

非均匀可激发介质中的稀密螺旋波*

董丽芳[†] 白占国 贺亚峰

(河北大学物理科学与技术学院, 河北省光电信息材料重点实验室, 保定 071002)

(2011年12月3日收到; 2012年1月16日收到修改稿)

在非均匀可激发介质中, 采用 Barkley 模型数值模拟了稀螺旋波和密螺旋波, 并对二者的动力学行为随参数的变化进行了研究. 研究发现: 稀螺旋波的旋转频率随参数 b 的增加迅速减小, 之后趋于饱和, 显示出不同于密螺旋波的行为; 两种螺旋波的周期和波长随参数 ε 和非均匀区域尺寸 R 的增加而增加, 相对稀螺旋波而言, 密螺旋波的性质对 R 的依赖更为敏感; 稀螺旋波端点的波速随 R 的增加而减小, 与密螺旋波波速变化趋势相反. 另外, 由于非均匀区域的影响, 当 ε 或 b 超过某一临界值时, 螺旋波臂上出现缺陷点.

关键词: 螺旋波, 非均匀区域, 可激发介质, 动力学行为

PACS: 05.45.-a, 05.65.+b, 47.32.C-, 82.40.Ck

1 引言

螺旋波广泛地存在于自然界和各实验室系统如化学、生物和物理^[1-11]等中, 彻底理解其动力学将对揭示生命的起源, 开发治疗心颤的医学新方法, 解释生态系统的诸多现象等都具有重要的现实意义. 因此, 对螺旋波斑图的研究一直是非线性科学研究的热门课题之一. 早期的研究主要集中在均匀介质中^[1-6], 近年来开始转向非均匀介质并逐渐成为热点, 这是由于非均匀介质更接近于自然界中的实际系统. 例如, 最近的实验研究发现, 动物的大脑皮层内存在螺旋波, 马军等人基于 H-R 神经元和 H-H 神经元模型, 对此进行了系统的研究, 取得了非常重要的研究成果, 如耦合神经网络螺旋波的诱导、相变、通道噪声和乘性噪声对螺旋波鲁棒性的影响等^[7-11], 揭示了螺旋波在大脑皮层存在的生物意义.

研究表明, 非均匀介质中的螺旋波表现出了与均匀介质中的螺旋波极其不同的性质. 例如, 由于非均匀介质中异质性结构的存在, 均匀介质中漂移或漫游的螺旋波被吸引甚至钉扎在非均匀介质局域缺陷的位置^[12-20], 而且小异质颗粒的存在, 容

易导致稳定的螺旋波破碎成空间无序斑图或有序的迷宫斑图. 这种钉扎或破碎螺旋波的控制比在均匀介质中更加困难, 传统消除自由螺旋波的方法一般来说不再适用^[21-24]. 最近的研究发现, 非均匀区域与螺旋波的相互作用产生一种新的运动形式, 即螺旋波的端点围绕其边界做的轨道运动, 这种轨道运动的稳定性依赖于非均匀性的类型, 其漂移速度决定于非均匀性的强度^[25].

稀螺旋波与密螺旋波是螺旋波的两种典型存在形式, 在可激发系统中, 媒质具有可激发性, 且系统只有一个定态解. 当系统受到的扰动达到激发阈值后, 会被激发到一个激发态, 之后系统会自发的向定态弛豫, 形成一个螺旋波^[6]. 在一个激发周期内, 如果激发态与稳定态持续时间大致相等, 形成的螺旋波称为密螺旋波; 如果激发态的持续时间远小于(或远大于)稳定态的时间, 出现的螺旋波则称为稀螺旋波^[16]. 最近人们在实验中发现, 心脏电信号中螺旋波的性质敏感地依赖可激发介质的非均匀性^[26], 其单路折返与多路折返是引起心动过速的主要原因. 折返起源于心房不同组织区域反常电脉冲的传播, 其根源在于电活动势持续时间 (APD) 的缩短^[27,28], 通过调节电活动持续时间可以起到改善心脏功能的作用, 而这恰与稀螺旋波与密螺旋

* 国家自然科学基金 (批准号: 10975043), 河北省自然科学基金 (批准号: 2010000185) 和河北省教育厅重点项目 (批准号: ZD2010140) 资助的课题.

