$, 再根据投影方程 (4) 如下形式的通解就可以确定所求方程的精确解:

$$\phi = \frac{-\sigma e^{\sigma q + c\sigma}}{e^{\sigma q + c\sigma} - 1} \quad \sigma \neq 0. \quad (5)$$

对 (5) 式进行适当变换, 可以得到如下的孤立波解:

$$\phi = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sigma \left[1 + \tanh\left(\frac{1}{2}\sigma q\right) \right] & \sigma \neq 0, \\ -\frac{1}{2}\sigma \left[1 + \coth\left(\frac{1}{2}\sigma q\right) \right] & \sigma \neq 0, \end{cases} \quad (6)$$

根据对 (1) 式的领头项分析, 可设其形式解为

$$Q = f(x, y, t) + g(x, y, t)\phi(q(x, y, t)) + h(x, y, t)\{\sigma\phi(q(x, y, t)) + \phi^2(q(x, y, t))\}^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

这里, f, g, h 和 q 是 (x, y, t) 的任意函数, 将 (4) 和 (7) 式代入 (1) 式, 并按 ϕ 的同次幂合并, 提取 ϕ^i ($i = 1, 2, \dots$) 前的系数, 令其等于零, 可得

$$f = -\frac{1}{16} \int \frac{1}{q_x^2 q_y} (8q_x^2 q_{xxy} + 4q_x^3 q_{xy}\sigma + 16q_x^2 q_t + 8q_x q_y q_{xxx} - 8q_x q_{xy} q_{xx} - 4q_{xx}^2 q_y + 8q_x^2 q_y q_{xx}\sigma + q_x^4 q_y \sigma^2) dx, \\ g = -\frac{1}{2}q_x, \quad h = \frac{1}{2}q_x, \quad (8)$$

从所得到的方程中, 发现有如下变量分离形式的特解:

$$q = \chi(x) + \varphi(y - kt), \quad (9)$$

其中 $\chi \equiv \chi(x)$, $\varphi \equiv \varphi(y - kt)$ 是关于 x 和 $y - kt$ 的任意函数, k 是任意常数.

当 $\sigma \neq 0$, 得到 BS 系统的如下孤波解:

$$Q_1 = \frac{1}{16} \int \frac{1}{\chi_x^2} \{16\chi_x^2 k + 4\chi_{xx}^2 - \chi_x^4 \sigma^2 - 8\chi_x \chi_{xxx} - 8\chi_x^2 \chi_{xx}\sigma\} dx + \frac{1}{2}\chi_x \sigma \left\{ 1 + \tanh\left[\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right] + \sqrt{\tanh\left[\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right]^2 - 1} \right\}, \quad (10)$$

$$Q_2 = \frac{1}{16} \int \frac{1}{\chi_x^2} [16\chi_x^2 k + 4\chi_{xx}^2 - \chi_x^4 \sigma^2 - 8\chi_x \chi_{xxx} - 8\chi_x^2 \chi_{xx}\sigma] dx + \frac{1}{2}\chi_x \sigma \left\{ 1 + \coth\left[\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right] + \sqrt{\coth\left[\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right]^2 - 1} \right\}, \quad (11)$$

其中 $\chi(x)$, $\varphi(y - kt)$ 为所示变量的任意函数.

3 (2 + 1) 维 BS 系统的局域激发

由于 (10) 和 (11) 式中都包含有任意函数 $\chi(x)$ 和 $\varphi(y - kt)$, 使得系统的解变得相当丰富. 本文仅是以 Q_2 (11) 式的势函数 $V = Q_{2y}$ (Q_2 对 y 的一阶导数) 为例, 讨论 BS 系统的局域激发结构:

$$V = Q_{2y} = -\frac{1}{4}\sigma^2 \chi_x \varphi_y \operatorname{csch}\left[\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right] \times \left\{ \operatorname{csch}\left[\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right] + \coth\left[\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right] \right\}. \quad (12)$$

3.1 局域孤子结构

由于 (12) 式中的 $\chi(x)$ 和 $\varphi(y - kt)$ 的任意性, 不妨取 $\chi(x)$ 和 $\varphi(y - kt)$ 为如下形式:

$$\chi = 1 + \exp(x), \\ \varphi = 1 + \exp(y - kt), \quad (13)$$

于是可以得到 BS 系统的钟状 dromion 孤子结构, 如图 1(a) 所示. 取 $\sigma = -1, k = 1, t = 0$, 图 1(b) 是孤子的密度图, 中间比较明亮, 表示中间是空心的.

