在 $s = 3/2$ 情形下利用超对称量子力学方法解广义椭球函数

郭维奇† 田贵花 董锟

(北京邮电大学理学院, 北京 100876)

(2011 年 9 月 26 日收到; 2011 年 11 月 6 日收到修改稿)

本文利用超对称量子力学的方法研究出广义椭球函数. 首先, 用超对称量子力学方法近似的算出前四阶超势 W 和相应本征值 E, 然后递推出 W_n 的通式, 并利用数学归纳法来证明 W_n 通式的正确性, 从而得到了此时的广义椭球函数方程的基态波函数, 这对于它们的应用有很大的意义.

关键词: 超势, 基态波函数, 超对称量子力学, 广义椭球函数

PACS: 11.30.Pb,03.65.Ge, 02.03.Gp

1 引 言

在天体与相对论物理中, 广义椭球函数有着重要的应用, 例如在引力波探测, 弯曲时空中的量子场论, 同时它们也在球腔问题, 以及在信号和数字图像处理等方面有着巨大的应用价值 [1−8].

1973 年 Teukolsky 成功地对黑洞微扰方程进行了分离变量, 分别得到了径向与角向 Teukolsky 方程, 其中角向 Teukolsky 方程是 [1,2]

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)+s+\beta^2\cos^2\theta -2s\beta\cos\theta-\frac{(m+s\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=-E\Theta. \quad (1)$$

此方程需满足 $\Theta(\theta)$ 在 $\theta = 0, \pi$ 处有界的边界条件, 这是施图姆 - 刘维尔边值问题. 方程中 $s = 0, \pm1, \pm2, \pm1/2, \pm3/2$, s 代表自旋权重, 在 Kerr 黑洞的微扰中分别代表微扰场为标量场, 电磁场, 引力场及狄拉克场和 Rarita-Schwinger 场. 有时也将方程 (1) 称为广义椭球函数方程. 尽管它们是普通的椭球函数的扩展, 但到目前为止, 其特性比较复杂, 相对来说比较难以研究. 在很长一段时期内, 对其进行研究中, 一直没有找到更好的方法. 在解决物理问题中, 对称是一种重要的思想, 超对称量子力学就是基于这一思路, 在对微分方程的求解中有着很好的应用, 最近, 文献 [9—19] 利用超对称量子力学方法研究 $s = 0, 1, 2, 1/2, 3/2$ 时的广义椭球函数方程.

由于在文献 [19] 涉及的计算复杂, 它们的计算结果需要检验. 虽然文献 [1—8] 中有部分结果可以对文献 [19] 进行一些检验. 但这些文献都没有给出基态本征函数与本征值的通项公式, 因而无法与文献 [19] 进行完全的比较. 我们现在应用同样的方法重新研究 $s = 3/2$ 时的方程, 主要就是为了对文献 [19] 已得的结果 $s = 3/2$ 时的情况进行检验. 虽然方法一样, 都是应用超对称量子力学方法中的近似法, 但是由于写出的方程却不一样, 因而计算过程完全不相同. 而同样方法会给出类似的量, 像超势等, 从而得到方程的基态波函数及本征值. 当把这些基态波函数都用同样自变量表示时, 两种方法得到的结果应该一样. 这就是本文的主要工作, 即把方程 (1) 化为新的薛定谔方程形式, 应用超对称量子力学方法重新求解广义椭球波动方程.

† E-mail: gwqkyr@126.com

2 前四阶超势和能量本征值的计算

2.1 超对称量子力学方法的引入

为了使用超对称量子力学方法求解方程, 首先必须把方程转化成薛定谔方程的形式. 通常有两种方法可以把方程 (1) 化成薛定谔方程形式, 第一种是通过改变波函数的形式, 第二种是通过改变自变量的形式. 文献 [10—19] 用的是第一种形式, 即通过对波函数 Θ 做变换

$$\Theta(\theta)=\frac{\Psi(\theta)}{\sqrt{sin\theta}},\quad (0<\theta<\pi). \tag{2}$$

把方程 (1) 变为薛定谔方程形式, 即

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\theta^2}+\bigg[\frac{1}{4}+s+\beta^2\cos^2\theta-2s\beta\cos\theta-\frac{(m+s\cos\theta)^2-1/4}{\sin^2\theta}+E\bigg]\Psi=0. \tag{3}$$

第二种方法是对方程 (1) 中的自变量 θ 进行下面的变换:

