

旋转致密双星后牛顿轨道的引力波研究*

钟双英[†] 刘崧

(南昌大学理学院, 南昌 330031)

(2011年9月25日收到; 2011年10月27日收到修改稿)

本文利用辛算法和功率谱研究旋转致密双星保守的后牛顿哈密顿系统的引力辐射, 讨论了系统的动力学参量、旋转-轨道耦合、旋转-旋转耦合效应及轨道类型对后牛顿近似引力波形的影响. 数值结果表明有序轨道的引力波随时间呈周期性地变化, 而混沌轨道引力波的变化具有混沌性, 并且轨道的混沌特性可提高引力波的辐射能量, 尤其指出的是旋转参量大小对引力波形的变化发挥至关重要的作用.

关键词: 保守的, 旋转致密双星, 引力波, 辛算法

PACS: 04.25.dg, 04.25.Nx, 04.30.-w, 05.45.-a

1 引言

由中子星或黑洞构成的旋转致密双星后牛顿哈密顿系统属于高度非线性和不可积的相对论二体问题, 含有丰富的共振和混沌等动力学现象, 旋进合并过程中的引力辐射是引力波探测器理想的观测波源. 引力波有 h_+ 和 h_\times 两种偏振态, 由观测者位置与系统质量四极矩关于时间的二阶导数来确定, 而引力辐射总能量与该系统质量四极矩对时间的三阶导数的平方成正比, 这必然导致引力体的动力学性质会在引力波中得到反映, 例如通过观测双星系统引力波波形的变化来估算双星的质量和轨道倾斜度等.

尽管双星旋进合并时辐射出来引力波强度很大, 受诸多因素的影响, 探测器接收到的是掺杂着大量噪声的信号, 通过匹配的数据处理分析方法将探测信号与引力波理论模型对比才可确认. 目前, 关于相对论两体的引力辐射理论研究非常成熟^[1-3], 通常情况下两体引力辐射的精确解析解不存在的, 一种是将引力场度规作后牛顿近似展开的引力波理论^[1,2]; 另一种就是计算机数值模拟“3+1”分解形式的爱因斯坦场方程, 针对黑洞双星合并过程中引力辐射理论研究也取得较为满

意的结果^[3]. 此外, 高度非线性的致密双星系统出现混沌是必然的, 混沌动力行为对引力辐射产生重要的影响, 能有效地提高能量辐射率^[4,5], 同时使得引力波波形随机变化, 不可预测. 其次, 轨道平面与观察者之间的夹角方向随着轨道平面的进动而改变, 导致引力波的波形被调制, 引力波的幅度不断改变, 这就要求提供更为精确引力波的理论模型供对比参考. 诸多文献研究结果表明无论是在谐和坐标下的后牛顿 (post-Newtonian, PN) 近似展开的 Lagrangian 描述的黑洞双星^[1,6,7], 还是 PN 近似 ADM 哈密顿系统^[8-10] 均展现了丰富的混沌现象. Levin^[7] 利用分形盆边界方法研究了 Lagrangian 型致密双星系统, 发现一体旋转质量相近和二体旋转的等质量的 2PN Lagrangian 系统在实际物理旋转参数条件下存在混沌. 但是 Konigsdorffer 和 Gopakumar^[8,9] 却指出一体旋转质量相近 2PN Hamiltonian 系统是不可能出现混沌的, 这看似矛盾的结论是由不同近似动力学方程引起^[11]. 2010年 Wu 等^[12] 设计了一组共轭正则旋转变量, 得到了全局保辛结构的致密双星后牛顿正则哈密顿, 为判定致密双星正则哈密顿系统的可积性提供极大便利, 也为辛算法在在广义相对论引力系统中应用提供重要的理论依据. 以上文献^[8,9] 中一体旋转 2PN Hamiltonian 系统由坐标、动量和非共

* 国家自然科学基金 (批准号:11165011) 资助的课题.

[†] E-mail: zhongshuangying@ncu.edu.cn

旋转变量构成的 9 维相空间包含总能量积分、总角动量积分(总角动量三个分量)共 4 个积分,但还不能确保系统一定是可积的,采用正则旋转变量改写后的哈密顿相空间降为 8 维,该系统有四个首次积分明显是可积的,不可能出现混沌,这样文献 [7] 和文献 [8,9] 之间争议很容易理解.此外,利用它还可以进一步发现仅含轨道 - 旋转作用到 2.5 阶的保守 Hamiltonian 系统仍然是可积的而非混沌的 [13]. 文献 [12] 又指出其他情况下旋转致密双星一般是混沌的,文献 [14—18] 借助两邻近轨道不变快速 Lyapunov 指标 (FLI) [19] 对旋转致密双星后牛顿系统的相空间全局结构扫描发现了大量的混沌轨道存在,数值实践证明 FLI 比一般 Lyapunov 指数方法更有效监测致密双星的混沌,充分说明旋转致密双星的混沌现象的识别与采用的 PN 运动方程形式、可靠的数值计算方法及恰当的混沌识别指标有关,其初始条件、动力学参量及初始自旋方位角等共同确定系统动力学的变迁.

辛算法具有保能量和保辛结构的优点,广泛用于 Hamilton 系统定性演化问题研究 [20,21],但相对论引力系统的度规张量对应一个超 Hamilton,不具备可积分的形式,所以辛算法在广义相对论中的运用不太常见. Lubich 等 [22] 构造了用半隐 Euler 嵌入法合成的非正则“辛积分器”(即由牛顿项和旋转项两部分的解析解与半隐 Euler 法求解纯轨道后牛顿部分所得数值解组合而成,所谓“半隐”意味“位置坐标为隐式而动量却为显式表达”或“动量为隐式而位置坐标却为显式表达”)数值求解自旋致密双星后牛顿 Hamilton 构型,其不足在于当高阶旋转效果引入时,旋转部分的解析解难以给出;其次,我们数值实验证实了半隐 Euler 嵌入法比隐中点嵌入法的稳定性要差很多 [23]. 考虑这些因素,在文献 [15] 中我们利用正则旋转变量和隐中点法以对称组合方式构造了二阶混合辛积分器,数值结果表明尽管后牛顿项、旋转效应项和轨道类型影响着辛算法数值精度,但在长期数值积分过程中能量误差无线性增长,体现了辛算法的本质特性.另一方面,系统的混沌行为能有效地促进迭代算法的快速收敛,提高计算效率.因而,隐中点嵌入法的混合辛积分器成为我们解致密双星复杂哈密顿最佳的积分工具.

本文主要利用隐中点嵌入法组合成的二阶混合辛积分器数值解旋转致密双星保守的后牛顿正则 Hamiltonian 运动方程,讨论双星的初始条件、

动力学参量和轨道类型等对后牛顿近似轨道引力辐射的影响,比较哈密顿中牛顿项、后牛顿项、旋转 - 轨道耦合项及旋转 - 旋转耦合项对引力波强度的贡献,并借助功率谱描述引力波辐射的周期性现象.