此外, 如果取 χ 和 φ 为如下形式:

$$\chi = \sum_{n=-N}^N 0.1 \operatorname{sech}(x + 5n), \\ \varphi = \sum_{m=-M}^M 0.1 \operatorname{sech}(y - kt + 5m), \quad (14) \\ M = N = 2,$$

可以得到如图 2(a) 所示的多孤子结构. 取 $\sigma = -1, k = 1, t = 0$, 图 2(b) 为相应的密度图, 深颜色的表示亮孤子, 浅颜色的表示暗孤子.

在 (12) 式中, 如果取 χ, φ 为如下形式:

$$\chi = 1 + 2 \exp[-x(x + \operatorname{sn}(\ln x^2, 0.9))], \\ \varphi = 1 + \exp[-(y - kt)(y - kt + \operatorname{sn}(\ln(y - kt)^2, 0.9))], \quad (15)$$

其中 sn 是 Jacobi 椭圆正弦函数. 于是可以得到如图 3(a) 所示的局域分形孤子结构, 其密度图如图 3(b) 所示, 取 $\sigma = -1, k = 1, t = 0$.

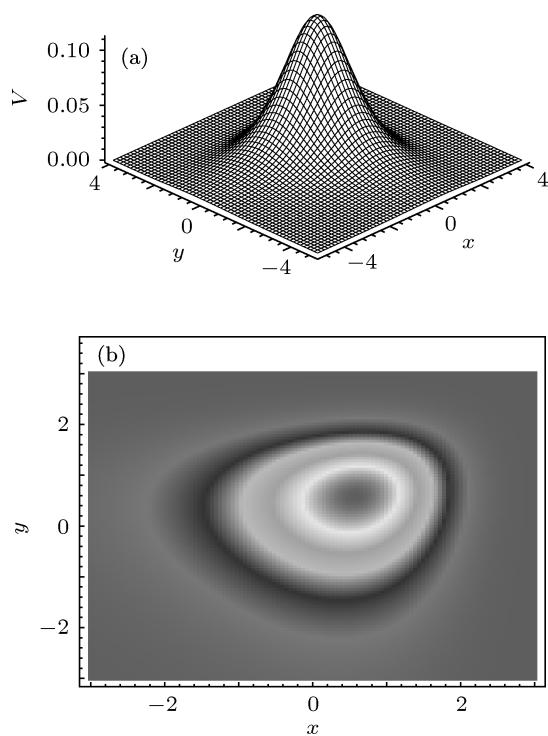


图1 (12)式利用(13)式得到的钟状 dromion 孤子 (a) 孤子结构; (b) 孤子密度图

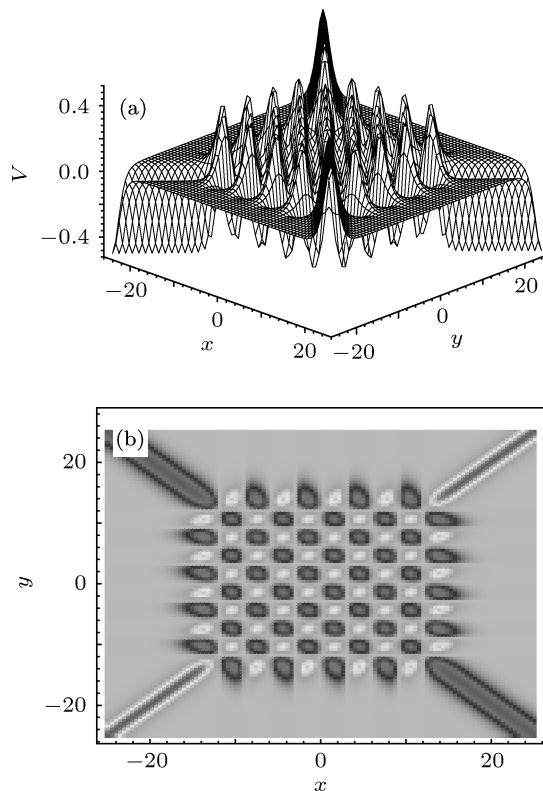


