

高维辅助的普适量子线路优化

刘凯 李文东 张闻钊 史鹏 任春年 顾永建[†]

(中国海洋大学物理系, 青岛 266100)

(2011年8月23日收到; 2011年11月7日收到修改稿)

受到 Lanyon 等 (Lanyon B P *et al* 2008 *Nature Physics* 5 134) 利用高维 Hilbert 空间成功简化 Toffoli 门的启发, 本文将辅助维度应用到普适量子线路中, 结合 Cosine-Sine Decomposition(CSD), Quantum Shannon Decomposition(QSD) 等矩阵分解方法, 优化了两比特和三比特普适么正量子线路, 给出了计算 n 比特普适量子线路复杂度的公式, 并利用线性光学和腔 QED 系统设计了实验方案. 结果表明, 两比特和三比特量子线路的复杂度已分别接近和优于目前最优结果, 且随着比特数的增加, 本方案的优势愈加明显.

关键词: 辅助维度, 量子线路, 复杂度

PACS: 03.67.-a, 42.50.EX

1 引言

量子线路复杂度是量子信息和量子计算的基本问题, 如何尽量减少量子门的数目, 构造有效的量子线路是量子计算领域的关键问题之一. 量子线路的复杂度常以构造量子线路所需两比特 CNOT 门的数量来度量. 多年来国内外的研究者已提出了多种优化量子线路的方案来降低量子线路复杂度. 1995 年 Barenco 和 Bennett 等提出了量子线路的第一个构造原理 QR 分解^[1-3], 构造 n 比特量子线路所需的 CNOT 数目为 $O(n^3 4^n)$, 随后经过一系列优化^[4-7] 最终将 n 比特量子线路的复杂度降到了 $2 \times 4^n - (2n + 3) \times 2^n + 2n$; 2004 年, Vartiainen 等将 CSD 分解^[8-10] 应用于量子线路的构造中, 得到的量子线路的复杂度为 $4^n - 2 \times 2^n$; 2006 年, Shende 等应用优化后的 QSD 分解^[7,11] 将量子线路的复杂度降为 $(23/48) \times 4^n - (3/2) \times 2^n + 4/3$. 虽然这些方案逐步降低了量子线路的复杂度, 但距离 2004 年 Shende 等人提出的数学极限 $(4^n - 3n - 1)/4$ ^[12] 仍有不小的差距. 到目前为止, 实验上的最新进展是 2009 年 Home 等^[13] 人在离子阱系统中只用了三个纠缠的两比特操作就实现了普适的两比特量子门, 但三比特或更多比特的普适量子线路因目前

所涉及线路复杂度过高而难以实现.

2008 年, Lanyon 等通过借鉴 Ralph 等人的理论^[14] 引入辅助维度, 利用高维 Hilbert 空间简化了 Toffoli 门和受控 U 门, 并在线性光学系统中实现了对 Toffoli 门的简化^[15]. 受其启发我们认识到, 微观粒子除具有作为量子比特的两个维度外一般都还有多余的维度或自由度可供利用, 如原子的其他能级、光子的路径自由度等, 我们可以通过引入辅助维度将多比特操作转化为较少比特或单比特的多维度操作, 以减少受控操作数目. 在本文中, 我们将利用辅助维度并结合矩阵分解理论优化两比特和三比特普适量子线路, 并给出相应的物理实现方案, 这对量子线路的简化具有重要的意义.

