

# 脉冲序列控制电流断续模式 Buck 变换器的动力学建模与边界碰撞分岔\*

沙金<sup>1)</sup> 包伯成<sup>2)†</sup> 许建平<sup>1)</sup> 高玉<sup>1)</sup>

1) (西南交通大学电气工程学院, 成都 610031)

2) (常州大学信息科学与工程学院, 常州 213164)

(2011 年 10 月 7 日收到; 2011 年 11 月 15 日收到修改稿)

通过建立一个开关周期内输出电容电荷变化量对应的输出电压变化量, 建立了工作于电感电流断续模式 (discontinuous conduction mode, DCM) 的脉冲序列 (pulse train, PT) 控制 Buck 变换器的近似离散时间模型, 研究了负载电阻及输入电压变化时 PT 控制 DCM Buck 变换器的边界碰撞分岔行为. 通过构造相应的迭代映射曲线, 分别分析了不同负载电阻时 PT 控制 DCM Buck 变换器的周期 1、周期 2 和周期 3 运行轨迹的不动点稳定性, 揭示了 PT 控制 DCM Buck 变换器在不同周期态时的边界碰撞分岔的形成机理. 研究表明, 随参数变化, PT 控制 DCM Buck 变换器始终运行在不同的周期态, 各周期态的切换由边界碰撞分岔引起, 李雅谱诺夫指数始终小于零. 利用 PSIM 电路仿真软件, 给出了不同负载电阻时的时域波形和相轨图. 实验结果验证了理论分析和仿真结果的正确性, 同时说明了本文动力学建模的可行性.

**关键词:** 脉冲序列控制, 边界碰撞分岔, Buck 变换器, 断续模式

**PACS:** 05.45.-a

## 1 引言

开关 DC-DC 变换器是一种强非线性时变动力学系统, 存在各种类型的分岔与混沌等非线性物理现象. 近年来, 已有大量文献对传统的电压或电流控制开关 DC-DC 变换器的非线性行为进行了深入分析<sup>[1-8]</sup>, 研究成果对开关 DC-DC 变换器的设计、运行及控制都具有重要的指导意义. 开关 DC-DC 变换器是一种分段光滑的动力学系统, 存在两种或者两种以上的开关模式<sup>[5-8]</sup>, 不同的开关模式之间存在一条边界. 当电路参数变化超越这一边界时, 系统的动力学特性发生突变. 因此, 开关 DC-DC 变换器存在两种完全不同的分岔现象. 一种是光滑动力学系统中存在的局部分岔和全局分岔<sup>[1-9]</sup>, 前者如倍周期分岔、Hopf 分岔、结鞍分岔等, 这种分

岔方式主要是由于系统的一个或一对 Floquet 乘子穿越单位圆, 导致系统的周期轨道失稳; 后者如同宿或异宿分岔, 即系统的奇点类型不变的情况下, 相空间结构发生变化. 另一种是分段光滑动力学系统所特有的边界碰撞分岔<sup>[5-8]</sup>, 与光滑动力学系统的局部分岔和全局分岔不同的是, 边界碰撞分岔是变换器的工作模式转换而产生的分岔行为, 而非由不动点稳定性的改变引起.

为了改善电压或电流控制等线性控制方法的动态响应速度和鲁棒性等控制性能, 人们提出了开关 DC-DC 变换器的单周控制<sup>[10]</sup>、PT 控制<sup>[11,12]</sup>和脉冲跨周期控制<sup>[13]</sup>等非线性控制方法. 与基于 PWM 调制的电压或电流控制技术不同, 脉冲序列 (pulse train, PT) 控制是通过调整两组预先设定的控制脉冲的组合方式来实现输出电压的调节<sup>[11,12]</sup>, 是一种非线性离散控制方法. PT 控制不

\* 国家自然科学基金 (批准号: 51177140) 资助的课题.

† E-mail: mervinbao@126.com

需要补偿网络、控制电路实现简单、对输入和负载的变化具有快速的动态响应速度,非常适用于对可靠性要求较高的开关电源控制系统<sup>[14]</sup>.

PT控制是一种特殊的开关DC-DC变换器控制方法,具有独特的控制行为.目前还未见有关PT控制开关DC-DC变换器的动力学建模与分岔行为分析的研究报道.开关DC-DC变换器的动力学建模包括基于电路状态方程的精确离散时间建模<sup>[2,8]</sup>和基于恒定输出电压的近似离散时间建模<sup>[1,6,7]</sup>等.精确离散时间模型虽然可以精确地描述系统的非线性行为,但数学推导较为复杂,求解微分方程较为困难,从而限制了其在实际工程设计和分析中的应用.由于工作于DCM时,开关DC-DC变换器的电感电流在每一个开关周期起始时刻均为零,因此可以将工作在DCM模式的开关DC-DC变换器近似为一阶时变系统.本文通过建立一个开关周期内输出电容电荷变化量对应的输出电压变化量,建立了PT控制DCM Buck变换器的近似离散时间模型,并基于该模型揭示了负载电阻发生变化时的边界碰撞分岔这一物理现象及其产生机理.

## 2 PT控制DCM Buck变换器动力学建模

### 2.1 PT控制DCM Buck变换器

如图1所示为PT控制Buck变换器的电路原理图和DCM Buck变换器的典型时域波形<sup>[12]</sup>.图1(a)中虚线框内部分是PT控制电路,它是一种典型的非线性离散控制.

DCM Buck变换器在一个开关周期内存在三个不同的开关模式,这三个不同的开关模式对应的电感电流*i*、电容电流*i<sub>C</sub>*和输出电压*v*的时域波形如图1(b)所示.

1) 开关模式 I: 开关管S导通,二极管D关断,电感电流*i*从零开始线性增大.在*t<sub>1</sub>*时刻之前,*i*小于负载电流*i<sub>o</sub>*,电容C向负载电阻R放电,输出电压*v*下降;*t<sub>1</sub>*时刻,*i* = *i<sub>o</sub>*; *t<sub>1</sub>*之后,*i*大于*i<sub>o</sub>*,电感电流为R供电的同时为C充电,输出电压升高.

2) 开关模式 II: 开关管S关断,二极管D导通,电感电流*i*线性下降到零. *t<sub>2</sub>*时刻, *i* = *i<sub>o</sub>*, 输出电压在*t<sub>2</sub>*时刻之前升高,之后降低.

3) 开关模式 III: 开关管S关断,二极管D关断,

电感电流*i*在*t<sub>3</sub>*时刻后保持为零,直至下一个开关周期来临.在此期间,电容向负载放电,输出电压继续下降.

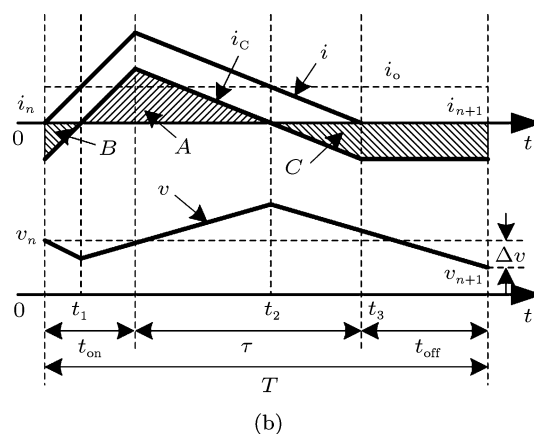
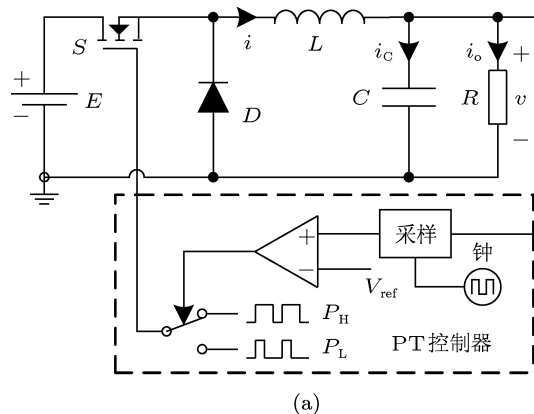