2 物理模型和引力波方程

2.1 正则哈密顿形式及运动方程

在不考虑引力辐射等耗散因素的情况下,设旋转致密黑洞双星两体的质量分别为 m_1 和 m_2 ($m_1 \leq m_2$),总质量 $M = m_1 + m_2$,约化质量 $\mu = m_1 m_2 / M$,质量比 $\beta = m_1 / m_2$, $\eta = m_1 m_2 / M^2 = \beta / (1 + \beta)^2$,无量纲的坐标 \mathbf{r} 以质量 M 为单位,动量 \mathbf{p} 以约化质量为单位,时间 t 的单位也是质量 M . 同时定义矢量 \mathbf{r} 的长度表示两体之间的距离,那么单位矢量 $\mathbf{n} = \mathbf{r} / r$. 保守 3PN Hamilton 在相对坐标系下象征性地表示为

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = H_N + H_{PN} + H_{SO} + H_{SS}, \quad (1)$$

方程 (1) 中的第一项 H_N 代表纯轨道部分牛顿项, H_{PN} 表示后牛顿项(包含 1PN, 2PN, 3PN), H_{SO} 为旋转与轨道耦合效应项(1.5PN), H_{SS} 则为旋转与旋转耦合效应项(2PN),每部分的具体表达式、坐标和动量正则运动方程及两体旋转进动非正则方程详见文献 [14].

令旋转矢量 $\mathbf{S}_i = \hat{\mathbf{S}}_i (\chi_i m_i^2 / M^2)$ ($i = 1, 2$),无量纲参数 $\chi_i \in [0, 1]$,且 $\hat{\mathbf{S}}_i$ 为单位旋转矢量,以类圆柱坐标 $(\rho_i, \theta_i, \xi_i)$ 表为

$$\hat{\mathbf{S}}_i = \begin{pmatrix} \rho_i \cos \theta_i \\ \rho_i \sin \theta_i \\ k_i \xi_i \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中 $\rho_i = \sqrt{1 - (k_i \xi_i)^2}$ ($k_i = M^2 / (\chi_i m_i^2)$),而 θ_i 是旋转方位角,文献 [12] 已经证明了 (θ_i, ξ_i) 是一对共轭正则变量,将新的正则旋转变量代入原哈密顿 H_{SO} 和 H_{SS} 的表达式中,便得到以正则旋转变量表示的旋转哈密顿 $\tilde{H}_{SO}(\mathbf{r}, \theta_1, \theta_2; \mathbf{p}, \xi_1, \xi_2)$ 和 $\tilde{H}_{SS}(\mathbf{r}, \theta_1, \theta_2; \mathbf{p}, \xi_1, \xi_2)$ 两部分. 经过替换后系统 (1) 就成为具有全局保辛结构的正则哈密顿系统,记作

$$\begin{aligned} & \tilde{H}(\mathbf{r}, \theta_1, \theta_2; \mathbf{p}, \xi_1, \xi_2) \\ & = H_N + H_{PN} + \tilde{H}_{SO} + \tilde{H}_{SS}. \end{aligned} \quad (3)$$

那么两体的旋转正则进动方程为

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_i}{dt} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \xi_i}, \\ \frac{d\xi_i}{dt} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta_i}.\end{aligned}\quad (4)$$

这样, $(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$ 装配的 12 维相空间便降为 10 维即 5 维广义坐标 $(\mathbf{r}, \theta_1, \theta_2)$ 和广义动量 $(\mathbf{p}, \xi_1, \xi_2)$, 包含了 4 个运动积分即总能量积分和总角动量积分 (总角动量三个分量), 由于第 5 个积分缺失, 故正则哈密顿系统 (3) 是不可积的。

2.2 引力波方程

2PN 精度的引力波辐射公式^[2]

$$\begin{aligned}h^{ij} &= \frac{2\mu}{R} [\tilde{Q}^{ij} + P^{1/2}Q^{ij} + PQ^{ij} + PQ_{\text{SO}}^{ij} + P^{3/2}Q^{ij} \\ &\quad + P^{3/2}Q_{\text{SO}}^{ij} + P^2Q^{ij} \\ &\quad + P^2Q_{\text{SS}}^{ij} + O(\varepsilon^{5/2})]_{\text{TT}},\end{aligned}\quad (5)$$

其中, 上标中数字表示后牛顿近似的精度, 而字母 (i, j) 表示三维分量, \tilde{Q}^{ij} 是标准四极矩项, PQ^{ij} 纯轨道后牛顿部分, PQ_{SO}^{ij} 和 PQ_{SS}^{ij} 是旋转效应项, 具体表达式为

$$\tilde{Q}^{ij} = 2\left(\nu^i\nu^j - \frac{m}{r}\hat{\mathbf{n}}^i\hat{\mathbf{n}}^j\right),\quad (6)$$

$$P^{1/2}Q^{ij} = \frac{\delta m}{m} \left\{ 3(\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \frac{m}{r} [2\hat{n}^{(i}\nu^{j)} - \dot{r}\hat{n}^i\hat{n}^j] + (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v}) \left[\frac{m}{r}\hat{n}^i\hat{n}^j - 2\nu^i\nu^j \right] \right\},\quad (7)$$