[†] E-mail: Donglf@mailhbueducn

波的性质密切相关,因此深入研究这两种螺旋波的动力学很有必要.

关于稀密螺旋波的研究,人们发现其中心端点可呈现出不同的动力学行为.例如在可激发介质中,稀螺旋波与密螺旋波在电场中的运动方向相反,Krinsk提出了两种竞争机理来解释这一现象^[6].与外加电场作用类似,在可激发介质中介质的非均匀性可以引起螺旋波的漂移,对于相同的非均匀性,稀密螺旋波表现出不同的漂移行为^[29].分析稀密螺旋波的研究现状,发现以往的研究主要集中在稀密螺旋波在外场中的漂移行为,而关于非均匀介质中稀密螺旋波动力学研究尚未见报道.

本工作选用Barkley模型,在二维非均匀可激发介质中,数值研究了参数 b 和 ε 的非均匀区域对稀螺旋波和密螺旋波动力学特征(包括旋转频率、周期、波长和端点波速)的影响.该结果将为更好地理解稀密螺旋波的物理机理,开发治疗心脏病的新方法提供有效的依据和信息.

2 模型

2.1 模型

Barkley模型是一个双变量反应扩散模型,能够很好地描述螺旋波的动力学行为^[30,31],其方程形式如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} f(u, v) + D_u \nabla^2 u, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v), \quad (1b)$$

其局部动力学方程 $f(u, v)$ 和 $g(u, v)$ 为

$$f(u, v) = u(1 - u)\left(u - \frac{v + b}{a}\right), \quad (2a)$$

$$g(u, v) = u - v, \quad (2b)$$

式中参数 a 和 b 是决定系统可激发阈值的参数, ε 是快变量和慢变量之间的时间尺度.它决定了系统的可激发程度.根据所设参数的不同,由方程(1)描述的系统可以是振荡的、双稳的和可激发的.参数 $b = 0$ 是这个系统的一个鞍结分岔点.当 $b < 0$ 时,没有稳定的不动点,鞍点 $S_3 = \left(\frac{b}{a-1}, \frac{b}{a-1}\right)$ 变为一个不稳定的焦点,此时系统是振荡的.当 $b > 0$ 且 $a < 1 + b$ 时,只有 $S_1 = (0, 0)$ 是稳定的,系统是可激发介质^[5],本文只讨论可激发的情况,选择参数 $b > 0$ 且 $a < 1 + b$,保证系统有唯一的均匀定态,对较小的微扰是稳定的.

2.2 非均匀区域的定义

P 为系统参数,可以是 ε 或 b ,其空间分布为

$$P = \begin{cases} P_0, & r > R, \\ P, & r \leq R, \end{cases}$$

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

式中 (x_0, y_0) 表示非均匀区域的初始位置, R 为其空间尺度.为了避免参数的梯度场引起的螺旋波的漂移,在非均匀区域内设定 $P = \text{常数}$.

2.3 稀螺旋波和密螺旋波的定义

为了区分稀螺旋波和密螺旋波,这两种螺旋波的定义采用文献[6]给出的定义:用 λ_e 和 λ_p 分别表示螺旋波的激发态宽度和波长,如果螺旋波的波长满足 $\lambda_e/\lambda_p \ll 1$,称之为稀螺旋波;若 $\lambda_e/\lambda_p \lesssim 1$ 定义为密螺旋波.稀螺旋波和密螺旋波的波长定义均为两部分之和 $\lambda = \lambda_e + \lambda_p$.

在可激发介质中,稀密螺旋波的形成取决于系统参数的选择^[5,6].在本文的数值模拟中,选择 $a = 0.55$, $b_0 = 0.05$, $\varepsilon_0 = 0.024$ 和 $a = 0.98$, $b_0 = 0.03$, $\varepsilon_0 = 0.024$ 两组系统参数分别得到稳定的稀螺旋波和密螺旋波.边界条件为零流边界条件,对应稀密螺旋波的系统尺度为 62.4×62.4 和 156×156 空间单位,积分的空间步长和时间步长分别为 $\Delta x = \Delta y = 0.312$ 空间单位和 $\Delta t = 0.01$ 时间单位.因密螺旋波波头的轨迹半径比较小,而稀螺旋波的中心区域比较大,在数值模拟中,非均匀区域的尺寸 R 的值选取16(稀螺旋波)和5(密螺旋波),形状为正方形.除非均匀区域内参数 b 和 ε 变化外,模拟的结果均在上述参数条件下.