图1 PT控制Buck变换器及其DCM工作模式的典型波形 (a) 变换器电路; (b) 时域波形图

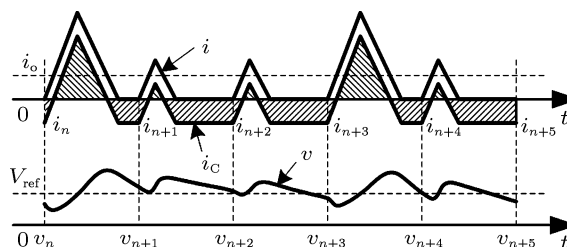


图2 PT控制变换器在一个脉冲序列循环周期内的典型波形

PT控制的主要思想是通过检测和比较开关周期起始时刻输出电压和参考电压*V<sub>ref</sub>*的关系,选择不同功率的控制脉冲,实现开关变换器的控制.在开关周期起始时刻,当输出电压大于参考电压*V<sub>ref</sub>*时,变换器选择低功率脉冲控制信号*P<sub>L</sub>*,使输出

电压降低;反之,选择高功率脉冲控制信号  $P_H$ ,使输出电压升高.高、低功率脉冲控制信号  $P_H, P_L$  具有相同的开关频率和不同的占空比  $D_H$  和  $D_L$ .当 PT 控制 DCM Buck 变换器达到稳态后,  $\mu_H$  个高功率脉冲  $P_H$  和  $\mu_L$  个低功率脉冲  $P_L$  组成一个循环周期为  $(\mu_H + \mu_L)T$  的脉冲序列,通过调整高、低功率脉冲的组合方式,实现 PT 控制 DCM Buck 变换器输出电压的调节.图 2 为一个脉冲序列循环周期内电感电流、电容电压和输出电压的时域波形,该循环周期包含 2 个高功率脉冲和 3 个低功率脉冲,组合方式为  $1P_H - 2P_L - 1P_H - 1P_L$ ,动力学行为表现为周期 5.

## 2.2 近似离散时间建模

图 1 所示 PT 控制 DCM Buck 变换器是一个二阶电路,具有电感电流  $i$  和电容电压  $v$  两个状态变量.在每一个开关周期起止时刻,PT 控制 DCM Buck 变换器的电感电流均为零,因此可以通过开关周期起止时刻输出电容电荷的变化量得到输出电压的变化量,构造出输出电压的一维离散迭代映射模型,从而建立 PT 控制 DCM Buck 变换器的离散时间模型.

以任意一个开关周期为例,当开关频率远大于开关变换器固有的特征频率时,输出电压纹波波形可以近似成一条直线,其值等于参考电压  $V_{ref}$ ,因此不妨假设输出电压恒定为  $V_{ref}$ .图 1(b) 中电容电流  $i_C$  与时间轴  $t$  构成的阴影部分的面积是在一个开关周期内输出电容电荷的变化量,其中阴影 A 部分的面积是电容电荷增加量,而阴影 B 和 C 部分的面积是电容电荷减少量,它们的面积之差即输出电容电荷的变化量  $\Delta q$ ,将变化量  $\Delta q$  除以电容值  $C$ ,可得到一个开关周期起止时刻输出电压的变化量  $\Delta v$ .

输出电容电荷的变化量为

$$\begin{aligned} \Delta q &= q_A - (q_B + q_C) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(E - v_n)DT}{L} t_3 - \frac{(E - v_n)T}{L} t_1. \end{aligned} \quad (1)$$

由  $t_1$  和  $t_3$  时刻电容电流为零,可求得  $t_1 = \frac{v_n L}{R(E - v_n)}$ ,  $t_3 = \frac{EDT}{v_n}$ ,代入 (1) 式并化简得

$$\Delta q = \frac{E(E - v_n)}{2Lv_n} D^2 T^2 - \frac{v_n}{R} T. \quad (2)$$

由 (2) 式可得一个开关周期起止时刻输出电压变化量为

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{1}{C} \int_0^T i_C dt = \frac{\Delta q}{C} \\ &= \frac{E(E - v_n)}{2LCv_n} D^2 T^2 - \frac{v_n}{RC} T. \end{aligned} \quad (3)$$

设第  $n$  个开关周期开始时刻和结束时刻的输出电压分别为  $v_n$  和  $v_{n+1}$ ,则由 (3) 式可得第  $n$  个开关周期的输出电压迭代关系

$$\begin{aligned} v_{n+1} = v_n + \Delta v &= \frac{E(E - v_n)}{2LCv_n} D^2 T^2 \\ &+ \left(1 - \frac{T}{RC}\right) v_n. \end{aligned} \quad (4)$$

根据开关周期起始时刻输出电压  $v_n$  与参考电压  $V_{ref}$  的比较结果,PT 控制器选择具有不同占空比的功率脉冲控制开关管 S,达到对输出电压调节的目的.在第  $n$  个开关周期开始时刻,当  $v_n$  大于  $V_{ref}$  时,PT 控制器输出低功率脉冲信号作为控制信号,(4) 式中占空比  $D = D_L$ ;反之,当  $v_n$  小于  $V_{ref}$  时,PT 控制器选择高功率脉冲作控制信号,(4) 式中占空比  $D = D_H$ .因此,不难导出 PT 控制 DCM Buck 变换器在一个开关周期内的迭代关系式,即近似离散时间模型

$$v_{n+1} = \begin{cases} \frac{E(E - v_n)}{2LCv_n} D_L^2 T^2 + \left(1 - \frac{T}{RC}\right) v_n, & \text{当 } v_n > V_{ref} \text{ 时,} \\ \frac{E(E - v_n)}{2LCv_n} D_H^2 T^2 + \left(1 - \frac{T}{RC}\right) v_n, & \text{当 } v_n \leq V_{ref} \text{ 时.} \end{cases} \quad (5)$$

由 (5) 式可知,随着电路参数的变化,变换器在一个开关周期内的输出电压随之变化,PT 控制高、低功率脉冲序列的组合方式也会相应的发生变化.基于 (5) 式,可以对 PT 控制 DCM Buck 变换器进行相应的动力学分析.此外,由 (5) 式可见,参考电压  $V_{ref}$  为 PT 控制 DCM Buck 变换器输出电压迭代映射的唯一边界,当电路参数变化致使输出电压超越这一边界时,发生边界碰撞分岔,从而引起变换器工作状态的变化.

## 3 边界碰撞分岔分析

### 3.1 边界碰撞分岔行为

一般情况下,当开关 DC-DC 变换器的电路参

数选定后,可引起该变换器工作状态发生变化的主要参数有负载电阻  $R$  和输入电压  $E$ . 因此,将分别以负载电阻  $R$  和输入电压  $E$  作为分岔参数,研究 PT 控制 DCM Buck 变换器的边界碰撞分岔行为.

选择 PT 控制 DCM Buck 变换器的电路参数为  $E = 12\text{ V}$ ,  $V_{\text{ref}} = 5\text{ V}$ ,  $f = 50\text{ kHz}$ ,  $L = 10\text{ }\mu\text{H}$ ,  $C = 470\text{ }\mu\text{F}$ ,  $D_{\text{H}} = 0.4$ ,  $D_{\text{L}} = 0.2$ , 负载电阻  $R$  为可变参数. 基于 (5) 式的近似离散时间模型,可得如图 3 所示负载电阻变化时 PT 控制 DCM Buck 变换器的分岔图,图中虚线是参考电压  $V_{\text{ref}}$ ,它是该变换器输出电压在  $v$  空间中唯一的一条边界线.

当负载电阻变化时,PT 控制 DCM Buck 变换器历经了从稳定的周期 1 态到多周期态再到周期 1 态的分岔道路. 当负载电阻  $R < 1.86\text{ }\Omega$  时,负载较重,输出电压无法达到参考电压值,PT 控制器仅输出高功率脉冲信号来控制开关管 S, Buck 变换器的工作状态表现出周期 1 行为. 随着负载减轻,当  $R = 1.86\text{ }\Omega$  时, Buck 变换器的周期 1 轨迹(即输出电压)与参考电压发生边界碰撞,引发边界碰撞分岔, Buck 变换器的工作状态由周期 1 态进入

多周期态,且存在较大的电压波动. 同样,当负载电阻  $R > 7.44\text{ }\Omega$  时,负载较轻,脉冲序列循环周期仅包含低功率脉冲周期,即 PT 控制器仅输出低功率脉冲控制信号, Buck 变换器的工作状态为稳定周期 1. 随着负载加重,当  $R = 7.44\text{ }\Omega$  时, Buck 变换器的周期 1 轨迹失稳,并与参考电压发生边界碰撞,引发边界碰撞分岔,其工作状态突变为多周期态.