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}z}, \tag{4}$$

这样方程 (1) 也可以转化成薛定谔方程形式, 即

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}z^2}+\big[s\mathrm{sech}^2z+E\mathrm{sech}^2z+2s\mathrm{sech}^2z\times\mathrm{tanh}z\beta+\mathrm{tanh}^2z\times\mathrm{sech}^2z\beta^2+2ms\mathrm{tanh}z-s^2\mathrm{tanh}^2z\big]\Theta=m^2\Theta. \tag{5}$$

相应的波函数 Θ 满足边界条件, 即 $\Theta|_{z=-\infty}=\Theta|_{z=+\infty}$ 有限. 方程 (5) 可写为

$$-\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}z^2}+V\Theta=m^2\Theta, \tag{6}$$

其中势能 V 为

$$V(z,\beta,s)=-\big[s\mathrm{sech}^2z+E\mathrm{sech}^2z+2s\mathrm{sech}^2z\times\mathrm{tanh}z\beta+\mathrm{tanh}^2z\times\mathrm{sech}^2z\beta^2+2ms\mathrm{tanh}z-s^2\mathrm{tanh}^2z\big]. \tag{7}$$

超势 W 在超对称量子力学计算中起着非常重要的作用, 它与基态波函数 Θ_0 密切相关, Θ_0 可由 W 求得 [20], 即

$$\Theta_0=N\exp\bigg[-\int W\,\mathrm{d}z\bigg]. \tag{8}$$

而超势 W 通过以下方程由 $V(z,\beta,s)$ 定义 [9−20]:

$$V(z,\beta,s)-E_0=W^2-W', \tag{9}$$

即在超对称量子力学中, 是由 $V(z,\beta,s)$ 通过方程 (9) 求得超势 W, 然后由方程 (8) 求得基态波函数 [20].

我们知道, 求解方程 (1) 和 (9) 都是一件非常困难的工作, 因此我们寻找另外一种思路, 即近似的方法去解决问题, 把超势 W 展开成关于 β 的无穷级数, 即

$$W=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^nW_n. \tag{10}$$

这种方法的使用使求解基态波函数更加便捷, 我们可以由 (8) 式直接计算出基态波函数 Θ_0 来,

$$\begin{aligned}\Theta_0=&N\exp\bigg[-\int W\,\mathrm{d}z\bigg]\\=&N\exp\bigg[-\int(W_0+\beta W_1+\beta^2W_2+\beta^3W_3+\cdots)\,\mathrm{d}z\bigg].\end{aligned} \tag{11}$$

由此式, 通过计算出 $W_1, W_2, W_3, \cdots$, 就可以确定出基态波函数的近似表达式 [10−19]. 本文中心工作就是利用超势展开法更简洁的计算出了基态波函数 Θ_0. 为此基态本征值 E_0 也可必须相应地展开成关于 β 的无穷级数, 即

$$E_0=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^nE_{0,n;m}, \tag{12}$$

其中, $E_{0,n;m}$ 中第一个角标 0 代表基态能量, 另一个角标 n 代表参数 β 的阶数. 由 (9) 式, (10) 式和 (12) 式得 [10−18]

$$\begin{aligned}V(z,\beta,s)-\sum_{n=0}^{\infty}\beta^nE_{0,n;m}&=W^2-W'\\=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}W_iW_{n-i}-W_n'\Big)\beta^n,\end{aligned} \tag{13}$$

进一步把上式右边化简为

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}W_iW_{n-i}-W_n'\Big)\beta^n\\=&W_0^2-W_0'+\beta(2W_0W_1-W_1')+\sum_{n=2}^{\infty}\beta^n\bigg[\sum_{k=1}^{n-1}W_kW_{n-k}+2W_0W_n-W_n'\bigg].\end{aligned} \tag{14}$$

将 (7) 式代入 (13) 式, 得

$$(W_0^2-W_0')\beta^0+(2W_0W_1-W_1')\beta^1$$

$$\begin{aligned}&+\sum_{n=2}^{\infty}\beta^n\left[\sum_{k=1}^{n-1}W_kW_{n-k}+2W_0W_n-W_n'\right]\\=&\Big[-(E_{0,n;m}+s)\mathrm{sech}^2z-2sm\tanh z\\&+s^2\tanh^2z+m^2\Big]\beta^0\\&+(-E_{0,1;m}\mathrm{sech}^2z-2s\tanh z\times\mathrm{sech}^2z)\beta^1\\&+(-E_{0,2;m}\mathrm{sech}^2z-\tanh^2z\times\mathrm{sech}^2z)\beta^2\\&+\sum_{n=3}^{\infty}(-E_{0,n;m}\mathrm{sech}^2z)\beta^n.\end{aligned}\tag{15}$$