2 利用辅助维度优化量子线路

2.1 两比特量子线路的优化

考虑两比特 A, B 的 Hilbert 空间, 当选定基 $\{|00\rangle_{AB}, |01\rangle_{AB}, |10\rangle_{AB}, |11\rangle_{AB}\}$ 时, 任意初态可表示为 $|\psi\rangle = a_1|00\rangle_{AB} + a_2|01\rangle_{AB} + a_3|10\rangle_{AB} + a_4|11\rangle_{AB}$. 此态在任意么正演化 U 作用下, 得到末态 $|\Phi\rangle$, 即 $|\Phi\rangle = U|\psi\rangle$. 这里, 不妨令末态为

$$|\Phi\rangle = b_1|00\rangle_{AB} + b_2|01\rangle_{AB} + b_3|10\rangle_{AB} + b_4|11\rangle_{AB},$$

[†] E-mail: yjgu@ouc.edu.cn

其中, a_i, b_i 为复数, $\sum_i |a_i|^2 = 1, \sum_i |b_i|^2 = 1, i = 1, \dots, 4$. 利用辅助维度实现两量子比特的任意普适么正演化 U , 可通过先将一个量子比特扩展成四维, 然后在扩展后的单粒子空间中编码原来两比特的初始状态, 这样, 对于两比特的操作 U 就可以转换为对单粒子四维空间状态的操作, 操作结束后, 再将末态还原到原两比特状态空间中, 即可实现演化.

扩展维度方式有直和与直积两种方式^[16]. 在这里我们采用直积方式进行扩展. 设 A 粒子除构成量子比特的 $|0\rangle, |1\rangle$ 状态之外, 还具有另外两个辅助维度 $|0\rangle, |1\rangle$, 利用辅助维度可将其状态空间由 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 扩展为 $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, 扩展后的此两粒子 Hilbert 空间基可表示为

$$\{|000\rangle_{AAB}, |001\rangle_{AAB}, |010\rangle_{AAB}, |011\rangle_{AAB}, |100\rangle_{AAB}, |101\rangle_{AAB}, |110\rangle_{AAB}, |111\rangle_{AAB}\}.$$

设初始时刻粒子 A 处于辅助维度 $|0\rangle$, 则系统的初态可表示为 $|\psi_0\rangle = |\psi\rangle \otimes |0\rangle_A$. 定义操作 V_1 , 将系统的初态 $|\psi_0\rangle$ 编码到 A 粒子的四个基矢上, 可定

义为

$$|\psi_1\rangle = V_1|\psi_0\rangle, \quad (1)$$

这里

$$|\psi_1\rangle = (a_1|00\rangle_{AA} + a_2|01\rangle_{AA} + a_3|10\rangle_{AA} + a_4|11\rangle_{AA}) \otimes |0\rangle_B. \quad (2)$$

这样, 原来的两量子比特的普适么正演化 U 可通过对 A 粒子自身的操作实现, 即

$$|\psi_2\rangle = U|\psi_1\rangle, \quad (3)$$

$$|\psi_2\rangle = (b_1|00\rangle_{AA} + b_2|01\rangle_{AA} + b_3|10\rangle_{AA} + b_4|11\rangle_{AA}) \otimes |0\rangle_B. \quad (4)$$

最后, 定义操作 V_2 , 将状态 $|\psi_2\rangle$ 的信息还原到两粒子原基矢空间中, 可表示为

$$|\phi\rangle = V_2|\psi_2\rangle = |\Phi\rangle_{AB} \otimes |0\rangle_A. \quad (5)$$

此过程对应的量子线路如图 1(a) 所示. 其中, U_{AA} 为作用在 A 粒子四维空间中的么正操作, 且 $U_{AA} = U$, 可通过 CSD 分解^[7,8] 为

$$U = \begin{pmatrix} X_1 & & & \\ & Y_1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 & & & \\ & Y_2 & & \end{pmatrix}, \quad (6)$$

X_1, X_2, Y_1, Y_2 为 2×2 的么正矩阵. 而两比特的操作 V_1 和 V_2 又可以通过如图 1(b), (c) 所示线路实现, 其中 A 粒子四维空间中的单比特操作 X 定义为

$$X \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

E_1, E_2 是高维两比特间的 CNOT 门. E_1 的作用是若 B 粒子处于 $|0\rangle$ 态, 不作任何操作; 若处于 $|1\rangle$ 态, A 粒子原来维度空间中的态进行反转, 而辅助维度中的态不变. E_2 的作用是若 A 粒子在原来维度空间中处于 $|0\rangle$ 态, 不作任何操作; 若处于 $|1\rangle$ 态, B 粒子进行反转. 操作 X, E_1, E_2 和 U_{AA} 的物理实现见 3.1.