$$\begin{aligned}PQ^{ij} &= \frac{1}{3} \left\{ (1 - 3\eta) \left[(\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \frac{m}{r} \left[(3\nu^2 - 15\dot{r}^2 + 7\frac{m}{r})\hat{n}^i\hat{n}^j + 30\dot{r}\hat{n}^{(i}\nu^{j)} - 14\nu^i\nu^j \right] \right. \right. \\ &\quad + (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v}) \frac{m}{r} [12\dot{r}\hat{n}^i\hat{n}^j - 32\hat{n}^{(i}\nu^{j)}] + (\hat{\mathbf{N}} \cdot \nu)^2 \left[6\nu^i\nu^j - 2\frac{m}{r}\hat{n}^i\hat{n}^j \right] \left. \right\} + \left[3(1 - 3\eta)\nu^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(23\eta) \frac{m}{r} \right] \nu^i\nu^j + 4\frac{m}{r}\dot{r}(5 + 3\eta)\hat{n}^{(i}\nu^{j)} + \frac{m}{r} \left[3(1 - 3\eta)\dot{r}^2 - (10 + 3\eta)\nu^2 + 29\frac{m}{r} \right] \hat{n}^i\hat{n}^j \Big\},\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}P^{3/2}Q^{ij} &= \frac{\delta m}{m} (1 - 2\eta) \left\{ (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^3 \frac{m}{r} \left[\frac{5}{4}(3\nu^2 - 7\dot{r}^2 + 6\frac{m}{r})\dot{r}\hat{n}^i\hat{n}^j - \frac{17}{2}\dot{r}\nu^i\nu^j \right. \right. \\ &\quad - \frac{1}{6}(21\nu^2 - 105\dot{r}^2 + 44\frac{m}{r})\hat{n}^{(i}\nu^{j)} \left. \right] + \frac{1}{4}(\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v}) \frac{m}{r} \\ &\quad \times \left[58\nu^i\nu^j + (45\dot{r}^2 - 9\nu^2 - 28\frac{m}{r})\hat{n}^i\hat{n}^j - 108\dot{r}\hat{n}^{(i}\nu^{j)} \right] \\ &\quad + \frac{3}{2}(\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v})^2 \frac{m}{r} [10\hat{n}^{(i}\nu^{j)} - 3\dot{r}\hat{n}^i\hat{n}^j] + \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v})^3 \left[\frac{m}{r}\hat{n}^i\hat{n}^j - 4\nu^i\nu^j \right] \Big\} \\ &\quad + \frac{1}{12} \frac{\delta m}{m} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \frac{m}{r} \left[2\hat{n}^{(i}\nu^{j)} (\dot{r}^2(63 + 54\eta) + \nu^2(33 - 18\eta) - \frac{m}{r}(128 - 36\eta)) \right. \\ &\quad \left. + \hat{n}^i\hat{n}^j\dot{r} (\dot{r}^2(15 - 90\eta) - \nu^2(63 - 54\eta) + \frac{m}{r}(242 - 24\eta)) - \dot{r}\nu^i\nu^j(186 + 24\eta) \right] \\ &\quad + \frac{\delta m}{m} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v}) \left[\frac{1}{2}\nu^i\nu^j \left(\frac{m}{r}(3 - 8\eta) - 2\nu^2(1 - 5\eta) \right) - \hat{n}^{(i}\nu^{j)} \frac{m}{r}\dot{r}(7 + 4\eta) \right. \\ &\quad \left. - \hat{n}^i\hat{n}^j \frac{m}{r} \left(\frac{3}{4}(1 - 2\eta)\dot{r}^2 + \frac{1}{3}(26 - 3\eta)\frac{m}{r} - \frac{1}{4}\nu^2(7 - 2\eta) \right) \right],\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}P^2Q^{ij} &= \frac{1}{60} (1 - 5\eta + 5\eta^2) \left\{ 24(\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v})^4 \left[5\nu^i\nu^j - \frac{m}{r}\hat{n}^i\hat{n}^j \right] + \frac{m}{r} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^4 \left[\left(175\frac{m}{r} - 465\dot{r}^2 + 93\nu^2 \right) \nu^i\nu^j \right. \right. \\ &\quad + 30\dot{r} \left(63\dot{r}^2 - 50\frac{m}{r} - 27\nu^2 \right) \hat{n}^{(i}\nu^{j)} + \left(1155\frac{m}{r}\dot{r}^2 - 172\left(\frac{m}{r}\right)^2 - 945\dot{r}^4 - 159\frac{m}{r}\nu^2 \right. \\ &\quad \left. + 630\dot{r}^2\nu^2 - 45\nu^4 \right) \hat{n}^i\hat{n}^j \left. \right] + \frac{1}{24} \frac{m}{r} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^3 (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v}) \left[87\dot{r}\nu^i\nu^j + 5\dot{r} \left(14\dot{r}^2 - 6\nu^2 - 15\frac{m}{r} \right) \hat{n}^i\hat{n}^j \right. \\ &\quad \left. + 16 \left(5\frac{m}{r} - 10\dot{r}^2 + 2\nu^2 \right) \dot{r}\hat{n}^{(i}\nu^{j)} \right] + 288\frac{m}{r} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v})^3 \left[\dot{r}\hat{n}^i\hat{n}^j - 4\hat{n}^{(i}\nu^{j)} \right] \\ &\quad \left. + 24(\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v})^2 \frac{m}{r} \left[\left(35\frac{m}{r} - 45\dot{r}^2 + 9\nu^2 \right) \hat{n}^i\hat{n}^j - 76\nu^i\nu^j + 126\dot{r}\hat{n}^{(i}\nu^{j)} \right] \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{15}(\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v})^2 \left\{ \left[5(25 - 78\eta + 12\eta^2) \frac{m}{r} - (18 - 65\eta + 45\eta^2)\nu^2 + 9(1 - 5\eta + 5\eta^2)r^2 \right] \frac{m}{r} \hat{n}^i \hat{n}^j \right. \\
 & + 3 \left[5(1 - 9\eta + 21\eta^2)\nu^2 - 2(4 - 25\eta + 45\eta^2) \frac{m}{r} \right] \nu^i \nu^j + 18(6 - 15\eta - 10\eta^2) \frac{m}{r} \dot{r} \hat{n}^{(i} \nu^{j)} \left. \right\} \\
 & + 15 \frac{m}{r} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v}) \left\{ \left[3(36 - 145\eta + 45\eta^2)\nu^2 - 5(127 - 392\eta + 36\eta^2) \frac{m}{r} \right. \right. \\
 & - 15(2 - 15\eta - 30\eta^2)r^2 \left. \right] \dot{r} \hat{n}^i \hat{n}^j + 6(98 - 295\eta - 30\eta^2) \dot{r} \nu^i \nu^j \\
 & + 2 \left[5(66 - 221\eta + 96\eta^2) \frac{m}{r} - 9(18 - 45\eta - 40\eta^2)r^2 - (66 - 265\eta + 360\eta^2)\nu^2 \right] \hat{n}^{(i} \nu^{j)} \left. \right\} \\
 & + \frac{1}{60} \frac{m}{r} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \left\{ \left[3(33 - 130\eta + 150\eta^2)\nu^4 + 105(1 - 10\eta + 30\eta^2)r^4 \right. \right. \\
 & + 15(181 - 572\eta + 84\eta^2) \frac{m}{r} \dot{r}^2 - (131 - 770\eta + 930\eta^2) \frac{m}{r} \nu^2 \\
 & - 60(9 - 40\eta + 60\eta^2) \dot{r}^2 \nu^2 - 8(131 - 390\eta + 30\eta^2) \left(\frac{m}{r} \right)^2 \left. \right] \hat{n}^i \hat{n}^j \\
 & + 4 \left[(12 + 5\eta - 315\eta^2)\nu^2 - 9(39 - 115\eta - 35\eta^2)r^2 + 5(29 - 104\eta + 84\eta^2) \frac{m}{r} \right] \nu^i \nu^j \\
 & + \frac{1}{60} \left\{ \left[(467 + 780\eta - 120\eta^2) \frac{m}{r} \nu^2 - 15(61 - 96\eta + 48\eta^2) \frac{m}{r} \dot{r}^2 \right. \right. \\
 & - (144 - 265\eta - 135\eta^2)\nu^4 + 6(24 - 95\eta + 75\eta^2)\nu^2 \dot{r}^2 - 2(642 + 5450\eta) \left(\frac{m}{r} \right)^2 \\
 & - 45(1 - 5\eta + 5\eta^2)r^4 \left. \right] \frac{m}{r} \hat{n}^i \hat{n}^j + \left[4(69 + 10\eta - 135\eta^2) \frac{m}{r} \nu^2 - 12(3 + 60\eta \right. \\
 & + 25\eta^2) \frac{m}{r} \dot{r}^2 + 45(1 - 7\eta + 13\eta^2)\nu^4 - 10(56 + 165\eta - 12\eta^2) \left(\frac{m}{r} \right)^2 \left. \right] \nu^i \nu^j \\
 & \left. + 4 \left[2(36 + 5\eta - 75\eta^2)\nu^2 - 6(7 - 15\eta - 15\eta^2)r^2 + 5(35 + 45\eta + 36\eta^2) \frac{m}{r} \right] \frac{m}{r} \dot{r} \hat{n}^{(i} \nu^{j)} \right\}, \quad (10)
 \end{aligned}$$