3 模拟结果与讨论

如图1所示,数值模拟了均匀和非均匀可激发介质中的稀密螺旋波及端点轨迹.可以看出,在可激发介质中,非均匀区域的影响导致螺旋波的端点轨迹严重变形,不再是规则的圆周形状.由于稀螺旋波的中心半径远大于密螺旋波的中心半径,其轨迹变化较密螺旋波更为明显.其物理机理可以从非均匀区域与螺旋波端点的相互作用角度进行解释:一方面,在可激发介质中,螺旋波的中心轨迹半径 r 是系统参数 ε 和 b 的函数,介质均匀时, ε 和 b 在整个空间分布均匀,因而 r 保持不变,形

状为规则的圆周,如图 1(a1) 和 (b1) 所示. 在非均匀介质中,在局域非均匀结构的边界上, ε 和 b 的分布发生突变,致使 r 改变. 另一方面,局域非均匀结构与螺旋波波头发生相互作用,根据非均匀性类型、强度、尺寸和作用距离的不同,有时表现为吸引力,有时为排斥力. 当螺旋波波头运动到

不同位置时,受到的作用力大小方向均在变化,改变了其速度的大小和方向,进而改变了螺旋波端点的运动轨迹,如图 1(a2) 和 (b2) 所示. 可以看出,局域非均匀结构在决定稀密螺旋波动力学行为方面起着重要作用. 下面从非均匀区域的强度和尺寸两方面进行讨论.

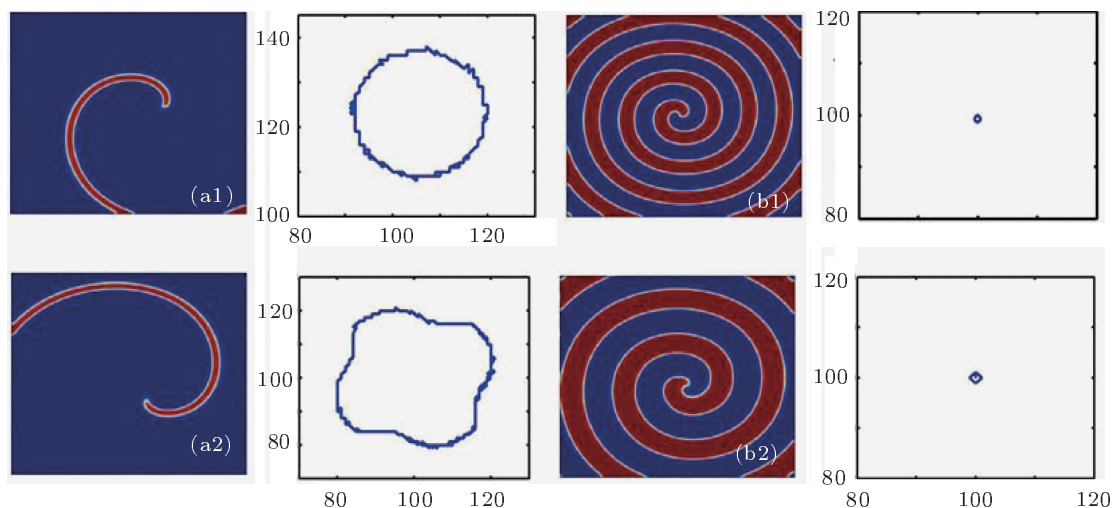


图 1 均匀和非均匀可激发介质中稀密螺旋波斑图及其端点轨迹 (稀密螺旋波对应的系统参数分别为 $a = 0.55, b_0 = 0.05, \varepsilon_0 = 0.024, \varepsilon = 0.05, R = 16$ 和 $a = 0.98, b_0 = 0.03, \varepsilon_0 = 0.024, \varepsilon = 0.05, R = 5$, 非均匀区域的形状为正方形) (a1) 和 (b1) 均匀介质中稀密螺旋波; (a2) 和 (b2) 非均匀介质中稀密螺旋波