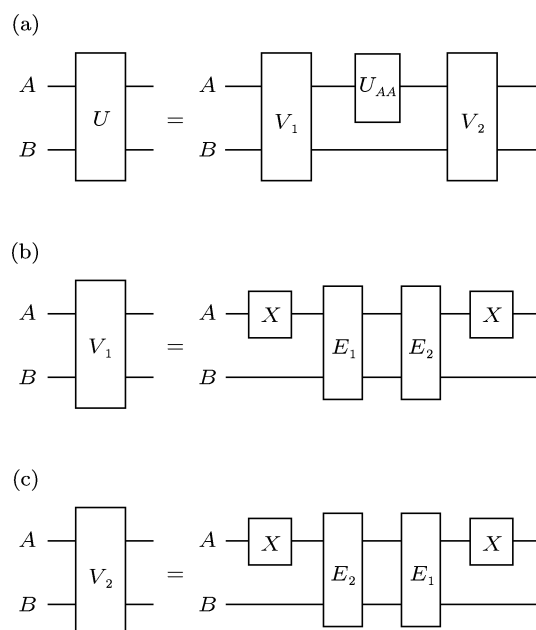


图 1 高维辅助的两比特量子线路设计图 (a) U 操作的量子线路图 (b) V_1 操作的量子线路图; (c) V_2 操作的量子线路图

这样, 我们借助于辅助维度成功地设计出了两比特量子线路, 该线路仅需要 4 个 CNOT 门, 虽然比目前最优的 QSD 分解^[7] 多一个, 但已明显少于 CSD 分解^[8] (8 个 CNOT).

2.2 三比特量子线路的优化

对于三个量子比特 A, B, C 的普适幺正演化 U , 初始态为

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = & a_1|000\rangle_{ABC} + a_2|001\rangle_{ABC} + a_3|010\rangle_{ABC} \\ & + a_4|011\rangle_{ABC} + a_5|100\rangle_{ABC} + a_6|101\rangle_{ABC} \\ & + a_7|110\rangle_{ABC} + a_8|111\rangle_{ABC}. \end{aligned}$$

仍设粒子具有二维辅助维度 $|0\rangle, |1\rangle$, 可以先利用辅助维度将 B 粒子的逻辑空间维度进行直积扩展, 由 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 扩展为 $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. 设初始态为 $|\psi_0\rangle = |\psi\rangle \otimes |0\rangle_B$, 将 B, C 粒子的初态编码到 B 粒子的四个基矢上, 可定义为 $|\psi_1\rangle = V_1|\psi_0\rangle$, 然后进行一个两比特幺正操作 $U_{ABB} \equiv U$, $|\psi_2\rangle = U_{ABB}|\psi_1\rangle$, 最后再通过 V_2 操作将状态 $|\psi_2\rangle$ 还原到 A, B, C 三粒子的基矢空间中. 该过程的量子线路如图 2(a) 所示. 两比特操作 U_{ABB} 对应于 $2^3 \times 2^3$ 维的幺正矩阵, 先对其进行 CSD 分解, 分解成 $2^2 \times 2^2$ 的幺正矩阵 X_1, X_2, Y_1, Y_2 和实对角矩阵 C, S ,

$$\begin{aligned} C &= \text{diag}(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \cos \varphi_4), \\ S &= \text{diag}(\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_4). \end{aligned}$$