旋转部分

$$PQ_{\text{SO}}^{ij} = 2 \left(\frac{m}{r} \right)^2 \left\{ \hat{\mathbf{N}} \times \left[\left(\frac{\delta m}{m} \right) \boldsymbol{\chi}_s + \boldsymbol{\chi}_a \right] \right\}^{(ijn)}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 P^{3/2} Q_{\text{SO}}^{ij} = & 4 \left(\frac{m}{r} \right)^2 \left\{ 3(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}) \cdot \left[\left(\frac{\delta m}{m} \right) \boldsymbol{\chi}_a + \boldsymbol{\chi}_s \right] n^i n^j - \left[\mathbf{v} \times \left[(2 + \eta) \boldsymbol{\chi}_s + 2 \left(\frac{\delta m}{m} \right) \boldsymbol{\chi}_a \right] \right]^{(ijn)} + 3\dot{r} \right. \\
 & + 3\dot{r} \left[\hat{\mathbf{n}} \times \left[\boldsymbol{\chi}_s + \left(\frac{\delta m}{m} \right) \boldsymbol{\chi}_a \right] \right]^{(ijn)} - 2\eta(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\chi}_s)^{(ijn)} + \eta[(\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}})\mathbf{v} + 2(\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v})\hat{\mathbf{n}}] \\
 & \left. - 3\dot{r}(\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{n})\hat{\mathbf{n}} \right]^{(i} (\hat{\mathbf{N}} \times \boldsymbol{\chi}_s)^{j)} \left. \right\}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P^2 Q_{\text{SS}}^{ij} = & -6 \left(\frac{m}{r} \right)^3 \eta \left\{ [|\boldsymbol{\chi}_s|^2 - |\boldsymbol{\chi}_a|^2 - 5(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\chi}_s)^2 + 5(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\chi}_a)^2] n^i n^j \right. \\
 & \left. + 2[\boldsymbol{\chi}_s(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\chi}_s) - \boldsymbol{\chi}_a(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\chi}_a)]^{(ijn)} \right\}, \quad (13)
 \end{aligned}$$

式中 $\delta m = m_1 - m_2$, $\boldsymbol{\chi}_s = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{S}_1}{m_1^2} + \frac{\mathbf{S}_2}{m_2^2} \right)$, $\boldsymbol{\chi}_a = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{S}_1}{m_1^2} - \frac{\mathbf{S}_2}{m_2^2} \right)$, $\hat{\mathbf{N}}$ 是观察者的方向。

假定观察者位于 xoz 平面上, 设 $\hat{\mathbf{p}} = (1, 0, 0)$, 并且 $\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{p}}$, 牛顿轨道角动量 $\hat{\mathbf{L}}_{\text{N}}$ 与 $\hat{\mathbf{N}}$ 的夹角

为轨道倾角 i ($0 \leq i \leq \pi$), 旋转致密双星系统的引力辐射的两支极化引力波分别为

$$h_+ = \frac{1}{2} (\hat{p}_i \hat{p}_j - \hat{q}_i \hat{q}_j) h^{ij}, \quad (14)$$

$$h_\times = \frac{1}{2} (\hat{p}_i \hat{q}_j + \hat{q}_i \hat{p}_j) h^{ij}. \quad (15)$$

3 数值模拟

正则哈密顿 (3) 采用摄动分解形式后表述为

$$\tilde{H}(\mathbf{r}, \theta_1, \theta_2; \mathbf{p}, \xi_1, \xi) = \tilde{H}_{\text{kep}} + \tilde{H}_{\text{pert}}. \quad (16)$$

约定 Lie 算子 $A = \{\cdot, \tilde{H}_{\text{kep}}\}$ 和 $B = \{\cdot, \tilde{H}_{\text{pert}}\}$, 设 τ 为时间步长, 从 n 步到 $n + 1$ 步 \tilde{H}_{kep} 的解析解记为 $\exp(\tau A)$, 隐中点法求得数值解 \tilde{H}_{pert} 记为 $\exp(\tau B)$, 文献 [23] 用 $\exp(\tau A)$ 和 $\exp(\tau B)$ 对称组合得隐式中点法嵌入的二阶混合辛积分器

$$\text{MSI2} = \exp\left(\frac{\tau}{2}A\right) \circ \exp(\tau B) \circ \exp\left(\frac{\tau}{2}A\right). \quad (17)$$

利用 MSI2 方法数值模拟后牛顿轨道引力辐射, 考察黑洞双星质量比、动力学参量和轨道类型对引力波的振幅及波形的影响. 轨道 1 的初始条件和动力学参量分别为: $(\beta, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = (1/3, 35, 0, 0, 0, 0.179, 0)$, $\chi_1 = 0.65$, $\chi_2 = 0.75$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$, $\xi_1 = 0.253125$ 和 $\xi_2 = 0.0234375$; 轨道 2 $(\beta, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = (1, 5.5, 0, 0, 0, 0.078, 0)$, $\chi_1 = \chi_2 = 1$, $\theta_1 = 1.110399\text{rad}$, $\theta_2 = 0.8469399\text{rad}$, $\xi_1 = 0.23899725$ 和 $\xi_2 = -0.2459335$. 由轨道 1 的三维空间结构示意图 1(a) 可知轨道平面在旋转效应的影响下有序进动, 而轨道 2 的则无规则地进动, 如图 1(b) 所示, 似乎表明轨道 1 是有序而轨道 2 为混沌的, 图 2(a) 随时间线性增长的两邻近轨道不变的 FLI 印证了轨道 1 的有序性, 轨道 2 的 FLI 随

时间指数式膨胀表明轨道的混沌性, 如图 2(b) 所示. 图 3 给出了两条轨道旋转矢量 \mathbf{S}_2 三维空间构型图. 混沌轨道不稳定, 其旋转矢量的轨线汇成漩涡似的, 如图 3(b) 所示.