由 β 相同幂数的系数相同, 得

$$\begin{aligned}W_0'-W_0^2=&(E_{0,n;m}+s)\mathrm{sech}^2z+2sm\tanh z\\&-s^2\tanh^2z-m^2,\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}W_1'-2W_0W_1=&E_{0,1;m}\mathrm{sech}^2z+2s\tanh z\\&\times\mathrm{sech}^2z\equiv f_1(z),\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}W_2'-2W_0W_2=&E_{0,2;m}\mathrm{sech}^2z+\tanh^2z\\&\times\mathrm{sech}^2z+W_1^2\equiv f_2(2),\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}W_n'-2W_0W_n=&E_{0,n;m}\mathrm{sech}^2z\\&+\sum_{k=1}^{n-1}W_kW_{n-k}\\\equiv&f_n(z)(n\geqslant3).\end{aligned}\tag{19}$$

对于 $s=3/2$, 从上面的方程组中我们得到

$$E_{0,0;m}=m(m+1)-\frac{15}{4},\tag{20}$$

$$W_0=m\tanh z-\frac{3}{2}.\tag{21}$$

由常数变易法, 可得到

$$\begin{aligned}W_n(z)=&A_n(z)\cosh^{2m}z\mathrm{e}^{-3z}\\=&A_n(z)\cosh^{2m}z\Big[4\cosh^3z-3\cosh z\\&+\sinh z(1-4\cosh^2z)\Big],\end{aligned}\tag{22}$$

其中 A_n 由下式确定:

$$A_n(z)=\int f_n(z)\cosh^{-2m}z\,\mathrm{e}^{3z}\,\mathrm{d}z,\tag{23}$$

即

$$\begin{aligned}A_n(z)=\int f_n(z)\cosh^{-2m}z\Big[4\cosh^3z\\-3\cosh z+\sinh z(4\cosh^2z-1)\Big]\mathrm{d}z.\end{aligned}\tag{24}$$

2.2 求解 $s=3/2$ 时前四阶 $n\leqslant4$ 的能量 $E_{0,n;m}$ 和超势 W_n

第一阶:

$$\begin{aligned}A_1(z)=\int&(E_{0,1;m}+3\tanh z)\mathrm{sech}^2z\\&\times\cosh^{-2m}z\Big[4\cosh^3z-3\cosh z\\&+\sinh z(4\cosh^2z-1)\Big]\mathrm{d}z.\end{aligned}\tag{25}$$

下面我们定义一个函数 $P(2m+1,z)=\int\mathrm{sech}^{2m+1}z\mathrm{d}z$ 来简化上式 [20]:

$$\begin{aligned}P(2m+1,z)=&\int\mathrm{sech}^{2m+1}z\mathrm{d}z\\=&\frac{\sinh z}{2m+1}\sum_{k=0}^{m-1}J(2m+1,k)\\&\times\mathrm{sech}^{2m-2k}z\\&+\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\arctan\sinh z.\end{aligned}\tag{26}$$

我们令

$$J(2m+1,k)=\frac{(2m+1)(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-2k+1)}{(2m)(2m-2)(2m-4)\cdots(2m-2k)},\tag{27}$$

所以 $A_1(z)$ 可化为

$$\begin{aligned}A_1(z)=&(4E_{0,1;m}+12)P(2m-1,z)\\&-(3E_{0,1;m}+15)P(2m+1,z)\\&+3P(2m+3,z)+(12+4E_{0,1;m})\\&\times\frac{\cosh^{-2m+1}z}{-2m+1}-(9+E_{0,1;m})\\&\times\frac{\cosh^{-2m-1}z}{-2m-1}.\end{aligned}\tag{28}$$

利用 (26), (27) 式, 我们可以推导出递推关系

$$\begin{aligned}P(2m+1,z)=&\frac{2m-1}{2m}P(2m-1,z)\\&+\frac{\sinh z}{2m}\mathrm{sech}^{2m}z,\end{aligned}\tag{29}$$

$$\begin{aligned}P(2m+3,z)=&\frac{2m+1}{2m+2}P(2m+1,z)\\&+\frac{\sinh z}{2m+2}\mathrm{sech}^{2m+2}z,\end{aligned}\tag{30}$$

$$P(2m+3,z)=\frac{(2m+1)(2m-1)}{(2m+2)(2m)}$$

$$\begin{aligned}&\times P(2m-1,z)\\&+\frac{(2m+1)\mathrm{sinh}z}{(2m+2)(2m)}\mathrm{sech}^{2m}z\\&+\frac{\mathrm{sinh}z}{2m+2}\mathrm{sech}^{2m+2}z.\end{aligned}\tag{31}$$