再对矩阵 X_1, X_2, Y_1, Y_2 进行 QSD 分解^[7] 得到 $2^2 \times 2^2$ 的幺正矩阵 P_1, P_2, Q_1, Q_2 和对角矩阵 D, D^\dagger ,

$$\begin{aligned} D &= \text{diag}(e^{-i\varphi_1/2}, e^{-i\varphi_2/2}, e^{-i\varphi_3/2}, e^{-i\varphi_4/2}), \\ D^\dagger &= \text{diag}(e^{i\varphi_1/2}, e^{i\varphi_2/2}, e^{i\varphi_3/2}, e^{i\varphi_4/2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{ABB} &= \begin{pmatrix} X_1 & \\ & Y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 & \\ & Y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_1 & \\ & P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & \\ & D^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & \\ & Q_1 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & \\ & P_2 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} D & \\ & D^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_2 & \\ & Q_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

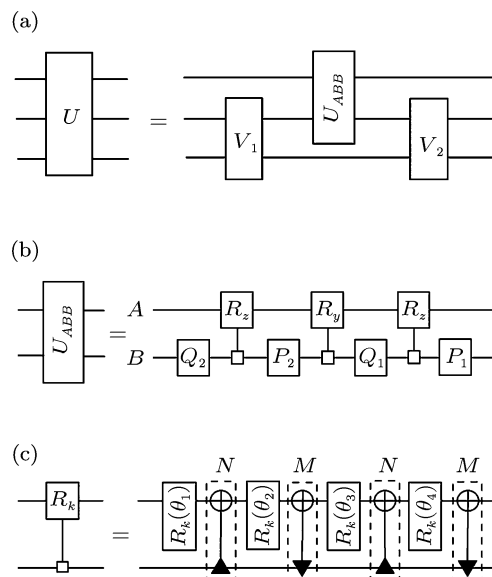


图 2 高维辅助的三比特量子线路设计图 (a) U 的分解图; (b) U_{ABB} 的分解图, A 为二维空间量子比特, B 为四维空间量子比特; (c) 四维复合受控门, \blacktriangle 代表控制比特 B 为 $|10\rangle$ 或 $|11\rangle$ 时比特 A 进行 Pauli-X 门操作, \blacktriangledown 代表控制比特 B 为 $|01\rangle$ 或 $|11\rangle$ 时比特 A 进行 Pauli-X 门操作, $k = y, z$

该矩阵对应的量子线路如图 2(b) 所示. 这样就将 U_{ABB} 分解为 4 个单比特操作和 3 个两比特操作. 两比特间的复合受控门 R_y 或 R_z 的控制比特 B 为四维, 可对其进行如图 2(c) 分解, 该过程的矩阵表示分别为

$$\begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} = M[R_y(\theta_4) \otimes I_4]N[R_y(\theta_3) \otimes I_4]M \times [R_y(\theta_2) \otimes I_4]N[R_y(\theta_1) \otimes I_4], \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} D \\ D^\dagger \end{pmatrix} = M[R_z(\theta_4) \otimes I_4]N[R_z(\theta_3) \otimes I_4]M \times [R_z(\theta_2) \otimes I_4]N[R_z(\theta_1) \otimes I_4], \quad (10)$$

其中 R_y, R_z 分别为绕 y 轴和 z 轴旋转的门, 其矩阵表示为

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & \sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$R_z = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

I_4 为 4×4 的单位矩阵, M 和 N 矩阵可以表示为

下列形式:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

θ 和 φ 之间有下列关系:

$$\theta_1 = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4),$$

$$\theta_2 = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4),$$

$$\theta_3 = \frac{1}{4}(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4),$$

$$\theta_4 = \frac{1}{4}(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4). \quad (14)$$

显然四维复合受控门需 4 个 CNOT 门构成. 在文献 [7] 中, 二维控制比特的复合受控门需要 CNOT 的数量为 2^n , 由此可以推得四维控制比特的多路复合受控门其 CNOT 数为 4^n , n 为控制比特的数量.