图 3(b) 是对应于图 3(a) 图的部分分岔图,在  $R \in [2.928\text{ }\Omega, 2.998\text{ }\Omega]$  区域内,分岔图是一个周期 2 窗口, Buck 变换器的运行轨迹表现出周期 2 行为,由一条高功率脉冲轨迹和一条低功率脉冲轨迹组成,所对应的 PT 控制器输出控制信号是由一个高功率脉冲和一个低功率脉冲组成的脉冲序列循环周期信号. 随着负载减轻,高功率脉冲轨迹逐渐靠近边界  $V_{\text{ref}}$ ,并在负载电阻为  $2.998\text{ }\Omega$  时发生边界碰撞分岔, Buck 变换器进入复杂的多周期态,即  $1P_{\text{H}} - 1P_{\text{L}}$  的脉冲序列组合方式已不能满足控制要求,脉冲序列组合方式发生了突变.

类似地,从图 3(c) 和 (d) 中可以观察到,在更为复杂的多周期态中,随着负载减轻,临近参考电压边界的一条高功率脉冲轨迹将逐渐靠近边界,并在

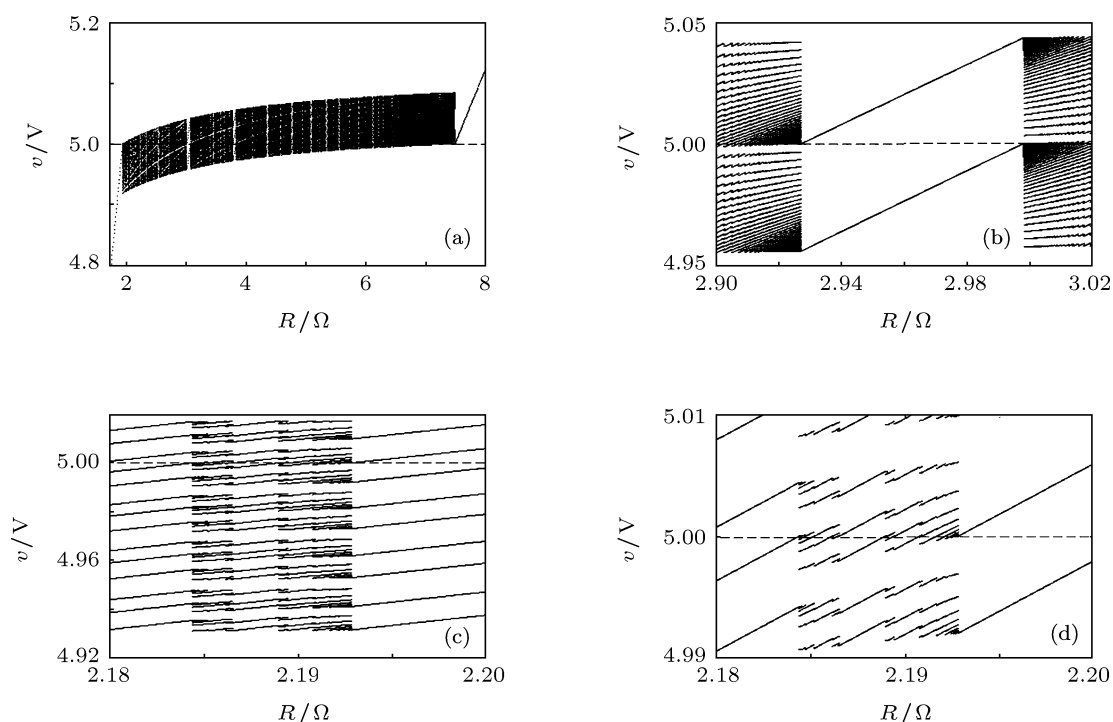


图 3 负载电阻  $R$  变化时的分岔图 (a) 全局分岔图; (b) 局部分岔图; (c) 局部分岔图; (d) 对应于 (c) 的放大图, 当 PT 控制 DCM Buck 变换器的输出电压低于参考电压时, PT 控制器选择高功率脉冲控制信号输出, 反之选择低功率脉冲控制信号输出. 为了叙述方便, 在分岔图中高于参考电压的轨迹定义为低功率脉冲轨迹, 而低于参考电压的轨迹定义为高功率脉冲轨迹

$R = 2.1843 \Omega$  附近与边界发生碰撞, 引起边界碰撞分岔. 边界碰撞分岔后, 原有的一条高功率脉冲轨迹裂变成多条新的高、低功率脉冲轨迹, 新产生的运行轨迹至少包括一条低功率脉冲轨迹. 边界碰撞分岔同时也引发了其他高、低功率脉冲轨迹的裂变, 高、低功率脉冲轨迹的数量比例发生相应的变化. 从图 3(c) 和 (d) 中也可以看到, 在  $R \in [2.18 \Omega, 2.2 \Omega]$  的变化区域内, Buck 变换器的运行轨迹发生了几十次甚至更多的边界碰撞分岔, 每次边界碰撞分岔都导致 PT 控制器输出的脉冲序列信号中高、低功率脉冲的组合方式更新. 当  $R = 2.2 \Omega$  时, PT 控制 DCM Buck 变换器工作于多周期态, 其周期数量为 9, 高、低功率脉冲序列的组合方式为  $7P_H - 2P_L$ .

基于 (5) 式的离散时间模型可求得 PT 控制 DCM Buck 变换器输出电压的不动点. 令  $v_{n+1} = v_n$ , 并考虑到实际变换器电路不可能出现负电压的情况, 有不动点  $V_Q$  为

$$V_Q = -M + \sqrt{M^2 + 2ME}, \quad (6)$$

其中,  $M = \frac{RED^2T}{4L}$ . 对 (5) 式求导, 有

$$\lambda = \frac{dv_{n+1}}{dv_n} = 1 - \frac{2ME + v_n^2 T}{CRv_n^2}, \quad (7)$$

其中,  $\lambda$  为 Floquet 乘子. 根据稳定性判据可知, 当  $|\lambda| < 1$  时, 不动点是稳定的, 反之是不稳定的. 将 (6) 式代入 (7) 式, 可得到 PT 控制 DCM Buck 变换器稳定的条件为

$$\left| \frac{dv_{n+1}}{dv_n} \right|_{V_Q} = \left| 1 - \frac{T}{RC} \frac{2E + M - 2\sqrt{M^2 + 2ME}}{M + E - \sqrt{M^2 + 2ME}} \right| < 1,$$

即

$$0 < \frac{T}{RC} \frac{2E + M - 2\sqrt{M^2 + 2ME}}{M + E - \sqrt{M^2 + 2ME}} < 2. \quad (8)$$

由  $2E + M - 2\sqrt{M^2 + 2ME} > 0$ ,  $M + E - \sqrt{M^2 + 2ME} > 0$ , 可知下式:

$$\frac{T}{RC} \frac{2E + M - 2\sqrt{M^2 + 2ME}}{M + E - \sqrt{M^2 + 2ME}} > 0$$

成立. 因此, 为使 PT 控制 DCM Buck 变换器稳定工作, 只需满足

$$\frac{T}{RC} \frac{2E + M - 2\sqrt{M^2 + 2ME}}{M + E - \sqrt{M^2 + 2ME}} < 2. \quad (9)$$

化简 (9) 式可得

$$1 + \frac{4L}{RD^2T} - \sqrt{1 + \frac{8L}{RD^2T}} > \frac{T}{RC}. \quad (10)$$

由 (10) 式可知, PT 控制 DCM Buck 变换器的稳定性取决于负载电阻  $R$ 、电感  $L$ 、电容  $C$ 、开关周期  $T$  与占空比  $D$ , 与输入电压  $E$  和参考电压  $V_{ref}$  无关.

由 (7) 式可得到 PT 控制 DCM Buck 变换器随负载电阻  $R$  变化时的李雅谱诺夫指数如图 4 所示. 由图 4 可知, 在负载电阻变化时李雅谱诺夫指数恒小于零, 此结果表明 PT 控制 DCM Buck 变换器在分岔参数变化范围内一直处于稳定的工作状态. 此外, 从图 3 和 4 中也可以看到, PT 控制 DCM Buck 变换器不会出现经倍周期分岔或 Hopf 分岔进入混沌的物理现象, 其工作状态的变化都是由边界碰撞分岔引起的, 变换器始终工作在周期 1、周期 2 或更为复杂的多周期状态.