所以将 $P(2m+1,z)$ 和 $P(2m+3,z)$ 转化为 $P(2m-1,z)$, 则 $A_1(z)$ 可化为

$$\begin{aligned}A_1(z)=&a_1\times P(2m-1,z)\\&-\frac{6}{m+1}\mathrm{sinh}z\times\mathrm{sech}^{2m}z\\&+\frac{3}{2m+2}\mathrm{sinh}z\times\mathrm{sech}^{2m+2}z\\&-\frac{6}{m+1}\mathrm{sech}^{2m-1}z\\&+\frac{9}{2m+2}\mathrm{sech}^{2m+1}z,\end{aligned}\tag{32}$$

其中

$$\begin{aligned}a_1=&\frac{3(2m+1)(2m-1)}{2m(2m+2)}+4E_{0,1;m}\\&+12-\frac{(2m-1)(3E_{0,1;m}+15)}{2m}.\end{aligned}\tag{33}$$

因为 $A_1(z)$ 中含有 $P(2m-1,z)$ 项, 会使 Θ_0 在 $z=\pm\infty$ 处发散, 其系数必须为零才能保证波函数 Θ_0 在 $z\longrightarrow\pm\infty$ 的有界性, 即

$$\begin{aligned}&\frac{3(2m+1)(2m-1)}{2m(2m+2)}+4E_{0,1;m}+12\\&-\frac{(2m-1)(3E_{0,1;m}+15)}{2m}=0,\end{aligned}\tag{34}$$

所以,

$$E_{0,1;m}=-\frac{9}{2m+2}.\tag{35}$$

将 $E_{0,1;m}$ 代回到 (28) 式有

$$\begin{aligned}A_1(z)=&-\frac{6}{m+1}\mathrm{sinh}z\times\mathrm{sech}^{2m}z\\&+\frac{3}{2m+2}\mathrm{sinh}z\times\mathrm{sech}^{2m+2}z\\&-\frac{6}{m+1}\mathrm{sech}^{2m-1}z\\&+\frac{9}{2m+2}\mathrm{sech}^{2m+1}z,\end{aligned}\tag{36}$$

所以 $W_1(z)$ 为

$$\begin{aligned}W_1(z)=&A_1(z)\Big[4\mathrm{cosh}^3z-3\mathrm{cosh}z\\&+\mathrm{sinh}z(1-4\mathrm{cosh}^2z)\Big]\mathrm{cosh}^{2m}z\\=&-\frac{3}{2(m+1)}\mathrm{sech}^2z.\end{aligned}\tag{37}$$

用类似求 W_1 的方法来求出 $E_{0,2;m},E_{0,3;m},E_{0,4;m}$, W_2,W_3,W_4, 具体结果为

$$E_{0,2;m}=-\frac{8m^3+96m^2+168m-1}{8(m+1)^3(2m+3)},\tag{38}$$

$$W_2(z)=-\frac{3}{8}\frac{(2m-1)(2m+5)}{(m+1)^3(2m+3)}\mathrm{sech}^2z-\frac{1}{4}\frac{(2m-1)(2m+5)}{(m+1)^2(2m+3)}\mathrm{sinh}z\times\mathrm{sech}^3z,\tag{39}$$

$$E_{0,3;m}=-\frac{9(2m-1)^2(2m+5)^2}{16(m+1)^5(m+2)(2m+3)},\tag{40}$$

$$\begin{aligned}W_3(z)=&\frac{27(2m-1)(2m+5)}{16(m+1)^5(m+2)(2m+3)}\mathrm{sech}^2z+\frac{9(2m-1)(2m+5)}{8(m+1)^4(m+2)(2m+3)}\mathrm{sinh}z\times\mathrm{sech}^3z\\&-\frac{3(2m-1)(2m+5)}{8(m+1)^3(m+2)(2m+3)}\mathrm{sech}^4z,\end{aligned}\tag{41}$$

$$E_{0,4;m}=-\frac{(2m-1)^2(2m+5)a}{128(m+1)^7(2m+3)^3(m+2)},\tag{42}$$

$$a=(-7942-6975m+2416m^2+3320m^3+672m^4+16m^5),\tag{43}$$

$$\begin{aligned}W_4(z)=&\frac{3(2m-1)(-7942-6975m+2416m^2+3320m^3+672m^4+16m^5)}{128(m+1)^7(m+2)(2m+3)^3}\mathrm{sech}^2z\\&+\frac{(2m-1)(-7942-6975m+2416m^2+3320m^3+672m^4+16m^5)}{64(m+1)^6(m+2)(2m+3)^3}\mathrm{sinh}z\times\mathrm{sech}^3z\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{9(2m-1)(4m^3+16m^2-25m-64)}{32(m+1)^5(m+2)(2m+3)^2}\text{sech}^4 z\\
&-\frac{(2m-1)(4m^3+16m^2-25m-64)}{16(m+1)^4(m+2)(2m+3)^2}\text{sinh}z\times\text{sech}^5 z
\end{aligned} \tag{44}
$$