这样, 我们利用辅助维度设计的三比特量子线路只需要 16 个 CNOT, 比目前最优的 QSD 分解 (20 个 CNOT) 要少 4 个, 距离数学极限 (14 个 CNOT) 只差 2 个 CNOT.

2.3 N 比特量子线路的优化

在粒子的二维辅助维度的帮助下, 对于更多比特的量子线路可以应用类似于前面的作法, 将每两个比特的信息编码到其中一个比特的高维空间中, 然后对高维的量子门递归地使用 CSD 和 QSD 分解, 容易验证其复杂度的计算公式为

$$C_n = \begin{cases} (5/16) \times 4^n - (5/4) \times 2^n + 2n & n = 4, 6, 8 \dots; \\ (5/16) \times 4^n - 2^n + 2(n-1) & n = 5, 7, 9 \dots \end{cases} \quad (15)$$

几种构造方案的优化效果在表 1 中呈现. 从表中可以看出, 随着比特数的增加, 高维辅助的量子线路构造方案的优势将更加明显.

表 1 三种量子线路的构造方案的复杂度比较

构造方案	比特数和复杂度					
	1	2	3	4	5	n
CSD	0	8	48	224	960	$4^n - 2^{n+1}$
QSD	0	3	20	100	444	$23/48 \times 4^n - 3 \times 2^{n-1} + 4/3$
高维辅助	0	4	16	68	296	(15) 式
数学极限	0	3	14	61	252	$(4^n - 3n - 1)/4$

3 实现方案

3.1 两比特量子线路优化的实现方案

量子态可通过光子的偏振或者路径进行编码. 这里, 两量子比特原 Hilbert 空间可由两光子的偏振编码得到, $|H\rangle$ 代表水平偏振态, $|V\rangle$ 代表垂直偏振

态. 两光子 A, B 的任意初态 $|\psi\rangle$ 可表示为

$$|\psi\rangle = a_1|HH\rangle + a_2|HV\rangle + a_3|VH\rangle + a_4|VV\rangle. \quad (16)$$

对光子 A , 引入两个路径态 $|S_1\rangle, |S_2\rangle$ 可实现向四维空间的拓展, 基矢为 $\{|HS_1\rangle, |HS_2\rangle, |VS_1\rangle, |VS_2\rangle\}$.

扩展后的两光子 Hilbert 空间基矢为

$$\begin{aligned} & \{|HS_1H\rangle, |HS_1V\rangle, |HS_2H\rangle, |HS_2V\rangle, \\ & |VS_1H\rangle, |VS_1V\rangle, |VS_2H\rangle, |VS_2V\rangle\}_{AAB}. \end{aligned}$$

要实现图 1 中的操作 V_1 和 V_2 , 首先要实现一个四维空间中的单比特操作 X . 图 1 中的 X 将作用在 A 粒子的基矢 $\{HS_1, HS_2, VS_1, VS_2\}$ 上, 如图 3 所示, S_1 和 S_2 为光子 A 的不同路径, PBS 为偏振分束器, HWP_{45° 表示光轴角度为 45° 的半波片, 其作用是使光子的偏振旋转 90° . 若进入 X 的粒子状态为

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = & a_1|HS_1\rangle + a_2|HS_2\rangle + a_3|VS_1\rangle \\ & + a_4|VS_2\rangle, \end{aligned}$$

那么输出状态变为

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle = & a_1|HS_1\rangle + a_3|HS_2\rangle + a_2|VS_1\rangle \\ & + a_4|VS_2\rangle, \end{aligned}$$