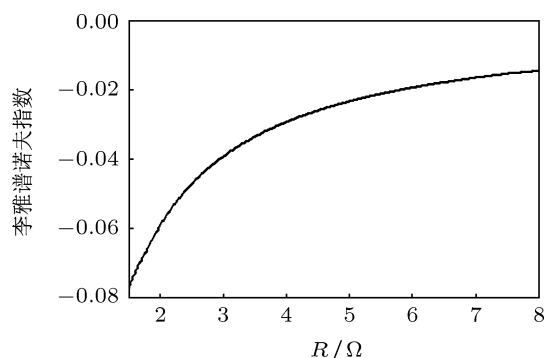


图 4 负载电阻  $R$  变化时的李雅谱诺夫指数

同样地, 采用上述电路参数, 固定负载电阻  $R = 2.963 \Omega$ , 以输入电压  $E$  作为分岔参数, 由 (5) 式和 (7) 式可得到相应的分岔图和李雅谱诺夫指数如图 5 所示. 由图 5(a) 可知, 随着输入电压  $E$  的变化, PT 控制 DCM Buck 变换器同样经历了从稳定的周期 1 态到多周期态再到周期 1 态的分岔道路, 且各个工作状态的变化都由边界碰撞分岔引起. 当输入电压  $E \in [11.97 \text{ V}, 12.08 \text{ V}]$  区域内时, 分岔图上出现了一个周期 2 窗口, 变换器工作在周期 2 状态, 这与前面分析的输入电压  $E = 12 \text{ V}$  时的情况相符合. 由图 5(b) 可知, 在输入电压  $E$  的变化范围内李雅谱诺夫指数一直小于零, PT 控制 DCM Buck 变换器保持在稳定的工作状态.

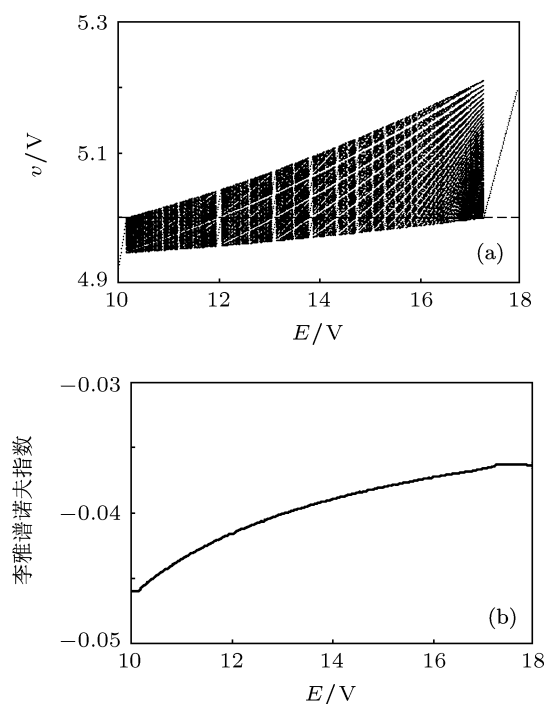


图5 输入电压  $E$  变化时的动力学行为 (a) 分岔图; (b) 李雅谱诺夫指数图

### 3.2 PT 控制高、低功率脉冲序列的组合方式

实际上, 高、低功率脉冲轨迹的数量和位置的变化反映了一定电路参数条件下一个脉冲序列循环周期内高、低功率脉冲的组合方式变化及开关周期开始时刻输出电压的变化. 随着电路参数变化, 当某种高、低功率脉冲序列组合方式超过临界值时, 原脉冲序列组合方式已不能保证输出电压稳定在参考电压值, 此时 PT 控制器输出控制信号中的高、低功率脉冲的组合方式发生变化以达到输出电压恒定的控制目标. 因此, 当 PT 控制 DCM Buck 变换器处于复杂多周期态时, 其动力学行为对电路参数的变化相当敏感, 微小的变化就会引起输出电压循环周期及 PT 控制信号中高、低功率脉冲序列的组合方式的变化.

基于 (5) 式的近似离散时间模型, 对应于图 3(a), 当变换器稳态工作时, 随负载电阻  $R$  增大, 对可变参数  $R$  的每一个取值进行 600 次迭代, 记录该参数条件时 PT 控制器输出信号中高、低功率脉冲的数量  $\mu_H$  和  $\mu_L$ , 得到如图 6 所示的 PT 控制信号中高、低功率脉冲数量  $\mu_H$  和  $\mu_L$  的变化趋势. 当  $R < 1.86 \Omega$  时, 有  $\mu_H = 600, \mu_L = 0$ , 即 PT 控制器仅输出高功率脉冲信号, 变换器工作

于周期 1 态. 随着  $R$  增大,  $\mu_H$  不断减小, 而  $\mu_L$  不断增大; 在  $R \in [2.928 \Omega, 2.998 \Omega]$  区域内, 高、低功率脉冲数量相等, 有  $\mu_H = \mu_L = 300$ , 此时变换器工作于周期 2 态; 当  $R > 7.440 \Omega$  时, 有  $\mu_H = 0, \mu_L = 600$ , 脉冲序列循环周期仅由低功率脉冲周期组成. 图 6(b) 是图 6(a) 的局部放大图, 图中数字 2, 3, 4 和 5 所对应的区域分别表示 PT 控制 DCM Buck 变换器工作于周期 2 态、周期 3 态、周期 4 态和周期 5 态时所对应的负载电阻  $R$  的参数区间. PT 控制器输出信号中一些典型工作状态的高、低功率脉冲序列组合方式和参数区间如表 1 所示. 表 1 中变换器的各典型工作状态分别对应于图 3(a) 中的周期窗口, 如周期 2 对应于图 3(a) 中的周期 2 窗口.

### 3.3 边界碰撞分岔分析

由上述分析可知, 当负载电阻参数发生变化时, PT 控制 DCM Buck 变换器的工作状态所发生的突变都是由边界碰撞分岔引起的. 基于近似离散时间模型 (5) 式, 通过构造输出电压的迭代映射曲线, 下面将进一步分析变换器工作于各周期态的不动点变化情况及其产生边界碰撞分岔行为的机理.

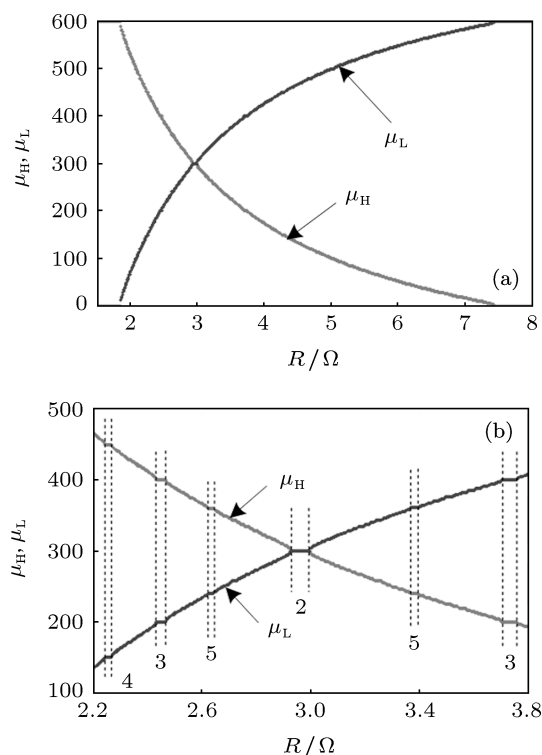


图6  $R$  变化时 PT 控制信号高、低功率脉冲的组合方式 (a)  $\mu_H$  和  $\mu_L$  的变化趋势; (b) 局部放大图

表 1 PT 控制信号高、低功率脉冲序列的典型组合方式

$R$ 值范围 / $\Omega$	组合方式	工作状态
[1.500, 1.860]	$1P_H$	周期 1
[2.244, 2.269]	$3P_H - 1P_L$	周期 4
[2.433, 2.471]	$2P_H - 1P_L$	周期 3
[2.623, 2.646]	$3P_H - 2P_L$	周期 5
[2.928, 2.998]	$1P_H - 1P_L$	周期 2
[3.243, 3.261]	$3P_H - 4P_L$	周期 7
[3.367, 3.397]	$2P_H - 3P_L$	周期 5
[3.702, 3.760]	$1P_H - 2P_L$	周期 3
[7.440, 8.000]	$1P_L$	周期 1