3 归纳并证明 $s=3/2$ 时超势的通式

通过递推出前四阶能量本征值 E 和超势 W, 我们可以归纳出 $W_n(z)$ 的通式形式如下:

$$
W_n(z)=\text{sinh}z\sum_{k=1}^{[n/2]}a_{n,k}\text{sech}^{2k+1}z+\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}b_{n,k}\text{sech}^{2k}z, \tag{45}
$$

其中 $a_{n,k},b_{n,k}$ 分别是 $W_n(z)$ 常系数, 下面我们用数学归纳法来证明 $W_n(z)$ 通式对任意的 $n>1$ 都成立. 也就是说假设 $k<n$ 时 $W_k(z)$ 满足通式的形式, 如果当 $k=n$ 时 $W_n(z)$ 也能写成通式的形式, 那么我们归纳出的 $W_n(z)$ 的形式就是正确的. 为了方便起见, 我们把 (40) 式重写成

$$
W_n(z)=\text{sinh}z\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}a_{n,k}\text{sech}^{2k+1}z+\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}b_{n,k}\text{sech}^{2k}z, \tag{46}
$$

并且规定, 当 $k<1$ 或 $k>[n/2]$ 时,$a_{n,k}=0$, 当 $k<1$ 或 $k>[(n+1)/2]$ 时,$b_{n,k}=0$. 实际上, 有这些规定, 对下面的计算可以方便一些.

证明 假设 $W_k(z)$ 和 $W_{n-k}(z)$ 均满足通式的形式, 可分别写成以下形式:

$$
W_k(z)=\text{sinh}z\sum_{i=1}^{[(k+1)/2]}a_{k,i}\text{sech}^{2i+1}z+\sum_{i=1}^{[(k+1)/2]}b_{k,i}\text{sech}^{2i}z, \tag{47}
$$

$$
W_\varepsilon(z)=\text{sinh}z\sum_{j=1}^{[(\varepsilon+1)/2]}a_{\varepsilon,j}\text{sech}^{2j+1}z+\sum_{j=1}^{[(\varepsilon+1)/2]}b_{\varepsilon,j}\text{sech}^{2j}z, \tag{48}
$$

其中,$\varepsilon=n-k$, 在下面的公式中,ε 都是此含义, 所以

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}W_kW_\varepsilon=&\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{p=2}^{[(k+1)/2]+[(\varepsilon+1)/2]+1}\sum_{j=1}^{p-1}[a_{k,p-j}a_{\varepsilon,j}-a_{k,p-1-j}a_{\varepsilon,j}+b_{k,p-j}b_{\varepsilon,j}]\text{sech}^{2p}z\\
&+\text{sinh}z\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{p=2}^{[(k+1)/2]+[(\varepsilon+1)/2]}\sum_{j=1}^{p-1}[a_{k,p-j}b_{\varepsilon,j}+b_{k,p-j}a_{\varepsilon,j}]\text{sech}^{2p+1}z\\
=&\sum_{p=2}^{[n/2+1]}C_{n,p}\text{sech}^{2p}z+\text{sinh}z\sum_{p=2}^{[n/2]+1}D_{n,p}\text{sech}^{2p+1}z.
\end{aligned} \tag{49}
$$

其中的系数 C_p 和 D_p 分别为

$$
C_{n,p}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{p-1}(a_{k,p-j}a_{\varepsilon,j}-a_{k,p-1-j}a_{\varepsilon,j}+b_{k,p-j}b_{\varepsilon,j}), \tag{50}
$$

$$
D_{n,p}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{p-1}(a_{k,p-j}b_{\varepsilon,j}+b_{k,p-j}a_{\varepsilon,j}). \tag{51}
$$