从这里可以看出 X 实现了偏振状态与路径状态的交换. 其次还需要实现高维两比特间的 CNOT 门 E_1 和 E_2 . E_1, E_2 的实现需要借助 Hadamard 门, X 门和一种特殊的受控相位门 K , 如图 4 所示, 其中 $HWP_{22.5^\circ}$ 表示光轴角度为 22.5° 的半波片, 其作用是实现了 Hadamard 门. 受控相位门 K 可通过腔 QED^[19,20] 方式实现, 基于文献 [19], 将其方案中的偏振分束器和反射镜去掉即可实现 K , 如图 5 所示. K 的作用过程是当且仅当 i_2 有光子进入时, i_1 输入的光子比特获得一个相位 π , 使其由 $|H\rangle$ ($|V\rangle$) 变为 $-|H\rangle$ ($-|V\rangle$). 这样由 X 和 E_1, E_2 就可以根据图 1(b), (c) 实现 V_1 和 V_2 . 而图 1 中的单比特操作 U_{AA} 根据 (6) 式的分解可以由如图 6 所示光路实现, 图中 G 为偏振旋转器^[18], θ 为其偏振旋转角. 至此就完整的实现了高维两比特普适量子线路.

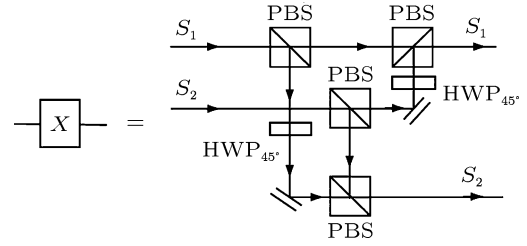


图 3 X 的实现光路图

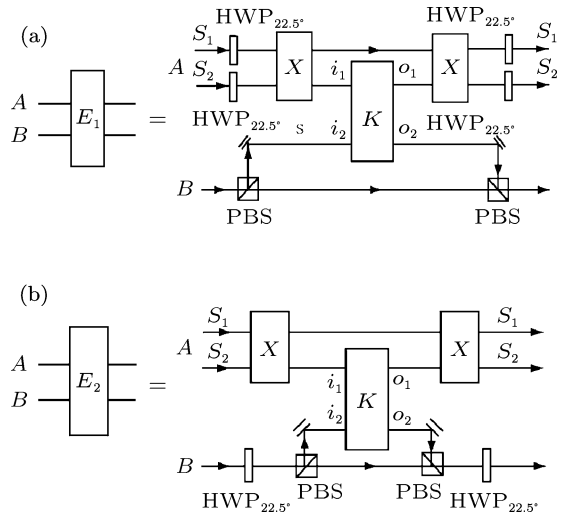


图 4 E_1 和 E_2 的实现光路图 (a) E_1 的实现光路; (b) E_2 的实现光路

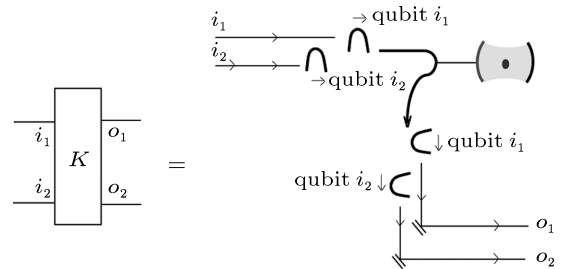


图 5 受控相位门 K 的腔 QED 方案

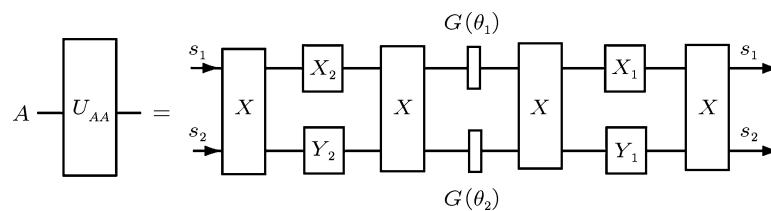


图 6 U_{AA} 的实现光路

3.2 三比特量子线路优化的实现方案

基于图 2(a) 所示的高维辅助的三比特量子线路, 其中 V_1 和 V_2 已在上一节中实现, 现在只需实现 AB 两粒子之间的操作 U_{ABB} , 对应图 2(b) 所示的 U_{ABB} 线路, 进入该线路的基矢为 $\{|HHS_1\rangle, |HHS_2\rangle, |HVS_1\rangle, |HVS_2\rangle, |VHS_1\rangle,$