3.1 非均匀区域的可激发性对稀密螺旋波性质的影响

介质的可激发性对螺旋波的选择形成及其动力学行为有着重要作用,最近有实验结果表明,螺旋波会被介质中不激发的区域吸引并钉扎在该位置处^[15]. 本节讨论非均匀区域中心与螺旋波中心的距离较近时,其可激发性对稀密螺旋波动力学的影响,主要讨论 b 和 ε 两种系统参数的作用.

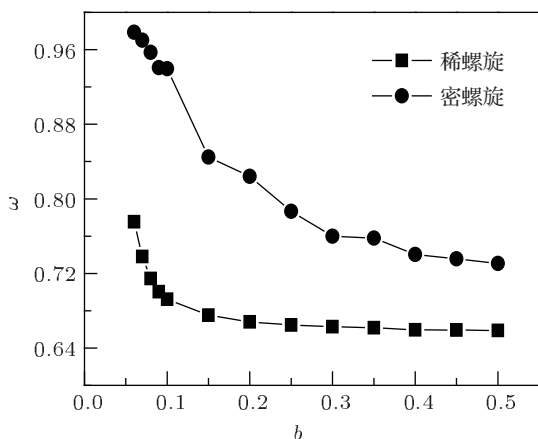


图 2 稀密螺旋波的旋转频率随参数 b 的变化曲线 (稀密螺旋波的旋转频率均是由相应均匀介质中的值归一化的,所用参数与图 1 中的参数相同)

随着参数 b 的增加,稀密螺旋波的旋转频率显示出非线性的变化规律,如图 2 所示. 对于同一 b 值,稀螺旋波的旋转频率均小于密螺旋波的. 当 b 值增加时,其值迅速减小,当 b 值超过临界值 $b_c = 0.15$ 之后,减小得非常缓慢并逐渐趋于饱和. 这是因为随着 b 的增大,系统的可激发性降低,稀螺旋波的周期变大,旋转频率降低; $b_c = 0.15$ 是一个临界点,当 $b > b_c$ 时,系统失去可激发性,变成不可激发的, b 再增加,对其旋转频率几乎不产生影响. 对于密螺旋波而言, b 的取值范围较大,因而密螺旋波的旋转频率随 b 的增加缓慢减小,并不饱和.

从图 3 和图 4 可以看出,稀螺旋波的周期和波长都随参数 ε 的增加而增加,周期增加的比较快,并趋于饱和;与周期相比较,其波长增加平缓,但不饱和,致使稀螺旋波的波速开始几乎保持不变,只在 $\varepsilon > 0.36$ 时变化明显 (见图 5). 就密螺旋波而言,当 ε 连续增加时,其周期、波长和速度的变化与稀螺旋波明显不同: 周期和波长的变化趋势类似,均为先快速增加,在 $\varepsilon > 0.46$ 时趋于饱和,但是波长增加的幅度更大,因此其波速呈现出先快速增大后变化缓慢最终趋于饱和,如图 5 所示. 这是因为控制稀密螺旋波的物理机理不同,对于稀螺旋波,是接近螺旋波波头的曲率选择其波长的

小; 对密螺旋波则是波与前一个波的相互作用决定其波长的选择 [6]. 仔细观察图 3、图 4 和图 5, 除了稀螺旋波与密螺旋波的动力学行为不同, 二者 ε 参量的取值范围也有很大不同, 稀螺旋波 ε 只能从 0.02 到 0.044, 密螺旋波的取值则是 0.02—0.08,

这可能是因为稀密螺旋波对应系统的可激发性不同. 这些结果充分证实了非均匀可激发介质中的稀密螺旋波有着不同的动力学行为. 如上所述, 系统参数对稀密螺旋波的周期、波长等特征指数的影响对通过调节电活动持续时间改善心脏功能有重要意义.