在以上的计算过程中, p 的上限是 $[n/2]+1$, 包括了所有的 i 和 j 的可能取值, 其余多余项由 (45) 式和 (46) 式中 $a_{n,i}, b_{n,i}$ 是否为零决定其是否为零. 事实上, 我们可以看到当 $p<2$ 或 $p>[n/2]+1$ 时, $C_{n,p}=0$, 当 $p<2$ 或 $p>[(n+1)/2]$ 时, $D_{n,p}=0$. 将 $f_n(z)=E_{0,n;m}\mathrm{sech}^2 z+\sum_{k=1}^{n-1}W_kW_{n-k}$ 代入 (23) 式中得

$$\begin{aligned}
A_n(z)=&\int\left[E_{0,n;m}\mathrm{sech}^2 z+\sum_{k=1}^{n-1}W_kW_{n-k}\right]\\
&\times\cosh^{-2m}z[4\cosh^3 z-3\cosh z\\
&+\sinh z(4\cosh^2 z-1)]\,\mathrm{d}z\\
=&4E_{0,n;m}P(2m-1,z)\\
&-3E_{0,n;m}P(2m+1,z)\\
&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}[4C_{n,p}+4D_{n,p}]\\
&\times P(2m+2p-3,z)\\
&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}[-3C_{n,p}-5D_{n,p}]\\
&\times P(2m+2p-1,z)\\
&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}D_{n,p},P(2m+2p+1,z)\\
&+4E_{0,n;m}\frac{\cosh^{-2m+1}z}{-2m+1}\\
&+E_{0,n;m}\frac{\cosh^{-2m-1}z}{2m+1}\\
&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}[C_{n,p}+3D_{n,p}]\frac{ch^{-2m-2p+1}z}{2m+2p-1}\\
&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}[4C_{n,p}+4D_{n,p}]\\
&\times\frac{ch^{-2m-2p+3}z}{-2m-2p+3}.
\end{aligned}\tag{52}$$

将上式 $P(2m+2p+1,z)$ 等进行化简, 记为 $P(2m+2p+1,z)=P_1(2m+2p+1,z)+P_2(2m+2p+1,z)$, 其中

$$\begin{aligned}
&P_1(2m+2p+1,z)\\
=&\frac{\sinh z}{2m+2p+1}\sum_{k=0}^{p}J(2m+2p+1,k)\\
&\times\mathrm{sech}^{2m+2p-2k}z,
\end{aligned}\tag{53}$$

$$\begin{aligned}
&P_2(2m+2p+1,z)\\
=&\frac{\sinh z}{2m+2p+1}\sum_{k=p+1}^{m+p-1}J(2m+2p+1,k)\\
&\times\mathrm{sech}^{2m+2p-2k}z\\
&+\frac{(2m+2p-1)!!}{(2m+2p)!!}\mathrm{arctansinhz}.
\end{aligned}\tag{54}$$

由 (51) 式和 (52) 式我们看到 $P(2m+2p+1,z)$ 的两部分中的 $P_2(2m+2p+1,z)$ 会使得相应的波函数 Θ_0 在 $z\in(-\infty,+\infty)$ 内是发散的, 而 $P_1(2m+2p+1,z)$ 项不会使 Θ_0 在 $z\in(-\infty,+\infty)$ 发散, 这些可从下面进一步的化简中看到. 设 $j=p-k$, 则

$$\begin{aligned}
&P_1(2m+2p+1,z)\\
=&\frac{\sinh z}{2m+2p+1}\sum_{j=0}^{p}J(2m+2p+1,p-j)\\
&\times\mathrm{sech}^{2m+2j}z.
\end{aligned}$$

设 $i=k-p-1$, 则

$$\begin{aligned}
&P_2(2m+2p+1,z)=\frac{\sinh z}{2m+2p+1}\\
&\times\sum_{i=0}^{m-2}J(2m+2p+1,i+p+1)\mathrm{sech}^{2m-2i-2}z\\
&+\frac{(2m+2p-1)!!}{(2m+2p)!!}\mathrm{arctansinhz}.
\end{aligned}\tag{55}$$

由 $J(2m+2p+1,p+i+1)=J(2m+2p+1)J(2m-1,i)$ 及 (23) 式得

$$\begin{aligned}
&P_2(2m+2p+1,z)=\frac{2m-1}{2m+2p+1}\\
&\times J(2m+2p+1,p)P(2m-1,z).
\end{aligned}\tag{56}$$

所以 $P(2m+2p+1,z)$ 化简为

$$\begin{aligned}
&P(2m+2p+1,z)\\
=&P_1(2m+2p+1,z)+\frac{2m-1}{2m+2p+1}
\end{aligned}$$

$$\times J(2m+2p+1,p)P(2m-1,z). \tag{57}$$

因此应用 (56) 式得

$$\begin{aligned}&P(2m+2p-1,z)\\=&P(2m+2(p-1)+1,z)\\=&P_1(2m+2p-1,z)\\&+\frac{2m-1}{2m+2p-1}J(2m+2p-1,p-1)\\&\times P(2m-1,z).\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}&P(2m+2p-3,z)\\=&P(2m+2(p-2)+1,z)\\=&P_1(2m+2p-3,z)\\&+\frac{2m-1}{2m+2p-3}J(2m+2p-3,p-2)\\&\times P(2m-1,z).\end{aligned} \tag{59}$$