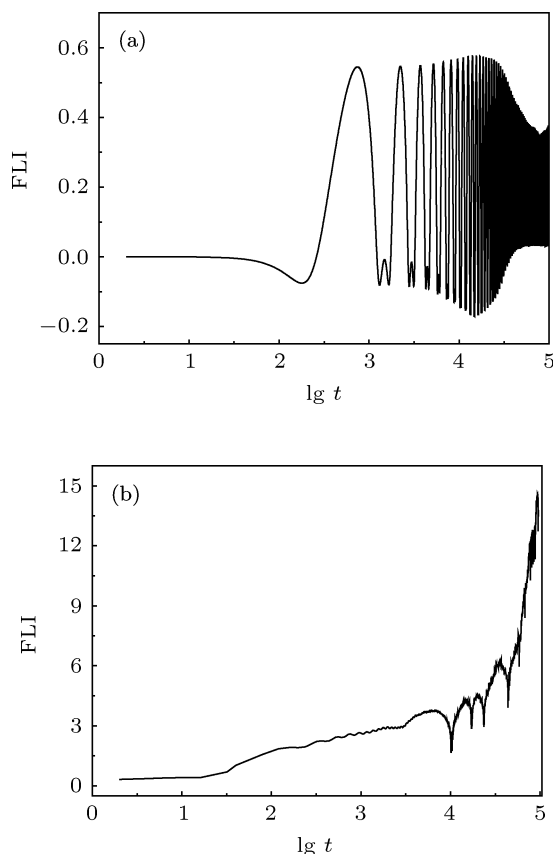


图 2 FLIs (a) 轨道 1; (b) 轨道 2

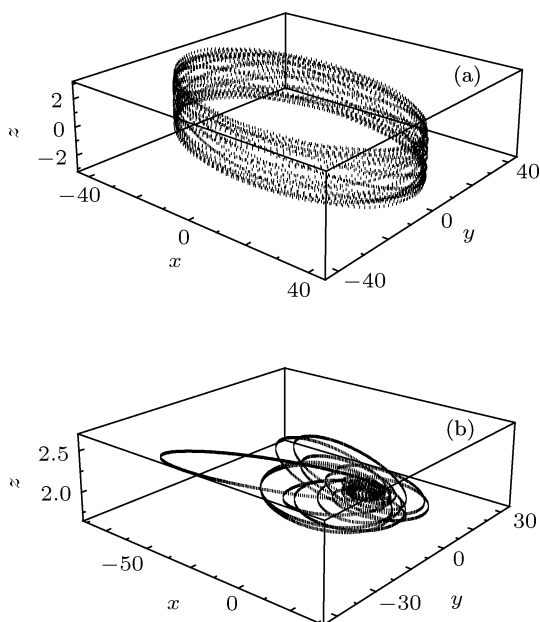


图 1 (a) 和 (b) 分别是轨道 1 和轨道 2 的三维空间构型图

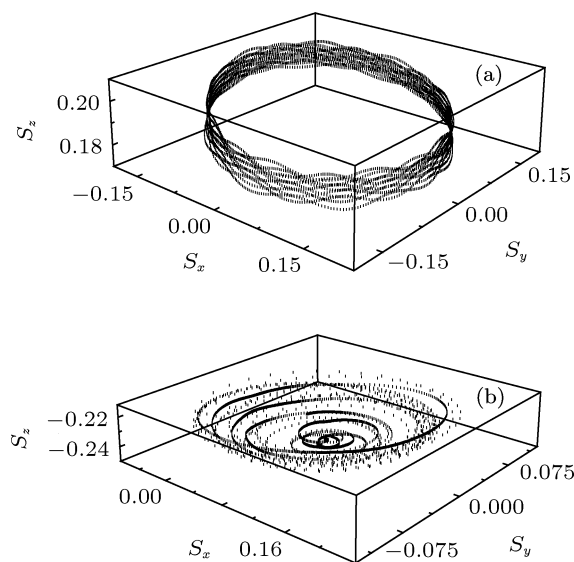


图 3 旋转矢量 \mathbf{S}_2 三维空间构型图 (a) 有序轨道; (b) 混沌轨道

本文中两邻近轨道不变的 FLI^[19] 为

$$FLI(t) = \lg \left[\frac{d(t)}{d_0} \right], \quad (18)$$

式中 d_0 和 $d(t)$ 分别代表初始时刻和 t 时刻的两轨道之间的距离. 它采用空间 - 时间坐标, 对复杂系统的混沌识别比一般 Lyapunov 方法更敏感、快速, 广泛的应用于相对论引力系统混沌的识别^[14-18].

取 $\hat{N} = (0, \sin 45^\circ, \cos 45^\circ)$, $\hat{q} = (0, \cos 45^\circ, -\sin 45^\circ)$, 根据 (14) 和 (15) 式可数值计算得相应的引力波. 图 4 是两轨道的 h_+ 型引力波及与之对应的功率谱图, h_\times 与 h_+ 波形类似所以不再重复

给出. 引力波的功率谱显示了轨道的动力行为对引力辐射产生的影响, 离散的功率谱表明轨道 1 引力辐射具有周期性, 对应引力波波形正是随时间周期性地变化如图 4(b) 和 (a) 所示; 图 4(d) 轨道 2 功率谱随时间连续变化, 则表明引力辐射非周期性, 对应引力波形无规律的变化, 在某些时刻波形出现尖脉冲, 如图 4(c) 所示. 另一方面, 混沌轨道引力辐射持续时间远远短于有序轨道的, 积分时间大约至 2×10^4 时引力辐射就消失了, 引力辐射消失主要的原因是混沌轨道不稳定而碰在一起, 但混沌轨道的引力波的振幅值大于有序轨道的.