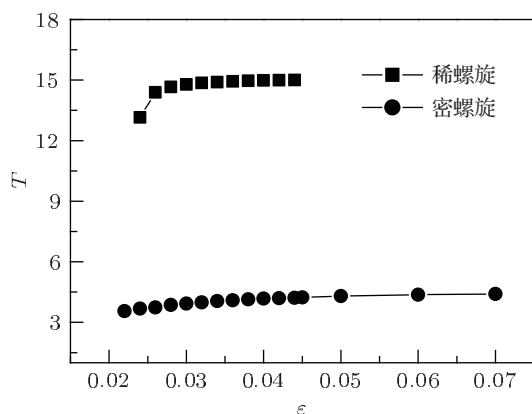


图 3 稀密螺旋波的周期随参数 ε 的变化曲线

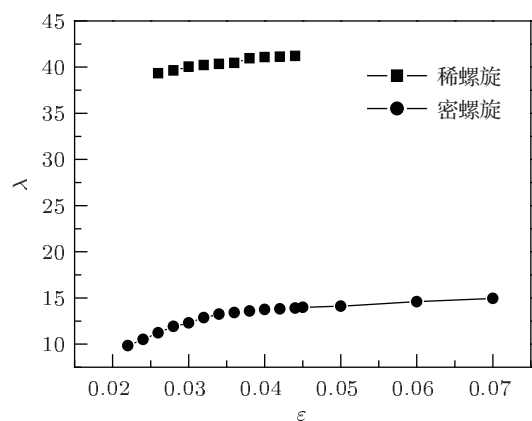


图 4 稀密螺旋波的波长随参数 ε 的变化曲线

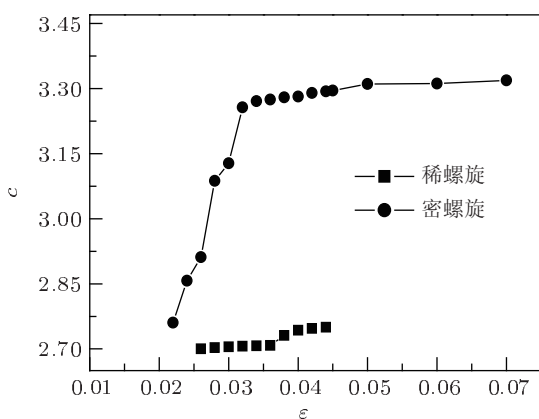


图 5 稀密螺旋波的波速随参数 ε 的变化曲线

3.2 非均匀区域的尺寸对稀密螺旋波动力学行为的影响

当非均匀区域中心与螺旋波中心的距离较近时, 局域非均匀性的尺寸 R 对稀密螺旋波的动力学性质也有很大的影响. 本节详细讨论局域非均匀性的尺寸对稀密波的周期、波长和波速的作用. 在图 6 中给出了稀密螺旋波的周期对局域非均匀性尺寸的依赖关系, 局域非均匀范围内的 $b = 0.5$. 在 $R \leq 10$ 时, 随 R 增加, 稀螺旋波的周期几乎保持不变, $R > 10$ 时, 近似线性增加. 而密螺旋波的周期随 R 增加明显增加, 在整个区间呈线性变化. 对两条曲线的线性部分进行线性拟合, 得到相应的拟合公式分别为 $T = 0.67R + 5.54$ (稀螺旋波) 和 $T = 0.45R + 1.63$ (密螺旋波). 又因为螺旋波的周期、中心半径和波速之间存在函数关系 $2\pi(R + \Delta R) = C_n \cdot T$, 通过数学变换化为 $T = \frac{2\pi}{C_n}R + \frac{2\pi}{C_n}\Delta R$ 式, 可以得到, 拟合线的斜率与螺旋波的波速是倒数关系 [6]. 从图上可知, 稀螺旋波的斜率大于密螺旋波的斜率, 故稀螺旋波具有较小的波速, 该结果与图 5 的结果相一致. 从图 7 可以看出, 这两类螺旋波的波长随 R 的变化趋势与周期的变化相似, 依然是密螺旋波的性质受局域非