将 (56), (57), (58) 式代入 (50) 式, 并化简得

$$\begin{aligned}A_n(z)=&P(2m-1,z)\times A\\&-\frac{4E_{0,n;m}}{2m-1}\mathrm{sech}^{2m-1}z\\&+\frac{E_{0,n;m}}{2m+1}\mathrm{sech}^{2m+1}z\\&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}\frac{C_{n,p}+3D_{n,p}}{2m+2p-1}\mathrm{sech}^{2m+2p-1}z\\&-\sum_{p=2}^{[n/2]+1}\frac{4C_{n,p}+4D_{n,p}}{2m+2p-3}\mathrm{sech}^{2m+2p-3}z\\&-\frac{3E_{0,n;m}}{2m}\mathrm{sech}^{2m}z\times\sinh z\\&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}\frac{4C_{n,p}+4D_{n,p}}{2m+2p-3}\\&\times\sum_{j=0}^{p-2}J(2m+2p-3,p-2-j)\\&\times\mathrm{sech}^{2m+2j}z\times\sinh z\\&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}\frac{-3C_{n,p}-5D_{n,p}}{2m+2p-1}\\&\times\sum_{j=0}^{p-1}J(2m+2p-1,p-1-j)\\&\times\mathrm{sech}^{2m+2j}z\times\sinh z\\&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}\frac{D_{n,p}}{2m+2p+1}\\&\times\sum_{j=0}^{p}J(2m+2p+1,p-j)\\&\times\mathrm{sech}^{2m+2j}z\times\sinh z,\end{aligned} \tag{60}$$

其中

$$\begin{aligned}A=&4E_{0,n;m}-3E_{0,n;m}\frac{2m-1}{2m}\\&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}[4C_{n,p}+4D_{n,p}]\frac{2m-1}{2m+2p-3}\\&\times J(2m+2p-3,p-2)\\&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}[-3C_{n,p}-5D_{n,p}]\\&\times\frac{2m-1}{2m+2p-1}J(2m+2p-1,p-1)\\&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}D_{n,p}\frac{2m-1}{2m+2p+1}\\&\times J(2m+2p+1,p).\end{aligned} \tag{61}$$

为保证波函数 Θ_0 在 $Z=\pm\infty$ 有限, 必须有 $A=0$. 从而得到

$$\begin{aligned}E_{0,n;m}=&\frac{2m}{2m+3}\left\{\sum_{p=2}^{[n/2]+1}[4C_{n,p}+4D_{n,p}]\right.\\&\times\frac{2m-1}{2m+2p-3}\\&\times J(2m+2p-3,p-2)\\&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}[-3C_{n,p}-5D_{n,p}]\\&\times\frac{2m-1}{2m+2p-1}\\&\times J(2m+2p-1,p-1)\\&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}D_{n,p}\frac{2m-1}{2m+2p+1}\\&\left.\times J(2m+2p+1,p)\right\}.\end{aligned} \tag{62}$$

这时, $A_n(z)$ 可以简写成 $A_n(z)=R_n(z)+T_n(z)\sinh z$, 其中

$$\begin{aligned}R_n(z)=&-\frac{4E_{0,n;m}}{2m-1}\mathrm{sech}^{2m-1}z\\&+\frac{E_{0,n;m}}{2m+1}\mathrm{sech}^{2m+1}z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}[C_{n,p}+3D_{n,p}]\\
&\times\frac{1}{2m+2p-1}\mathrm{sech}^{2m+2p-1}z\\
&-\sum_{p=2}^{[n/2]+1}[4C_{n,p}+4D_{n,p}]\\
&\times\frac{1}{2m+2p-3}\mathrm{sech}^{2m+2p-3}z\\
=&\sum_{p=0}^{[n/2]+1}R_{n,p}\mathrm{sech}^{2m+2p-1}z,
\end{aligned}\tag{63}$$