### 3.3.1 周期 1

在  $R \in [1.80 \Omega, 1.92 \Omega]$  区域内 PT 控制 DCM Buck 变换器的一次迭代映射曲线如图 7(a) 所示. 图 7(a) 说明一次迭代映射曲线与对角线有一个交点不动点. 当  $R = 1.80 \Omega, 1.86 \Omega$  和  $1.92 \Omega$  时所对应的三个不动点分别为  $A_1, B_1$  和  $C_1$ . 其中, 不动点  $A_1$  位于  $4.9397 \text{ V}$  处, 对应的一次迭代映射曲线的斜率小于 1, 为稳定不动点; 两个不动点  $B_1$  和  $C_1$  重叠在一起, 均位于  $5 \text{ V}$  处, 对应的一次迭代映射曲线的斜率绝对值远大于 1, 为两个不稳定不动点. 当  $R$  在  $[1.80 \Omega, 1.92 \Omega]$  区域内逐步增大时, 稳定不动点  $A_1$  逐渐往上移动, 当  $R = 1.86 \Omega$  时, 稳定不动点  $A_1$  与边界参考电压  $V_{\text{ref}}$  发生碰撞, 突变为不稳定不动点  $B_1$ , 变换器的工作状态经过边界碰撞分岔后从周期 1 轨迹突变为多周期轨迹. 当  $R > 1.86 \Omega$  时, 一次迭代映射曲线的不动点, 例如不动点  $C_1$ , 总是位于  $5 \text{ V}$  处, 为不稳定不动点, 此时变换器的工作状态保持在多周期态.

同样地, 图 7(b) 显示了 PT 控制 DCM Buck 变换器在  $R \in [6.94 \Omega, 7.94 \Omega]$  区域内的一次迭代映射曲线. 当  $R = 6.94 \Omega, 7.44 \Omega$  和  $7.94 \Omega$  时, 三个不动点分别为  $A_2, B_2$  和  $C_2$ , 其中, 不动点  $A_2$  位于  $5.1205 \text{ V}$  处, 为稳定不动点; 两个不动点  $B_2$  和  $C_2$  均位于  $5.002 \text{ V}$  处, 为两个不稳定不动点. 当  $R$  在  $[6.94 \Omega, 7.94 \Omega]$  区域内逐步增大时, 不稳定不动点位置不变, 变换器的多周期运行轨迹逐渐积聚, 当  $R = 7.44 \Omega$  时, 不稳定不动点  $B_2$  突变为稳定不动点  $A_2$ , 变换器的运行轨迹聚变成一条周期 1

轨迹. 当  $R > 7.44 \Omega$  时, 一次迭代映射曲线的不动点  $A_2$  不断远离不稳定区域, 相应的变换器的工作状态处于稳定的周期 1 态.

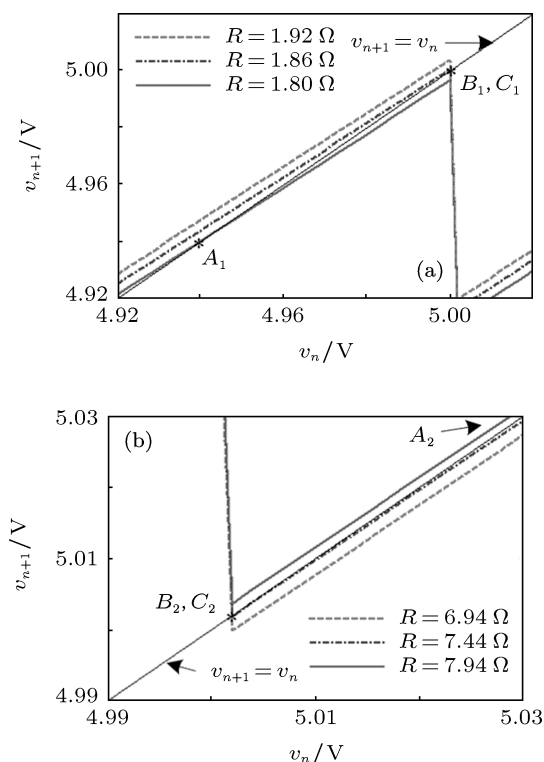


图 7 工作于周期 1 态变换器在不同负载电阻参数区域输出电压的一次迭代映射曲线 (a)  $R \in [1.80 \Omega, 1.92 \Omega]$ ; (b)  $R \in [6.94 \Omega, 7.94 \Omega]$

### 3.3.2 周期 2

在  $R \in [2.928 \Omega, 2.998 \Omega]$  区域内, PT 控制 DCM Buck 变换器工作于周期 2 态, 由 (9) 式得相应的二次迭代映射曲线如图 8(a) 所示. 当  $R = 2.963 \Omega$  时, 二次迭代映射曲线与对角线有三个交点不动点, 分别为  $A_0, A_1$  和  $A_2$ . 不动点  $A_0$  位于  $5.0011 \text{ V}$  处, 对应的二次迭代映射曲线的斜率大于 1, 为不稳定不动点; 两个不动点  $A_1$  和  $A_2$  分别位于  $4.976 \text{ V}$  和  $5.023 \text{ V}$  处, 对应的二次迭代映射曲线的斜率均小于 1, 为两个稳定不动点. 当  $R$  在  $[2.928 \Omega, 2.998 \Omega]$  区域内逐步增大时, 不动点  $A_1$  从原来的不稳定不动点突变成一个稳定不动点, 同时生成一个切点并分裂为一个不稳定不动点  $A_0$  和一个稳定不动点  $A_2$ , 变换器的运行轨迹由原来的多周期轨迹聚变成一条周期 2 轨迹. 随着参数  $R$  进一步增大, 两个稳定不动点  $A_1$  和  $A_2$  都逐渐往上移动, 不稳定不动点  $A_0$  缓慢地往边界参考

电压  $V_{\text{ref}}$  靠拢. 当  $R = 2.998 \Omega$  时, 稳定不动点  $A_1$  和不稳定不动点  $A_0$  均到达边界参考电压  $V_{\text{ref}}$  处并与之发生碰撞, 而稳定不动点  $A_2$  突变为不稳定不动点. 边界碰撞分岔后, 不动点  $A_1$  和  $A_0$  合并成一个切点并消失, 变换器的工作状态从稳定的周期 2 轨迹突变为多周期轨迹.

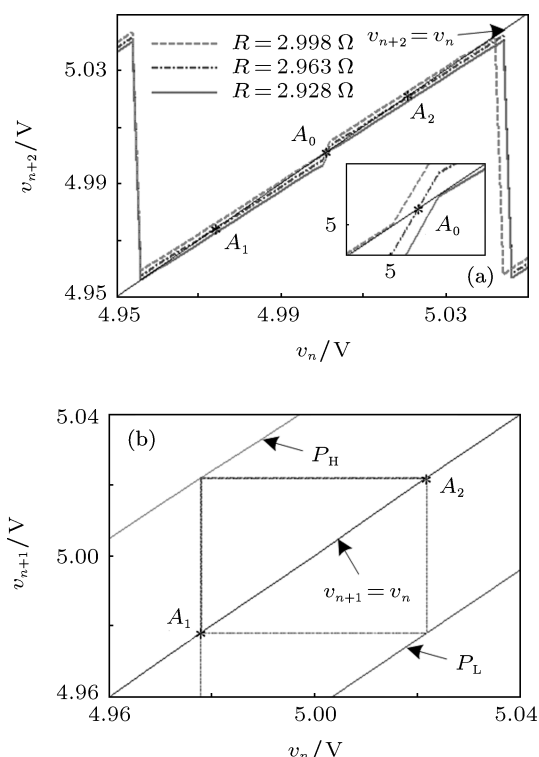


图 8 变换器工作于周期 2 态时二次迭代映射曲线与蛛网图 (a) 二次迭代映射曲线; (b)  $R = 2.963 \Omega$  时的蛛网图

图 8(b) 为  $R = 2.963 \Omega$  时输出电压迭代的蛛网图, 其中  $P_H$  和  $P_L$  分别代表高、低功率脉冲信号单独作用下输出电压的迭代曲线. 变换器输出电压轨迹存在两个稳定不动点  $A_1$  和  $A_2$ , 分别位于  $4.976 \text{ V}$  和  $5.023 \text{ V}$  处. 若开关周期起始时刻输出电压低于参考电压  $V_{\text{ref}}$ , 输出电压迭代曲线将收敛于不动点  $A_1$ ; 反之, 若开关周期起始时刻输出电压高于参考电压  $V_{\text{ref}}$ , 输出电压迭代曲线将收敛于不动点  $A_2$ . 与图 8(a) 所不同的是, 图 8(b) 不能体现出不稳定的不动点, 它仅反映了离散时间模型迭代的遍历性.