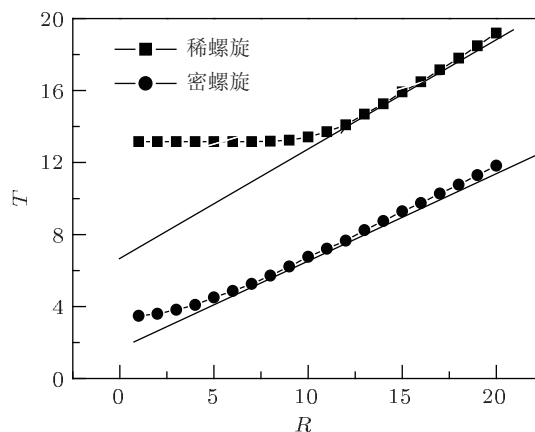


图 6 稀密螺旋波的周期随非均匀区域尺寸 R 的变化曲线

均匀性尺寸的影响更加敏感. 为了了解这种现象是否具有普遍性, 我们还模拟了多种形状的局域非均匀性结构, 包括圆形、长方形和线形等, 得到的结果与系统存在正方形形状非均匀区域的结果类似.

在研究局域非均匀性尺寸对稀密螺旋波的波速的影响时发现一个有趣的现象, 稀螺旋波的波

速随 R 的增加而减小, 密螺旋波的波速则随 R 的增加而增加, 二者的变化趋势完全相反. 虽然形成这一现象的物理机理还不清楚, 但是螺旋波的波速在螺旋波的控制方法中起着重要作用, 该结果对于设计螺旋波的引出或移除的新方法可提供重要信息.