$|VHS_2\rangle, |VVS_1\rangle, |VVS_2\rangle\}_{ABB}$. 图 2(c) 中, 四维复合受控门 R_z 和 R_y 的实现需要借助偏振移相器和偏振旋转器 [18], 如图 7 所示, 其中 W 为偏振移相器, 其与 R_z 的关系为

$$R_z(\theta) = W\left(\frac{\theta}{2}\right) = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

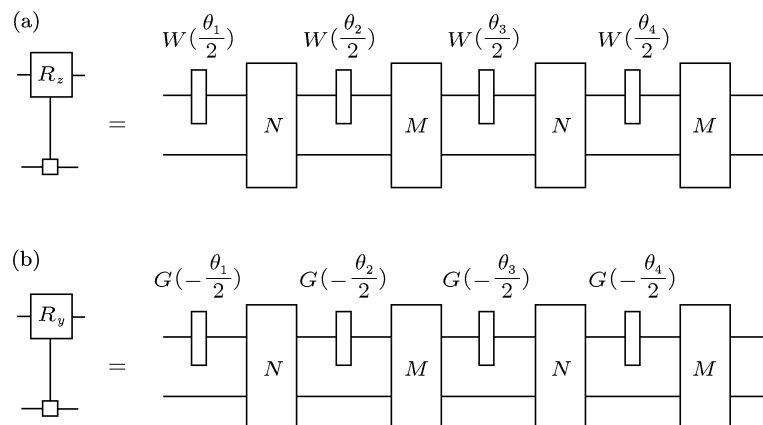


图 7 (a) 高维复合受控门 R_z 的分解线路; (b) 高维复合受控门 R_y 的分解线路

G 为偏振旋转器, 其与 R_y 的关系为

$$R_y(\theta) = G\left(-\frac{\theta}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

而高维两比特间的操作 N 和 M 需要借助于受控相位门 K . 图 8 即为实现操作 M 的线路图. 而根据 N 和 M 之间的关系, 可实现操作 N , 如图 9 所示. 这样就实现了高维辅助的三比特量子线路.

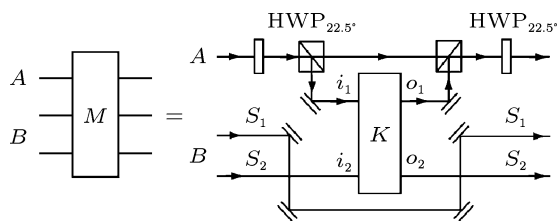


图 8 腔 QED 方法实现操作 M 的线路图 (B 的 S_2 路径上的光子作为控制比特, A 上的光子为受控比特)

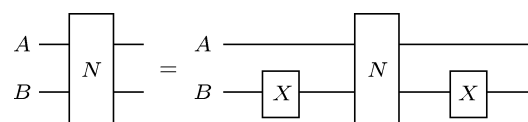


图 9 实现 N 操作的光路图

4 结论

本文提出了一种利用辅助维度构造量子线路的新方案, 优化了两比特及三比特普适量子线路. 构造两比特普适量子线路需要 4 个 CNOT, 而三比特普适量子线路的只需要 16 个 CNOT, 比目前的最优方案还要少 4 个. 对此我们利用线性光学和腔 QED 系统设计了实验方案. 除此之外, 对于任意 n 比特普适量子线路的优化, 我们给出了计算其复杂度的公式, 通过计算结果发现, 随着比特数的增加, 我们的方法在减少复杂度方面效果越发明显, 对于提高量子线路的效率有重要意义.