### 3.3.3 周期 3

在  $R \in [3.702 \Omega, 3.760 \Omega]$  区域内, PT 控制 DCM Buck 变换器工作于周期 3 态, 由 (10)

式得到的相应的三次迭代映射曲线如图 9(a) 所示. 当  $R = 3.73 \Omega$  时, 三次迭代映射曲线与对角线有五个交点不动点, 分别为  $A_0, A_1, A_2, A_3$  和  $A_4$ , 其中  $A_1$  和  $A_2$  为两个不稳定不动点, 分别位于  $5.0011 \text{ V}$  和  $5.0029 \text{ V}$  处;  $A_0, A_3$  和  $A_4$  为三个稳定不动点, 分别位于  $5.0138 \text{ V}, 4.9851 \text{ V}$  和  $5.0432 \text{ V}$  处. 当  $R$  在  $[3.702 \Omega, 3.760 \Omega]$  区域内逐步增大时, 不动点  $A_3$  从原来的不稳定不动点突变成一个稳定不动点, 同时生成两个切点并分裂为两个不稳定不动点  $A_1, A_2$  和两个稳定不动点  $A_0, A_4$ , 变换器的运行轨迹由原来的多周期轨迹聚变成一条周期 3 轨迹. 随着参数  $R$  进一步增大, 四个不动点  $A_0, A_2, A_3$  和  $A_4$  逐渐往上移动, 一个不稳定不动点  $A_1$  缓慢地往边界参考电压  $V_{\text{ref}}$  靠拢. 当  $R = 3.760 \Omega$  时, 稳定不动点  $A_3$  和不稳定不动点  $A_1$  均到达边界参考电压  $V_{\text{ref}}$  处并与之发生碰撞, 而稳定不动点  $A_4$  突变为不稳定不动点. 边界碰撞分岔后, 不动点  $A_1$  和  $A_3, A_0$  和  $A_2$  合并成两个切点并消失, 变换器的工作状态从稳定的周期 3 轨迹突变为多周期轨迹.

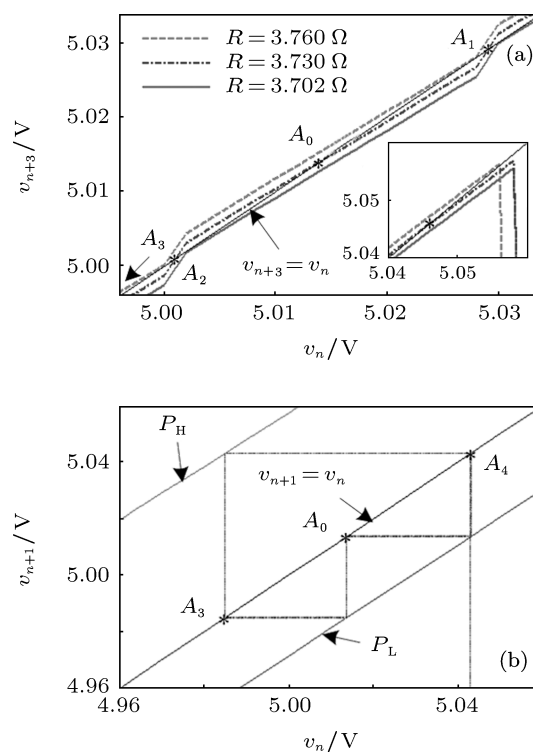


图 9 变换器工作于周期 3 态时三次迭代映射曲线与蛛网图 (a) 三次迭代映射曲线; (b)  $R = 3.73 \Omega$  时的蛛网图

图 9(b) 给出了  $R = 3.73 \Omega$  时输出电压迭代的蛛网图. 变换器输出电压轨迹存在三个稳定不



动点  $A_0$ ,  $A_3$  和  $A_4$ , 分别位于 5.0138 V, 4.9851 V 和 5.0432 V 处. 从图 9(b) 中不难看到, PT 控制在一个脉冲序列循环周期内, 选择输出一次高功率脉冲和两次低功率脉冲, 即脉冲序列循环周期为  $1P_H - 2P_L$ .

由两个高功率脉冲周期和一个低功率脉冲周期组成的周期 3 状态的分析与上述分析类似.

对于一般离散或连续动力学系统, 周期 3 意味着这一系统必定存在其它任意长的周期行为及混沌行为. 但对于 PT 控制 DCM Buck 变换器这类典型的离散系统, 其周期 3 行为并不意味着系统会发生混沌行为. 因此, PT 控制 DCM Buck 变换器是一种特殊的离散时变系统.

#### 4 基于 PSIM 软件的电路仿真验证

基于 PSIM 电路仿真软件平台构建的 PT 控制 DCM Buck 变换器的电路原理图如图 10 所示, 电路参数设置为  $E = 12\text{ V}$ ,  $V_{\text{ref}} = 5\text{ V}$ ,  $f = 50\text{ kHz}$ ,  $L = 10\text{ }\mu\text{H}$ ,  $C = 470\text{ }\mu\text{F}$ ,  $D_H = 0.4$ ,  $D_L = 0.2$ , 负载电阻  $R$  为可变参数. 输出电压经比较器与参考电压进行比较, 若输出电压大于参考电压, 比较器输出高电平信号并在时钟信号 CP 到来时刻触发 D 触发器, Q 端输出高电平信号, 而  $\bar{Q}$  端输出低电平信号. 高电平信号与给定的低功率脉冲信号经与门或或门后输出信号, 即 PT 控制器选择低功率脉冲信号  $P_L$  作为控制信号, 而高功率脉冲信号被禁止输出. 类似地, 若输出电压小于参考电压, D 触发器的 Q 端输出低电平信号, 禁止低功率脉冲信号输出, 而  $\bar{Q}$  输出高电平信号, 允许高功率脉冲信号输出, 即 PT 控制器选择了高功率脉冲信号  $P_H$  作为控制信号.

如图 11 所示为 PT 控制 DCM Buck 变换器的 PSIM 仿真结果, 其中左图为电感电流  $i$  与电容电压  $v$  的时域波形, 右图为在  $i-v$  平面上的相轨图. 图 11 中负载电阻  $R$  的取值分别为 1.8  $\Omega$ , 7.94  $\Omega$ , 2.963  $\Omega$ , 2.45  $\Omega$ , 3.73  $\Omega$  和 2.2  $\Omega$ , 相应的 PT 控制 DCM Buck 变换器的工作状态分别为周期 1 ( $1P_H$ )、周期 1 ( $1P_L$ )、周期 2 ( $1P_H - 1P_L$ )、周期 3 ( $2P_H - 1P_L$ )、周期 3 ( $1P_H - 2P_L$ ) 以及周期 9 ( $7P_H - 2P_L$ ). PT 控制 DCM Buck 变换器的 PSIM 仿真结果与上述理论分析结果一致, 表明本文建立的 PT 控制 DCM Buck 变换器的近

似离散时间模型是可行的. 此外, 电路仿真结果也表明, 随着负载减轻, PT 控制器输出的脉冲序列循环周期信号中高、低功率脉冲数量比值减小.