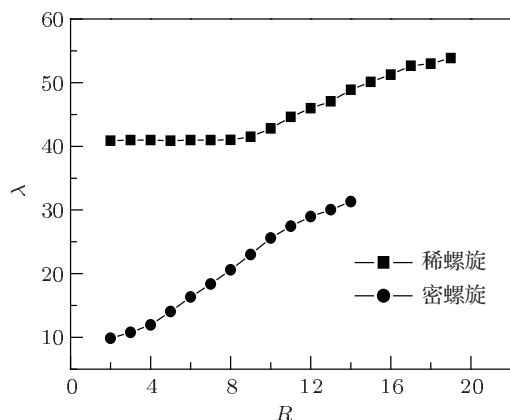


图7 稀密螺旋波的波长随非均匀区域尺寸 R 的变化曲线

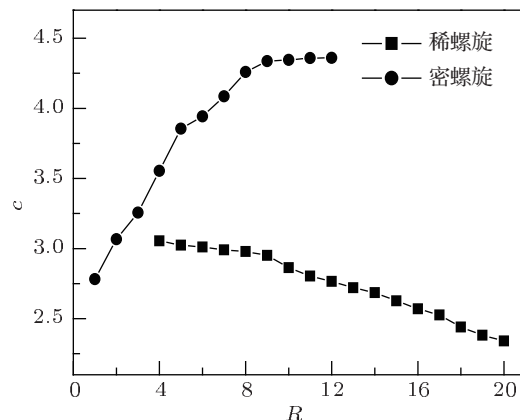


图8 稀密螺旋波的波速随非均匀区域尺寸 R 的变化曲线

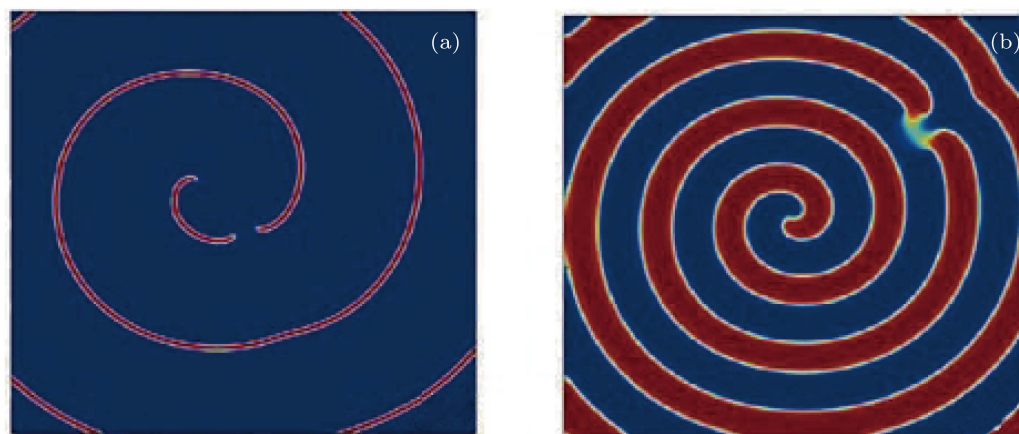


图9 臂上出现缺陷点的螺旋波斑图 (a) 稀螺旋波; (b) 密螺旋波; 稀螺旋波和密螺旋波选用的系统参数分别为 $\varepsilon = 0.038, R = 16, N = 500$ 和 $\varepsilon = 0.1, R = 20, N = 200$

改变非均匀区域中心的位置, 使其远离螺旋波的中心, 此时, 螺旋波的端点轨迹不再受到非均匀区域的影响, 仍然保持均匀可激发介质中的规则的圆周形状. 随着非均匀区域内 ε 的增加, 出现了一种新的现象 (见图 9): 当 $\varepsilon \geq 0.038$ 时, 并且非均匀区域的尺寸满足条件 $R \geq \lambda_e$ 时, 稀螺旋波的臂上 (非均匀区域范围内) 出现缺陷点. 密螺旋波则在 $\varepsilon \geq 0.1$ 时臂上出现缺陷点. 非均匀区域为参数 b 引起时, 稀密螺旋波的臂上同样出现缺陷点, 相应的临界值为 $b \geq 0.1$ (稀螺旋波) 和 $b \geq 0.21$ (密螺旋波).

4 结论

在二维的可激发介质中, 基于 Barkley 模型, 用数值模拟的方法研究了参数的局域不均匀性对稀密螺旋波动力学性质的影响. 结果表明: 局域不均匀性的强度、位置和尺寸对螺旋波的性质均起着重要作用, 而且稀螺旋波和密螺旋波呈现出完全不同的动力学行为. 当非均匀区域中心位置接近螺旋波中心时, 稀螺旋波的旋转频率随 b 的增加迅速减小并趋于饱和; 密螺旋波的旋转频率随 b 的增加持续减小, 当 $b > 0.4$ 时才趋于饱和. 密螺旋波的波

长、周期和波速均随 ε 的增加而增加, 最后趋于饱和; 而稀螺旋波的周期随 ε 的变化与密螺旋波类似, 波长缓慢增加并不饱和, 因此当 ε 开始增加时, 其波速几乎不变, 当 ε 增加到较大时才有明显的增加. 局域不均匀性的尺度 R 较小时, 对稀螺旋波的性质影响很小, 对密螺旋波的影响较为明显. 两种螺旋

波的波速随 R 的增加变化趋势相反. 另外, 当非均匀区域中心位置远离螺旋波中心时, 螺旋波的端点轨迹不再受影响; 只是当 ε 和 b 的值超过某临界值时, 稀密螺旋波臂上出现缺陷点. 我们的工作对于更好地理解非均匀可激发介质中稀密螺旋波的性质和实现螺旋波在医学领域的应用有重要意义.