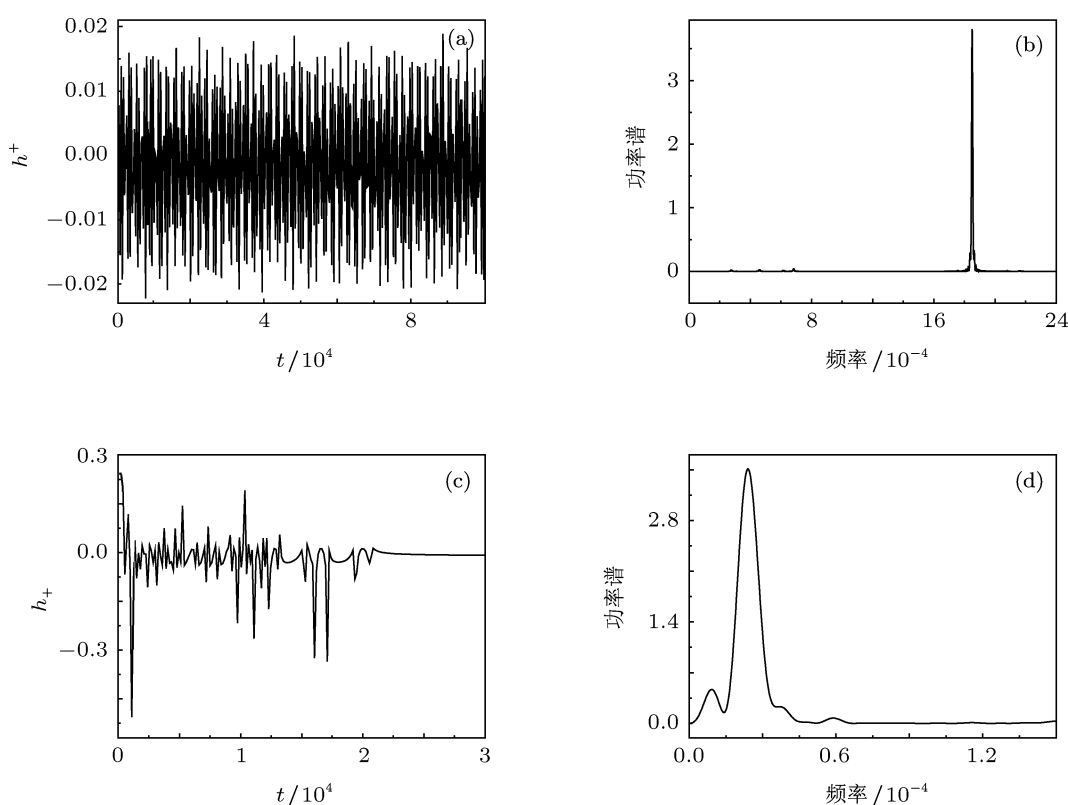


图 4 左边是 h_+ 型引力波形, 右边 h_+ 极化波的功率谱 (a) 和 (b) 有序轨道; (c) 和 (d) 混沌轨道

图 5 和图 6 分别给出了牛顿 H_N 项、后牛顿 H_{PN} 项、旋转与轨道耦合 H_{SO} 项及旋转与旋转耦合 H_{SS} 等四部分各自独立对引力波强弱贡献及其对应引力波功率谱变化情况. 由图 5, 6 可以看出哈密顿中各部分对引力波振幅强度的影响各不相同, 总体看来, 纯轨道牛顿项 H_N 的辐射占主导地位. 对有序轨道而言, 后牛顿 H_{PN} 项及旋转与旋转耦合 H_{SS} 辐射的引力波强度相当, 比牛顿 H_N 项辐射的强度低了一个量级, 轨道 - 旋转耦合项的辐射最弱; 对混沌轨道而言, 引力波的振幅值大于有

序轨道的, 旋转与轨道耦合效应和旋转 - 旋转耦合辐射的引力波强度量级相当, 比后牛顿项的弱些, 如图 6 所示. 此外, 两者各部分对应的引力波功率谱截然不同. 在整个取样频率 $[0, 0.0024]$ 范围内, 有序轨道引力波的离散谱对应着一个基频和若干个谐频, 如图 5(b), (d), (f) 和 (h) 所示; 而混沌轨道的连续谱出现在 $[0, 0.00012]$ 区间内, H_{SS} 部分引力波连续谱的峰宽最大, 如图 6(h) 所示, 这充分说明引力波携带了引力波源的原始信息, 我们可通过引力波的功率谱初步识别引力体的动力行为特性.

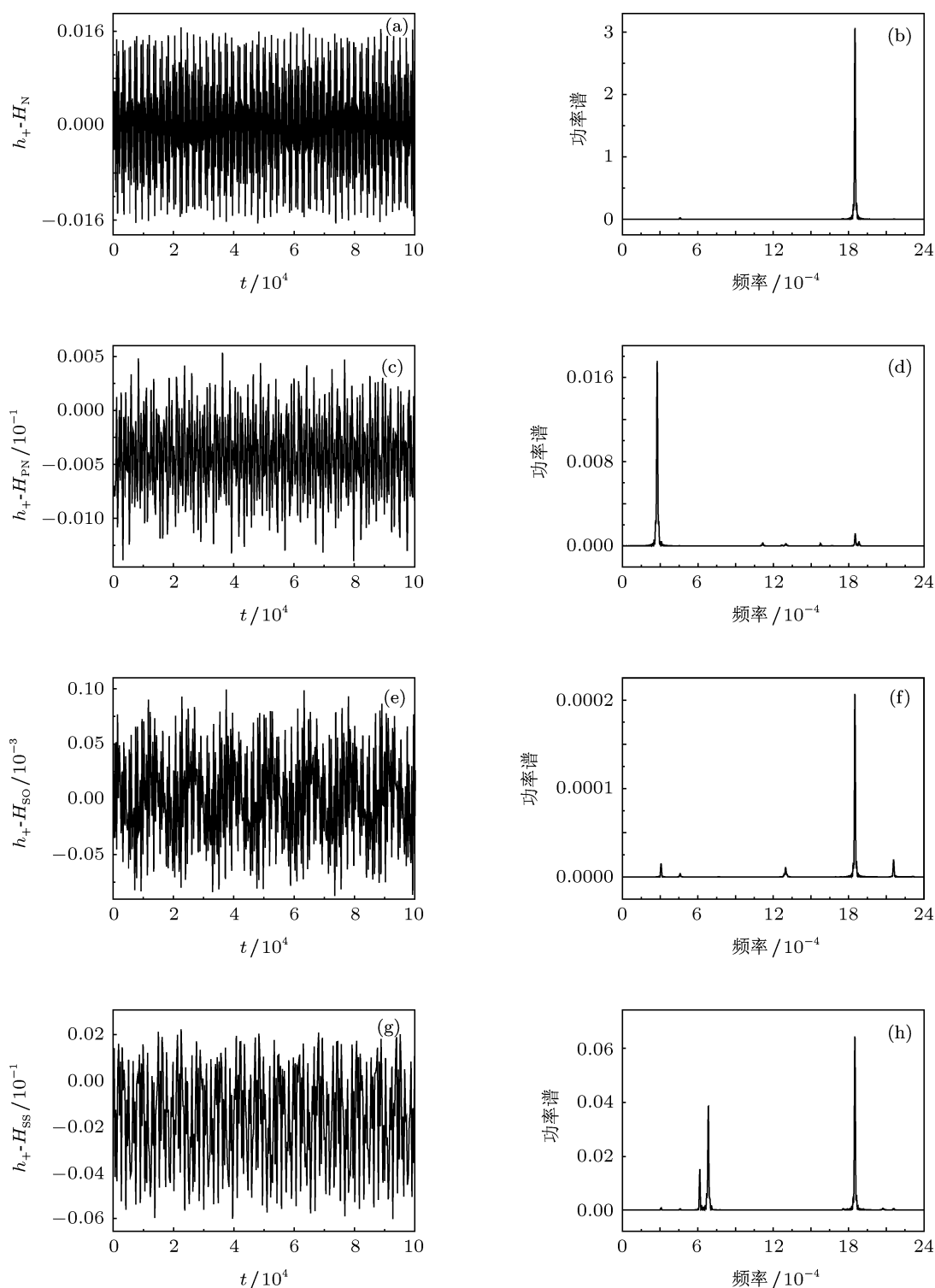


图5 有序轨道的 H_N , H_{PN} , H_{SO} 及 H_{SS} 等各部分对引力波强弱贡献的情况 (左边的是 h_+ 波形, 右边是对应的功率谱)

数值试验表明对于两体初始距离较大 ($r = 35$) 的有序轨道, 改变旋转参数的大小引力波形没有发生明显的变化, 而混沌轨道却不然. 保持混沌轨道 2 的除旋转参数 χ 以外的其他参数条件不变, 将 $\chi = 1$ 改变为 $\chi_1 = \chi_2 = 0.75$, 重新计算该轨道