图2 (12)式利用(14)式得到的多孤子结构 (a) 多孤子结构; (b) 多孤子密度图

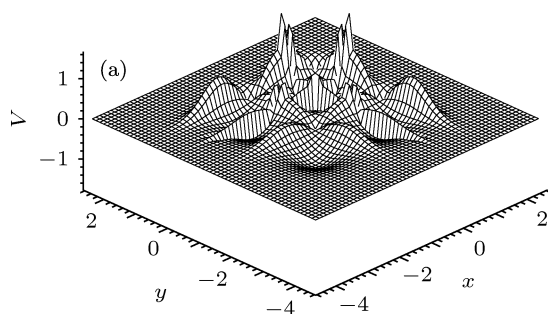


图3 (12)式利用(15)式得到的局域分形孤子结构 (a) 孤子结构; (b) 孤子密度图

3.2 孤立波的演化

上面研究了 BS 系统的三种孤子结构, 接下来研究孤立波随时间的演化. 在 (12) 式中, 如果取 χ 和 φ 为如下形式:

$$\chi = \text{sech}(x), \quad \varphi = \text{sech}(y - kt), \quad (16)$$

则得到如图 4 所示的两个孤立波的时间演化图, 取 $\sigma = -1, k = 1$, 时间分别为 $t = -10, 0, 10$. 从图 4 中清楚看到, 一个亮孤波和一个暗孤波以相同大小的速度沿着互相垂直的方向运动, 在相遇处发生波的叠加, 由于亮孤波和暗孤波的波幅大小相同, 所以相遇处波幅 (合振幅) 为零.

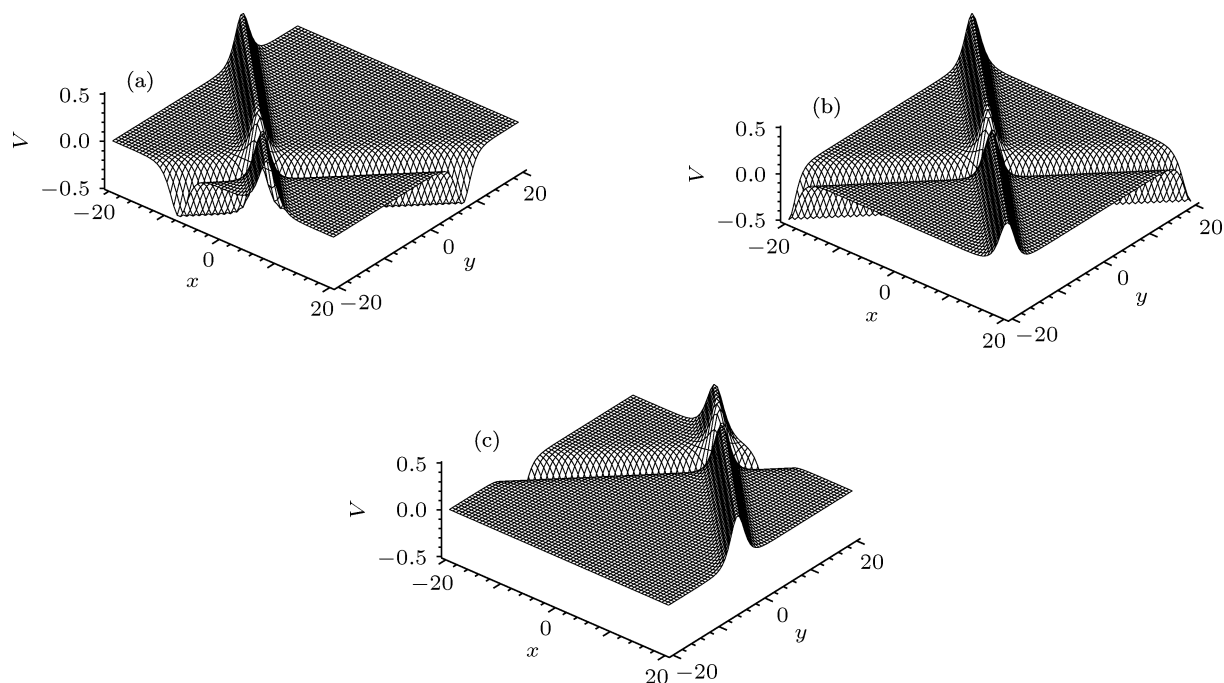


图4 (12)式利用(16)式得到的两个孤立波的时间演化侧面图 (a) $t = -10$; (b) $t = 0$; (c) $t = 10$

4 结论

投射方程法是一种非常经典、有效和成熟的求解非线性演化方程的方法,其最大的特点是可以有多样不同形式的设解,使得最终求得的解丰富多彩.本文借助 Maple 符号计算软件,利用投射方程法结合变量分离法,选择带根号的设解,得到了(2+1)维 Bogoyavlenskii-Schiff 系统的孤波解,根