- [1] Barenco A, Bennett C, Cleve R, DiVincenzo D P, Margolus N, Shor P, Sleator T, Smolin J A, Weinfurter H 1995 *Phys. Rev. A* **52** 3457
- [2] Cybenko G 2001 *Comp. in Sci. and Engin.* **3** 27
- [3] Golub G H, Van Loan C F 1996 *Matrix Computations* (3rd ed) (Baltimore: The Johns Hopkins University Press) p223
- [4] Knill E 1995 *Approximation by quantum circuits LANL report LAUR-95-2225*
- [5] Aho A V, Svore K M e-print, quant-ph/0311008[2003]
- [6] Vartiainen J J, Möttönen M, Salomaa M M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 177902
- [7] Shende V V, Bullock S S, Markov I L 2006 *IEEE Trans. on Computer-Aided Design.* **25** 1000
- [8] Möttönen M, Vartiainen J J, Bergholm V, Salomaa M M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 130502
- [9] Bergholm V, Vartiainen J J, Möttönen M, Salomaa M M 2005 *Phys. Rev. A.* **71** 052330
- [10] Tucciv R R e-print, quant-ph/9805015[1998]
- [11] Möttönen M, Juha J V quant-ph/0504100[2005]
- [12] Shende V V, Markov I L, Bullock S S 2004 *Phys. Rev. A* **69** 062321
- [13] Hanneke D, Home J P, Jost J D, Amini J M, Leibfried D, Wineland D J, 2009 *Nature Physics* **6** 13
- [14] Ralph T C, Resch K J, Gilchrist A 2007 *Phys. Rev. A* **75** 022313
- [15] Lanyon B P, Barbier M, Almeida M P, Jennewein T, Ralph T C, Resch K J, Pryde G J, O'Brien J L, Gilchrist A, White A G 2008 *Nature Physics* **5** 134
- [16] Preskill J 2001 *Quantum Information and Computation* (Ft. Belvoir: Defense Acquisition University Press) p250
- [17] Ralph T C, Langford N K, Bell T B, White A G 2002 *Phys. Rev. A* **65** 062324
- [18] Chen G, Church D A, Englert B G, Henkel C, Rohwedder B, Scully M O, Zubairy M S 2007 *Quantum Computing Devices Principles, Designs, and Analysis* (1st ed) (Boca Raton: Chapman & Hall/CRC) p347
- [19] Duan L M, Kimble H J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 127902
- [20] Lin Xiumin 2005 *PH.D. Dissertation* (Hefei: University of Science and Technology of China) (in Chinese) [林秀敏 2005 博士学位论文 (合肥: 中国科学技术大学)]

Optimizing quantum circuits using higher-dimensional Hilbert spaces

Liu Kai Li Wen-Dong Zhang Wen-Zhao Shi Peng Ren Chun-Nian Gu Yong-Jian[†]

(Department of Physics, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

(Received 23 August 2011; revised manuscript received 7 November 2011)

Abstract

Inspired by Lanyon (B. P. Lanyon *et al.* 2008 *Nature Physics* **5** 134) successfully simplifying the three-qubit Toffoli gate, we present a novel scheme that optimizes universal quantum logic circuits using assisted higher-dimensional Hilbert space. We construct a more efficient two-qubit circuit and a more effective three-qubit universal quantum circuit by using assisted dimension, Cosine-Sine Decomposition (CSD) and Quantum Shannon Decomposition (QSD). Meanwhile, we present the formula for the complexity of arbitrary n-qubit universal quantum gate. We propose the physical implementation of this scheme by linear optical circuits and cavity-QED. The results show that the two-qubit and three-qubit universal quantum circuits are respectively close and superior to the current optimal scheme in complexity. And with the increase of the number of qubits, the advantage of our scheme will become increasingly prominent.

Keywords: higher-dimensional Hilbert space, quantum circuits, quantum complexity

PACS: 03.67.-a, 42.50.EX

[†] E-mail: yjgu@ouc.edu.cn