的引力波, 考察旋转参数 χ 对引力波的影响, 引力波形如图 7 所示. 从波形图中可以判定, 此时轨道 2 的动力学行为与在 $\chi_1 = \chi_2 = 1$ 时差别很大. 一、轨道引力辐射持续的时间不同. 在 $\chi_1 = \chi_2 = 0.75$ 时, 积分有效时间 1×10^5 内均观察到了引力波, 并

且波形幅度变化比较平缓,而在 $\chi_1 = \chi_2 = 1$ 时仅仅在积分时间小于 2×10^4 范围内才出现引力波,幅度跳跃大. 这表明,保持其他条件不变,单纯减小系统的旋转参数 (χ_1, χ_2),会引起系统混沌强度变弱,使系统向有序的发展趋势演化,说明旋转效应项对系统动力行为跃迁起着极其重要作用,与文献 [24]

结论一致. 二、旋转参数对引力波振幅的影响. 对比图 6 和 7,不难发现,降低旋转参数 (χ_1, χ_2),对牛顿 H_N 项和后牛顿 H_{PN} 项对应的引力波分量变化影响不明显,但旋转效应项的引力波分量变化还是很明显,特别是 h_{\times} 波形的幅度如图 7(j) 所示,相比它在 $\chi_1 = \chi_2 = 1$ 的情形时幅度降低了一个量级.

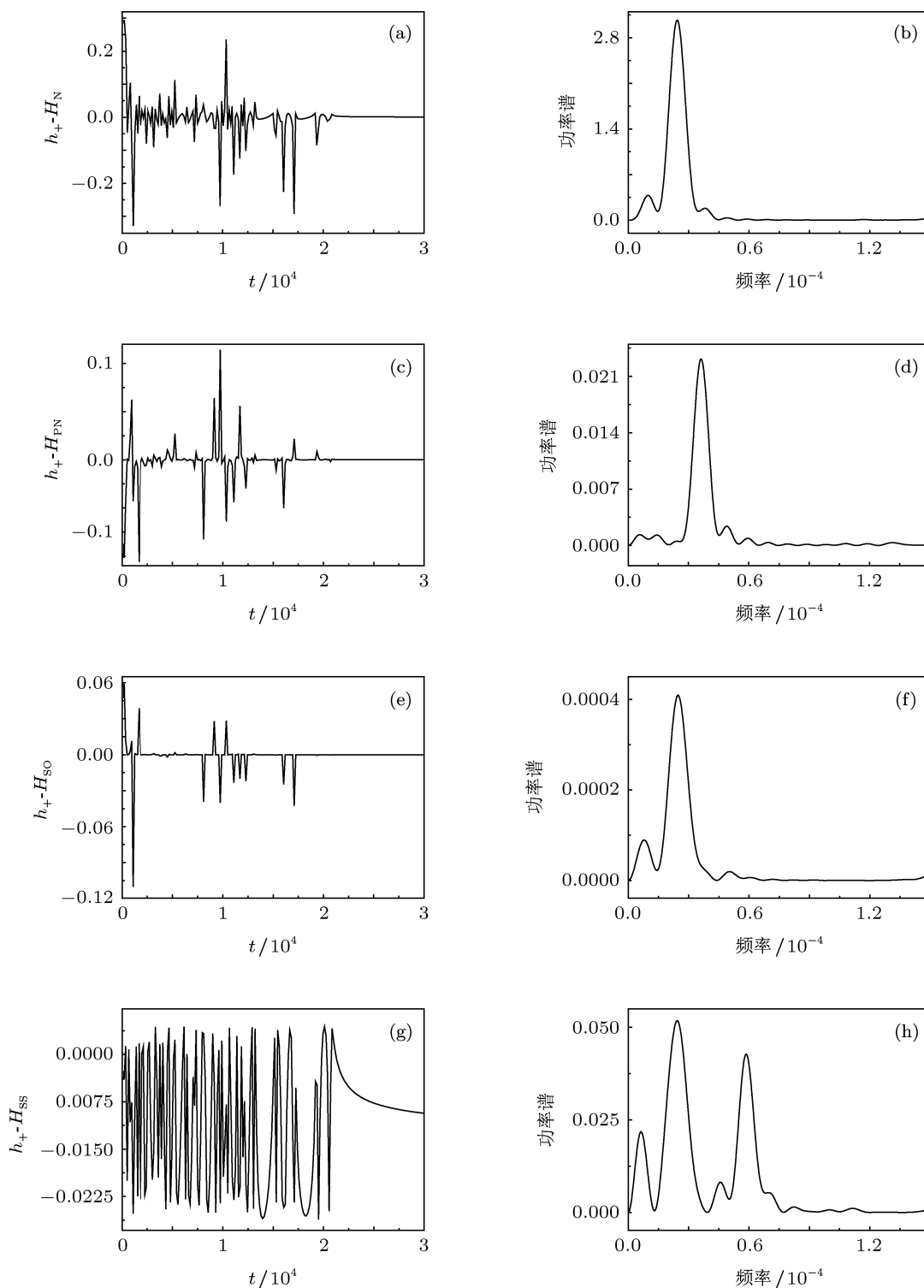


图 6 混沌轨道在旋转参数 $\chi_1 = \chi_2 = 1$ 时的情况 (左边是 h_+ 波形, 右边是对应的功率谱)