据孤波解 Q_2 的势函数(12)式,选取适当的 χ 和 φ ,得到了系统的钟状 dromion 孤子、多孤子和分形孤子局域结构及其密度图像,进一步研究了两个孤立波的时间演化.投射方程法在求解非线性演化方程中已经得到了广泛的应用,这里进一步拓展了它的应用,这种方法对其他高维非线性物理模型的应用有待于进一步研究.

- [1] Camassa R, Holm D D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661
- [2] Kivshar Y S, Melonmend B A 1989 *Rev. Mod. Phys.* **61** 765
- [3] Kadomtsev B B, Petviashvili V I 1970 *Sov. Phys. Dokl.* **15** 539
- [4] Davey A, Stewartson K 1974 *Proc. Roy. Soc.* **338** 17
- [5] Boiti M, Leon J J P, Manna M, Pempinelli F 1988 *Phys. Lett. A* **132** 432
- [6] Zhang D J 2003 *Chaos Soliton. Fract.* **18** 31
- [7] Zhang D J 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **23** 1333
- [8] Zhang S L, Zhu X N, Wang Y M, Lou S Y 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 829
- [9] Zhang S L, Lou S Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 385
- [10] Zhang J F, Zheng C L, Fang J P 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 448
- [11] Lou S Y 1995 *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** 7227
- [12] Ruan H Y, Lou S Y 1997 *J. Math. Phys.* **38** 3123
- [13] Lou S Y 2000 *Phys. Lett. A* **277** 94
- [14] Tang X Y, Liang Z F 2006 *Phys. Lett. A* **351** 398
- [15] Ying J P, Lou S Y 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1448
- [16] Fang J P, Zheng C L, Chen L Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 175
- [17] Fang J P, Zheng C L 2005 *Chin. Phys.* **14** 670
- [18] Ma S H, Fang J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5611 (in Chinese) [马松华, 方建平 2006 物理学报 **55** 5611]
- [19] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 620 (in Chinese) [马松华, 强继业, 方建平 2007 物理学报 **56** 620]
- [20] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2006 *Z. Naturforsch. A* **61** 249
- [21] Ma S H, Fang J P, Hong B H, Zheng C L 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **40** 1352
- [22] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Z. Naturforsch. A* **63** 121
- [23] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2767
- [24] Ma S H, Fang J P, Ren Q B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4420 (in Chinese) [马松华, 方建平, 任清褒 2010 物理学报 **59** 4420]
- [25] Yang Z, Ma S H, Fang J P 2011 *Chin. Phys. B* **20** 040301
- [26] Wu H Y, Ma S H, Fang J P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6719 (in

Chinese) [吴红玉, 马松华, 方建平 2010 物理学报 **59** 6719]
[27] Bogoyavlenskii O I 1990 *Math. USSR. Izv.* **34** 247
[28] Estvez P G, Hernaez G A 2000 *J. Phys. A* **33** 2131

[29] Zhang H P, Chen Y, Li B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7393 (in Chinese) [张焕萍, 陈勇, 李彪 2009 物理学报 **58** 7393]

Exact solutions and soliton excitations for the (2+1)-dimensional Bogoyavlenskii-Schiff system*

Zeng Wen-Li Ma Song-Hua[†] Ren Qing-Bao

(Department of Physics, Zhejiang Lishui University, Lishui 323000, China)

(Received 12 September 2011; revised manuscript received 2 October 2011)

Abstract

With the help of the symbolic computation system Maple and using the improved projective method and the variable separation method, a series of excitations of the (2+1)-dimensional Bogoyavlenskii-Schiff system is derived. According to the derived solitary wave solution, we obtain some novel localized excitations of the system.

Keywords: projective equation approach, Bogoyavlenskii-Schiff system, exact solutions, localized excitations

PACS: 05.45.Yv, 03.65.Ge, 02.30.Jr

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant Nos. Y6100257, Y6110140, Y6090545) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Lishui University, China (Grant No. KZ09005).

[†] E-mail: msh6209@yahoo.com.cn