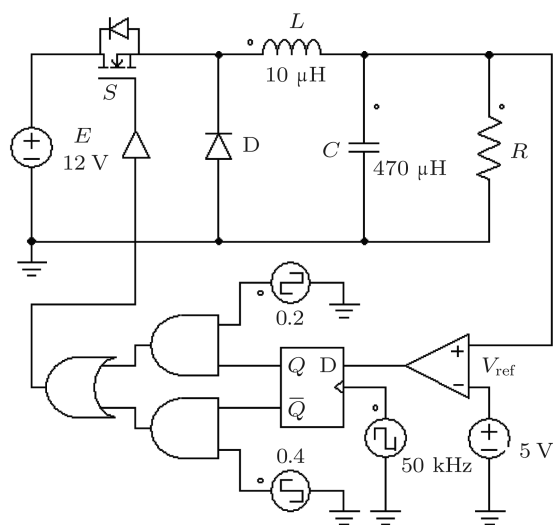
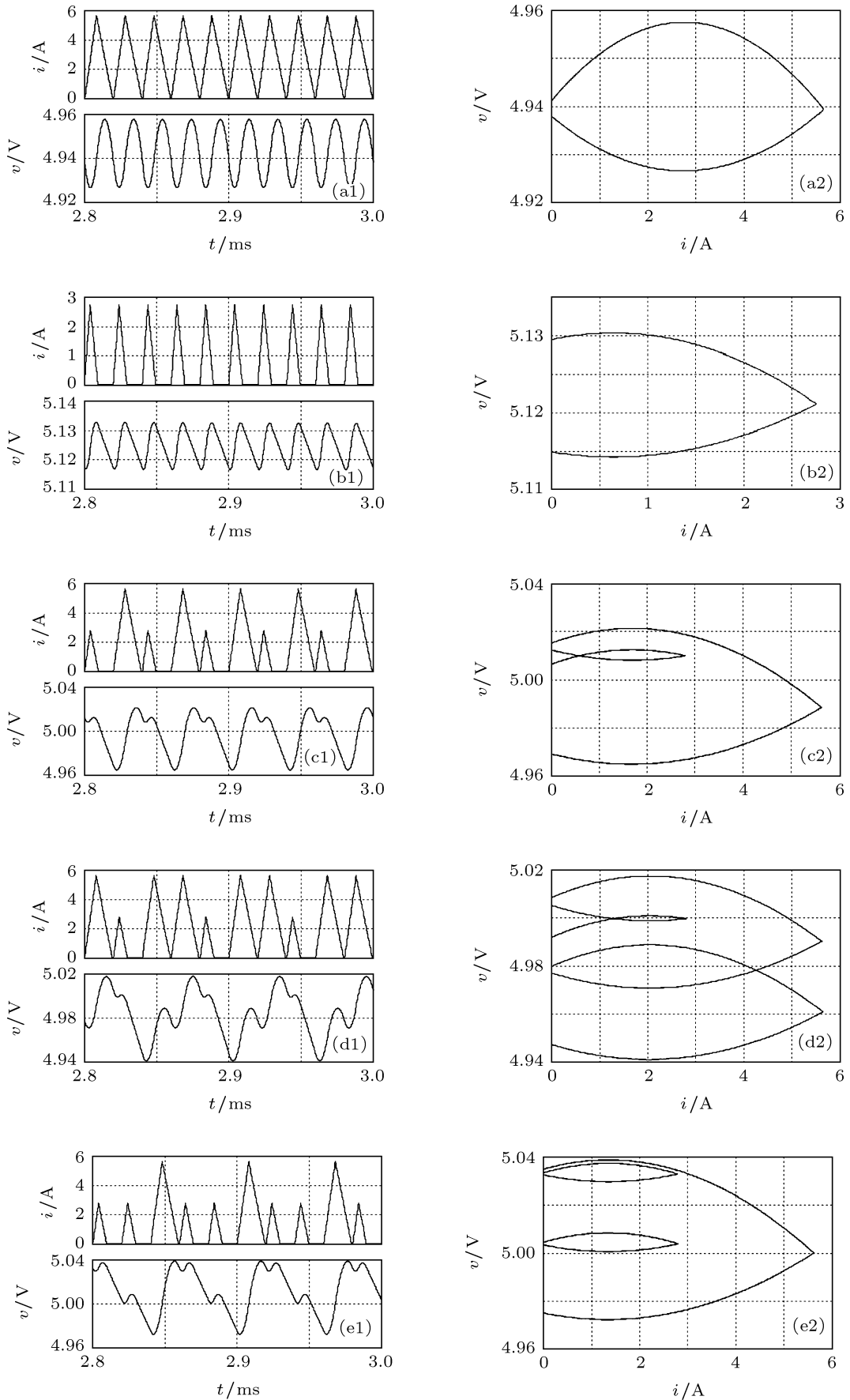


图 10 PT 控制 DCM Buck 变换器 PSIM 仿真电路图

#### 5 实验验证

实验电路原理图与图 9 所示的仿真电路一致. 实验电路中开关管采用 IRF540, 二极管采用 MBR1540, 比较器、D 触发器、与门、或门分别采用 LM319, 74LS74, 74LS08, 74LS32, 驱动电路采用 IR2125, 高低功率脉冲由 FPGA 产生. 实验时选择的各参数与仿真时的参数相同.

图 12 所示为 PT 控制 DCM Buck 变换器的电感电流、输出电压及相应相轨图的实验波形. 从图 12 可以看出, 当  $R$  为 1.8  $\Omega$  和 7.94  $\Omega$  时, 变换器分别工作在由高功率脉冲和低功率脉冲组成的周期 1; 当  $R$  为 2.963  $\Omega$  时, 变换器工作在周期 2; 当  $R$  为 2.45  $\Omega$  和 3.73  $\Omega$  时, 变换器分别工作在脉冲序列组合方式为  $2P_H - 1P_L$  和  $1P_H - 2P_L$  的周期 3; 当  $R$  为 2.2  $\Omega$  时变换器的工作状态为周期 9, 且脉冲序列组合方式为  $7P_H - 2P_L$ . 图 12 所示的实验结果与图 11 所示的仿真结果基本符合, 但也存在一些微小的差别, 这是由于实际电路中功率开关管、二极管、电感和输出电容等元器件存在寄生参数所致. 图 11 和图 12 所示仿真和实验结果验证了理论分析的正确性.



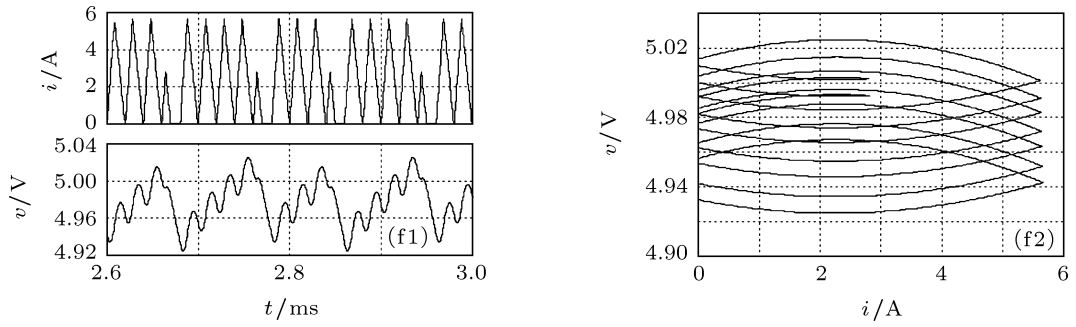
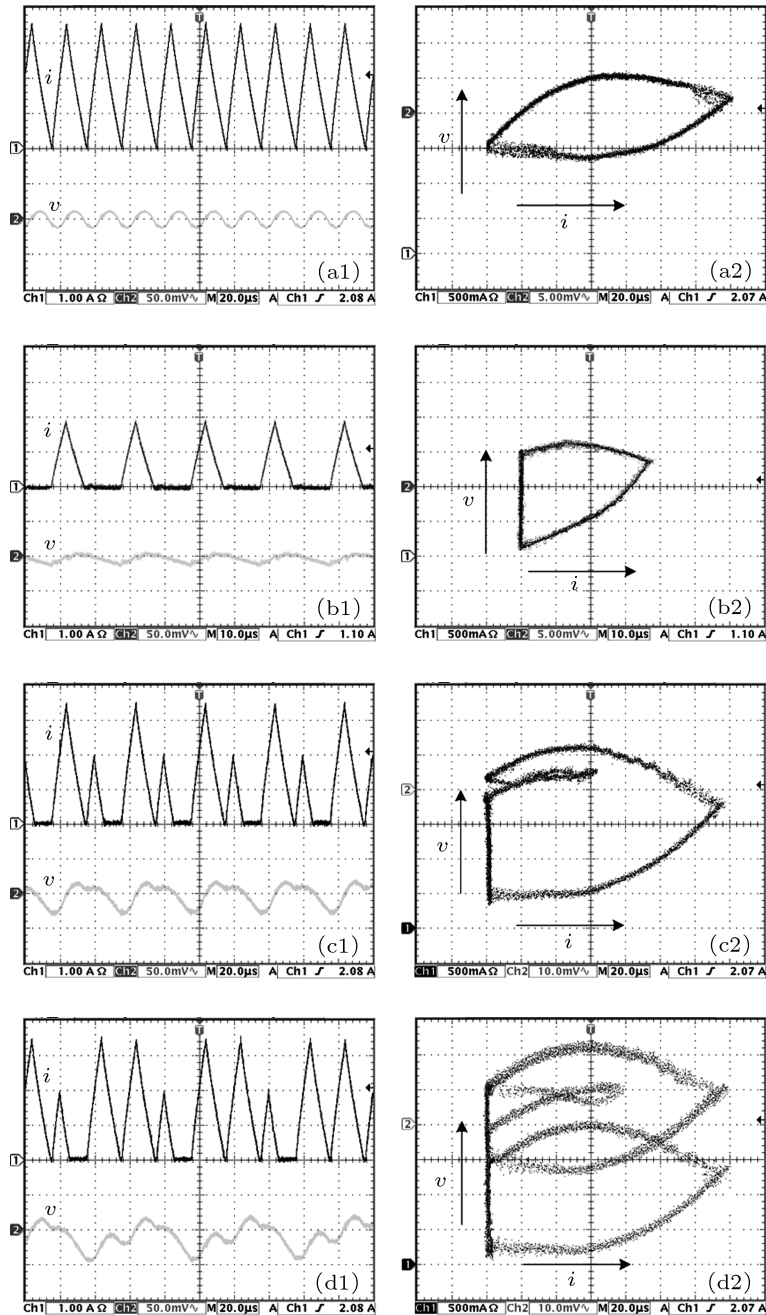