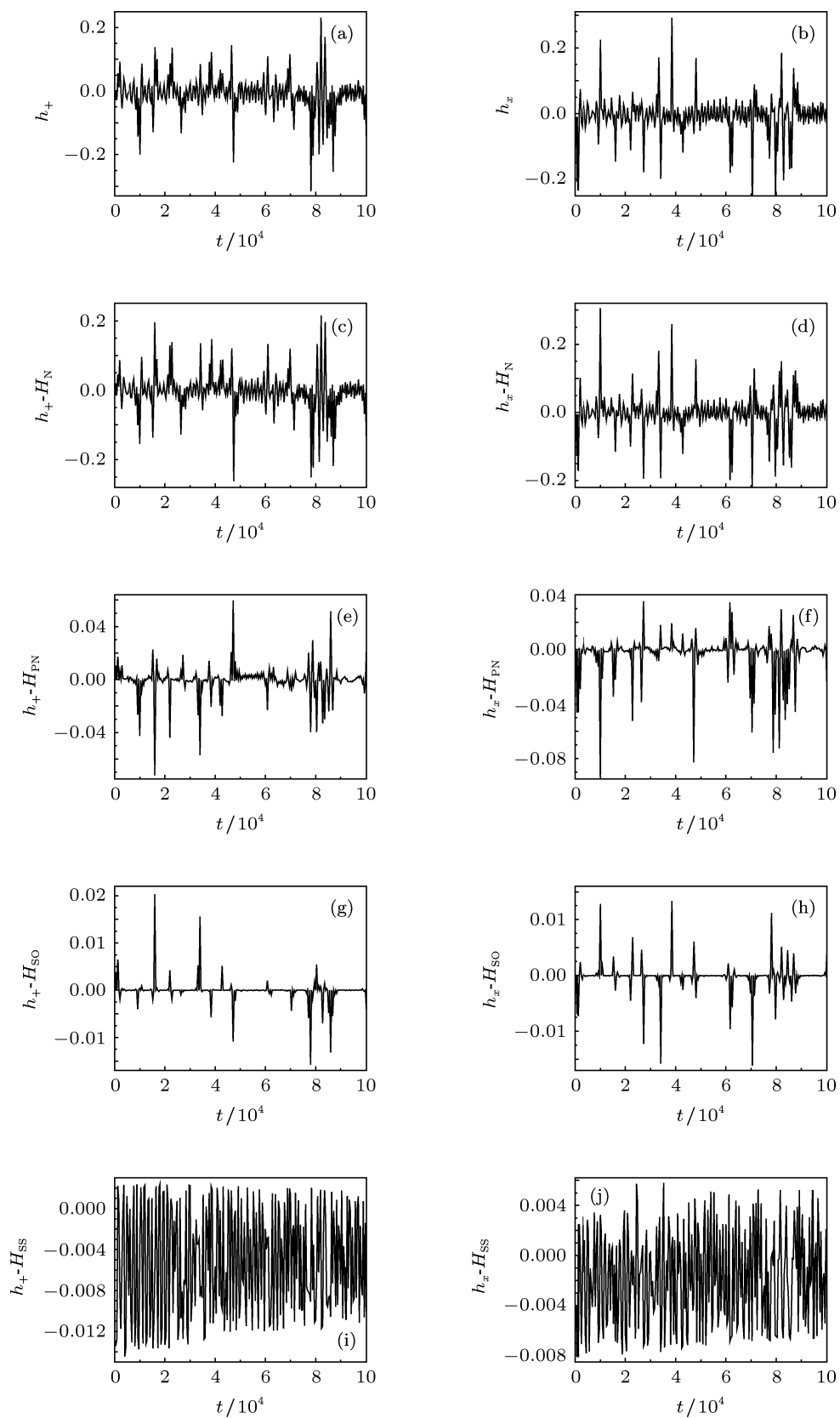


图7 改变混沌轨道2的旋转参数,即 $\chi_1 = \chi_2 = 0.75$ 时的引力波 (左边是 h_+ 波形, 右边是 h_x 波形)

4 结论

本文利用 PN 近似展开的引力波公式计算了保守的黑洞双星 Hamilton 构型的引力波, 分析动力学参量、旋转 - 轨道耦合、旋转 - 旋转耦合效应及轨道类型对引力波的影响. 数值模拟结果综合表明引力波与轨道类型、动力学参量、旋转效应等因素密切相关, 开普勒相流的辐射占主要部分, 后牛顿项其次, 旋转 - 旋转耦合效应项及旋转 - 轨道耦合

对引力波的贡献视轨道类型而定, 但相对来说比较弱. 对有序轨道而言, 旋转与旋转耦合辐射的引力波强度量级与后牛顿项的相当, 比牛顿项辐射的强度低了一个量级, 轨道 - 旋转耦合的最弱. 有序轨道的引力波随时间周期性地变化, 而混沌轨道引力波的变化比较凌乱, 不可预测, 混沌行为能提高引力波的辐射能量, 混沌轨道旋转参量大小对引力波波形的变化至关重要的作用.

-
- [1] Kidder L E 1995 *Phys. Rev. D* **52** 821
 [2] Will C M, Wiseman A G 1996 *Phys. Rev. D* **54** 4813
 [3] Baker J 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 121103
 [4] Suzuki S, Maeda K 1999 *Phys. Rev. D* **61** 024005
 [5] Kiuchi K, Maeda K 2004 *Phys. Rev. D* **70** 064036
 [6] Faye G, Blanchet L, Buonanno A 2006 *Phys. Rev. D* **74** 104033
 [7] Levin J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 3515
 [8] Damour T 2001 *Phys. Rev. D* **64** 124013
 [9] Konigsdorffer C, Gopakumar A 2005 *Phys. Rev. D* **71** 024039
 [10] Gopakumar A, Konigsdorffer C 2005 *Phys. Rev. D* **72** 121501
 [11] Levin J 2006 *Phys. Rev. D* **74** 124027
 [12] Wu X, Xie Y 2010 *Phys. Rev. D* **81** 084045
 [13] Wu X, Zhong S Y 2011 *Gen. Relativ Gravit* **43** 2185
 [14] Zhong S Y, Wu X 2010 *Phys. Rev. D* **81** 104037
 [15] Zhong S Y, Wu X, Liu S Q, Deng X F 2010 *Phys. Rev. D* **82** 124040
 [16] Wang Y Z, Wu X 2011 *Class. Quantum Grav.* **28** 025010
 [17] Wu X, Xie Y 2007 *Phys. Rev. D* **76** 124004
 [18] Wu X, Xie Y 2008 *Phys. Rev. D* **77** 103012
 [19] Wu X, Huang T Y, Zhang H 2006 *Phys. Rev. D* **74** 083001
 [20] Xu J, Wu X 2010 *Res. Astron. Astrophys.* **10** 173
 [21] Li R, Wu X 2010 *Acta. Phys. Sin.* **59** 7135 (in Chinese) [李荣, 伍歆 2010 物理学报 **59** 7135]
 [22] Lubich C, Walther B, Braugmann B 2010 *Phys. Rev. D* **81** 104025
 [23] Zhong S Y, Wu X 2011 *Acta. Phys. Sin.* **60** 090402 (in Chinese) [钟双英, 伍歆 2011 物理学报 **60** 090402]
 [24] Hartl M D, Buonanno A 2005 *Phys. Rev. D* **71** 024027

Study on gravitational waveform from post-Newtonian orbits of spinning compact binary*

Zhong Shuang-Ying[†] Liu Song

(School of Sciences, Nanchang University, Nanchang 330031, China)

(Received 15 September 2011; revised manuscript received 27 October 2011)

Abstract

The purpose of this paper is to investigate the effects of the dynamical parameters, the spin-orbit coupling, the spin-spin coupling and the classification of orbits on the gravitational waveforms emitted by the conservative post-Newtonian Hamiltonian system for the spinning compact binaries by means of symplectic integrator and power spectrum. The numerical results show that the gravitational waveforms of ordered orbits vary periodically with time, while those of chaotic orbits are stochastic under the radiation–reaction force turning off. In particular, the chaotic dynamic behavior can enhance the strength of emission power. In addition, the magnitude of the spin parameter does exert a significant influence on the gravitational waveforms.

Keywords: conservative, spinning compact binaries, gravitational waves, symplectic integrator

PACS: 04.25.dg, 04.25.Nx, 04.30.–w, 05.45.–a

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.11165011).

[†] E-mail: zhongshuangying@ncu.edu.cn