- [1] Zaikin A N, Zhabotinsky A M 1970 *Nature* **225** 535
- [2] Arthur T, Winfree A 1991 *Chaos* **1** 303
- [3] Barkley D 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 164
- [4] Barkley D 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 2090
- [5] Ouyang Q 2000 *Pattern Formation in Reaction-Diffusion Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific & Technological Education Publishing House) pp73–77 (in Chinese) [欧阳颀 2000 反应扩散系统中的斑图动力学 (上海: 上海科技教育出版社) 第 73–77 页]
- [6] Krinsky V, Hamm E, Voignier V 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 3854
- [7] Ma J, Tang J 2011 *Optimal Control for Patterns in Space-time System* (Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Publishing House) pp104–130 (in Chinese) [马军, 唐军 2011 时空系统斑图优化控制 (武汉: 华中科技大学出版社) 第 104–130 页]
- [8] Ma J, Zhang A H, Tang J, Jin W Y 2010 *J. Bio. Sys.* **18** 243
- [9] Ma J, Tang J, Zhang A H, Jia Y 2010 *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **53** 672
- [10] Ma J, Wu Y, Ying H P, Jia Y 2011 *Chinese Sci. Bull.* **56** 151
- [11] Wang Q Y, Matjaz P, Duan Z S, Chen G R 2008 *Phys. Lett. A* **372** 5681
- [12] Jimenez Z A, Marts B, Steinbock O 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 244101
- [13] Shajahan T K, Nayak A R, Pandit R 2009 *PLoS ONE* **4** e4738
- [14] Alberto P M, Vicente P M, Vicente P V 1998 *Phys. Rev. E* **58** R2689
- [15] Lin Z Y, Maskara B, Aguel F, Emokpae R, Tung Jr L 2006 *Circulation* **114** 2113
- [16] Pazo D, Kramer L, Pumir A, Kanani S, Efimov I, Krinsky V 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 168303
- [17] Sungjae W, Jinhee H, Tae Yu K, Byung W B, Kyoung J L 2008 *New Journal of Physics* **10** 015005
- [18] Zhang G Y, Ma J, Gan Z N, Chen Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6815 (in Chinese) [张国勇, 马军, 甘正宁, 陈勇 2008 物理学报 **57** 6815]
- [19] Dai Y, Wei H M, Tang G N 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5979 (in Chinese) [戴瑜, 韦海明, 唐国宁 2010 物理学报 **59** 5979]
- [20] Wei H M, Tang G N 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040504 (in Chinese) [韦海明, 唐国宁 2011 物理学报 **60** 040504]
- [21] Fu Y Q, Zhang H, Cao Z J, Zheng B, Hu G 2005 *Phys. Rev. E* **72** 046206
- [22] Akihiro I, Marcel H, Konstantin A, Kenichi Y 2008 *Phys. Rev. E* **78** 066216
- [23] Yuan G Y, Yang S P, Wang G R, Chen S G 2008 *Chin. Phys. Soc.* **17** 1925
- [24] Joseph Tranquillo, Meghan Howes 2008 *Phys. Rev. E* **78** 051914
- [25] Biktashev V N, Barkley D, Biktasheva I V 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 058302
- [26] Shajahan T K, Sitabhra S, Pandit R 2007 *Phys. Rev. E* **75** 011929
- [27] Nattel S 2002 *Nature* **415** 219
- [28] Marban E 2002 *Nature* **415** 213
- [29] Xu L D, Qu Z L, Di Z R 2009 *Phys. Rev. E* **79** 036212
- [30] Biktashev I V, Barkley D, Biktashev V N, Bordyugov G V, Foulkes A J 2009 *Phys. Rev. E* **79** 056702
- [31] Barkley D 1991 *Physica D* **49** 61

Sparse and dense spiral waves in heterogeneous excitable media*

Dong Li-Fang[†] Bai Zhan-Guo He Ya-Feng

(Key Laboratory of Photoelectronic Information Material of Hebei Province, College of Physics Science and Technology, Hebei University, Baoding 071002, China)

(Received 3 December 2011; revised manuscript received 16 January 2012)

Abstract

Dynamic behaviors of sparse and dense spirals are investigated numerically based on a Barkley model in heterogeneous excitable media. It is found that the rotating frequency of sparse spiral wave decreases rapidly with b increasing and then tends to saturation, which is different from that of dense spiral wave. The period and wavelength of dense spiral wave increase with the increase of parameter ε or the size R of localized inhomogeneity, which depends more sensitively on the size R than those of sparse spiral wave. The change of the speed of dense spiral wave tip with R is opposite to that of the sparse spiral wave tip. In addition, inhomogeneous effect gives rise to a defect point in arm of each of the two spiral waves when ε or b increases above a critical value.

Keywords: spiral waves, localized inhomogeneity, excitable media, dynamics behaviors

PACS: 05.45.-a, 05.65.+b, 47.32.C-, 82.40.Ck

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10975043), the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. A2010000185), and the Key project of Department of Education of Hebei Province (Grant No. ZD2010140).

[†] E-mail: Donglf@mailhbueducn