图 11 PT 控制 DCM Buck 变换器中电感电流  $i$  与电容电压  $v$  的时域波形 (左图) 及  $i-v$  平面上的相轨图 (右图) (a)  $R = 1.8 \Omega$ ; (b)  $R = 7.94 \Omega$ ; (c)  $R = 2.963 \Omega$ ; (d)  $R = 2.45 \Omega$ ; (e)  $R = 3.73 \Omega$ ; (f)  $R = 2.2 \Omega$



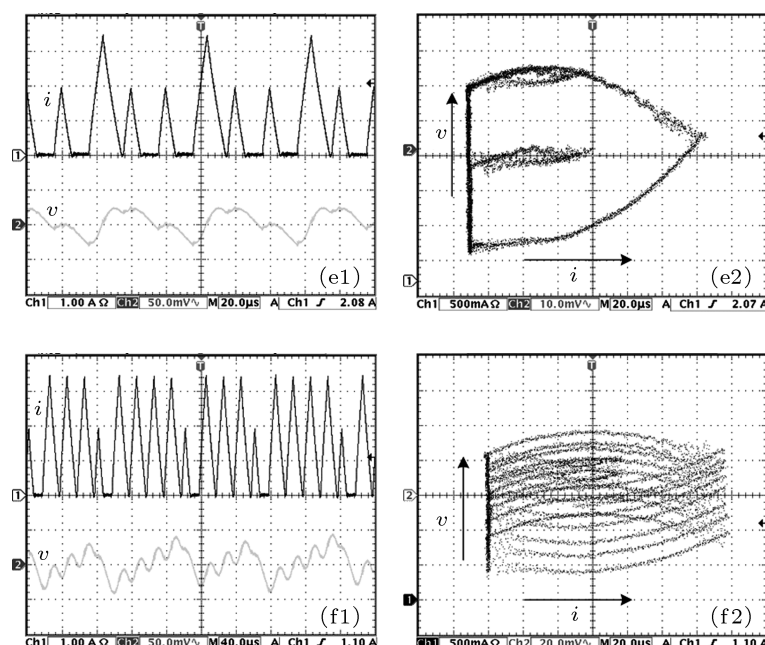


图 12 PT 控制 DCM Buck 变换器电感电流  $i$ 、电容电压  $v$  的实验波形 (左图) 和相应  $i-v$  相轨图 (右图) (a)  $R = 1.8 \Omega$ ; (b)  $R = 7.94 \Omega$ ; (c)  $R = 2.963 \Omega$ ; (d)  $R = 2.45 \Omega$ ; (e)  $R = 3.73 \Omega$ ; (f)  $R = 2.2 \Omega$

## 6 结论

PT 控制是通过调整两组预先设定的高、低功率脉冲的组合方式来调节 DC-DC 变换器的输出电压的一种非线性离散控制方法, 与传统 PWM 控制有着本质上的区别. 因此, PT 控制 DCM Buck 变换器有着与传统 PWM 控制开关 DC-DC 变换器完全不同的动力学行为. 本文对 PT 控制 DCM Buck 变换器进行了动力学建模, 通过开关周期内输出电容电荷的变化量导出了输出电压的变化量, 从而建立了它的近似离散时间模型. 基于该模型, 利用分岔图和李雅谱诺夫指数, 深入研讨了在负载电阻变化时的边界碰撞分岔行为, 并通过构造对应于不同周期态时运行轨迹的迭代映射曲线, 进行了不动

点的稳定性分析, 充分揭示了脉冲序列控制 DCM Buck 变换器边界碰撞分岔的形成机理. 实验结果和 PSIM 电路仿真结果符合, 并与理论分析结果一致, 验证了本文提出的 PT 控制 DCM Buck 变换器的动力学建模方法的可行性.

PT 控制 DCM Buck 变换器的复杂动力学行为是由边界碰撞分岔引起的, 不存在倍周期分岔、Hopf 分岔和结鞍分岔等分岔路由. 当电路参数发生变化时, PT 控制 DCM Buck 变换器始终工作在周期 1、周期 2、周期 3 以及其他更为复杂的多周期态, 其李雅谱诺夫指数也始终小于零. 此外, PT 控制 DCM Buck 变换器存在着周期 3 行为, 但不意味着混沌行为, 完全不同于传统 PWM 控制开关 DC-DC 变换器.

- [1] Wang X M, Zhang B, Qiu D Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2736 (in Chinese) [王学梅, 张波, 丘东元 2008 物理学报 **57** 2736]  
 [2] Liu F 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080511  
 [3] Zhou G H, Bao B C, Xu J P, Jin Y Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 050509  
 [4] Zhou G H, Xu J P, Bao B C, Jin Y Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 060508

- [5] Xie F, Yang R, Zhang B 2011 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **158** 2269  
 [6] Bao B C, Xu J P, Liu Z 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4742  
 [7] Bao B C, Zhou G H, Xu J P, Liu Z 2011 *IEEE Trans. Power Electronics* **26** 1968  
 [8] Yuan G, Banerjee S, Ott E, Yorke J A 1998 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **45** 707  
 [9] Ma Y, Tes C K, Kousaka T, Kawakami H 2005 *IEEE Trans. on*

- Circuit and Systems II* **52** 581
- [10] Wang F Q, Zhang H, Ma X K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2842 (in Chinese) [王发强, 张浩, 马西奎, 闫晔 2008 物理学报 **57** 2842]
- [11] Khaligh A, Emadi A 2008 *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems* **44** 766
- [12] Xu J P, Wang J P 2011 *IEEE Trans. Industrial Electron.* **58** 3658
- [13] Kapat S, Banerjee S, Patra A 2010 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **157** 1793
- [14] Qin M, Xu J P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7603 (in Chinese) [秦明, 许建平 2009 物理学报 **58** 7603]

# Dynamical modeling and border collision bifurcation in pulse train controlled discontinuous conduction mode buck converter\*

Sha Jin<sup>1)</sup> Bao Bo-Cheng<sup>2)†</sup> Xu Jian-Ping<sup>1)</sup> Gao Yu<sup>1)</sup>

1) (School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

2) (School of Information Science and Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

(Received 6 October 2011; revised manuscript received 15 November 2011)

## Abstract

According to the charge variation of output capacitor in a switching cycle, the output voltage variation in a switching cycle can be obtained, from which an approximate discrete-time model of pulse train (PT) controlled buck converter operating in discontinuous conduction mode (DCM) is established. Based on the model, the border-collision bifurcations of the PT controlled DCM buck converter with the variations of the load resistance and the input voltage are studied. By constructing the corresponding iterative map curves, the stabilities of the fixed points, formed by the orbits of period-1, period-2, period-3 and so on, are analyzed, and the mechanisms of border-collision bifurcations of the converter under different operation states are revealed. The analysis results indicate that with the variation of parameters, the PT controlled DCM buck converter always operates in different periodic states, in which the change of the operation mode with periodic state is caused by the border-collision bifurcation and the Lyapunov exponent is always less than zero. By using PSIM circuit simulation software, the time domain waveforms and phase portraits under different load resistances are obtained. Experimental results are provided to verify the correctnesses of theoretical analyses and circuit simulations and the feasibility of dynamical modelling.

**Keywords:** pulse train control, border-collision bifurcation, buck converter, discontinuous conduction mode (DCM)

**PACS:** 05.45.-a

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51177140).

† E-mail: mervinbao@126.com