$$\begin{aligned}
T_n(z)=&-3E_{0,n;m}\frac{1}{2m}\mathrm{sech}^{2m}z\\
&+\sum_{j=0}^{[n/2]-1}\sum_{p=j+2}^{[n/2]+1}[4C_{n,p}+4D_{n,p}]\\
&\times\frac{1}{2m+2p-3}\\
&\times J(2m+2p-3,p-2-j)\\
&\times\mathrm{sech}^{2m+2j}z\\
&+\sum_{j=0}^{[n/2]}\sum_{p=j+1}^{[n/2]+1}[-3C_{n,p}-5D_{n,p}]\\
&\times\frac{1}{2m+2p-1}\\
&\times J(2m+2p-1,p-1-j)\\
&\times\mathrm{sech}^{2m+2j}z\\
&+\sum_{j=0}^{[n/2]+1}\sum_{p=j}^{[n/2]+1}D_{n,p}\frac{1}{2m+2p+1}\\
&\times J(2m+2p+1,p-j)\mathrm{sech}^{2m+2j}z\\
=&\sum_{l=0}^{[n/2]+1}T_{n,l}\mathrm{sech}^{2m+2l}z.
\end{aligned}\tag{64}$$

其中

$$R_{n,0}=-\frac{4E_{0,n;m}}{2m-1},\tag{65}$$

$$R_{n,1}=\frac{E_{0,n;m}-4C_{n,2}-4D_{n,2}}{2m+1},\tag{66}$$

$$R_{n,p}=\frac{-C_{n,p}-3D_{n,p}-4C_{n,p+1}-4D_{n,p+1}}{2m+2p-1},\quad(p\geqslant 2),\tag{67}$$

$$\begin{aligned}
T_{n,0}=&-\frac{3}{2m}E_{0,n;m}\\
&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}\frac{4C_{n,p}+4D_{n,p}}{2m+2p-3}\\
&\times J(2m+2p-3,p-2)\\
&+\sum_{p=1}^{[n/2]+1}\frac{-3C_{n,p}-5D_{n,p}}{2m+2p-1}\\
&\times J(2m+2p-1,p-1)\\
&+\sum_{p=0}^{[n/2]+1}\frac{D_{n,p}}{2m+2p+1}\\
&\times J(2m+2p+1,p),
\end{aligned}\tag{68}$$

$$\begin{aligned}
T_{n,1}=&\sum_{p=3}^{[n/2]+1}\frac{4C_{n,p}+4D_{n,p}}{2m+2p-3}\\
&\times J(2m+2p-3,p-3)\\
&+\sum_{p=2}^{[n/2]+1}\frac{-3C_{n,p}-5D_{n,p}}{2m+2p-1}\\
&\times J(2m+2p-1,p-2)\\
&+\sum_{p=1}^{[n/2]+1}\frac{D_{n,p}}{2m+2p+1}\\
&\times J(2m+2p+1,p-1).
\end{aligned}\tag{69}$$

当 $l\geqslant 2$ 时, $T_{n,l}$ 可以写成

$$\begin{aligned}
T_{n,l}=&\sum_{p=l+2}^{[n/2]+1}\frac{4C_{n,p}+4D_{n,p}}{2m+2p-3}\\
&\times J(2m+2p-3,p-l-2)\\
&+\sum_{p=l+1}^{[n/2]+1}\frac{-3C_{n,p}-5D_{n,p}}{2m+2p-1}\\
&\times J(2m+2p-1,p-l-1)\\
&+\sum_{p=l}^{[n/2]+1}\frac{D_{n,p}}{2m+2p+1}\\
&\times J(2m+2p+1,p-l).
\end{aligned}\tag{70}$$

所以

$$\begin{aligned}
A_n(z)=&R_n(z)+T_n(z)\sinh z\\
=&\sum_{l=0}^{[n/2]+1}[R_{n,l}\cosh z+T_{n,l}\sinh z]\\
&\times\mathrm{sech}^{2m+2l}z.
\end{aligned}\tag{71}$$

由 (22) 式可得

$$\begin{aligned}
W_n(z)=&A_n(z)\Big[4\cosh^3z-3\cosh z\\
&+\sinh z(1-4\cosh^2z)\Big]\cosh^{2m}z
\end{aligned}$$

$$= \sum_{l=0}^{[n/2]+1} \left[R_{n,l}\cosh z + T_{n,l}\sinh z\right] \times \left[4\cosh^3 z - 3\cosh z + \sinh z(1-4\cosh^2 z)\right]\mathrm{sech}^{2l} z$$

$$= \sum_{l=0}^{[n/2]+1} \left[4(R_{n,l}-T_{n,l})\mathrm{ch}^4 z + (5T_{n,l}-3R_{n,l})\cosh^2 z - T_{n,l}\right] \times \mathrm{sech}^{2l} z + \sum_{l=0}^{[n/2]+1} \sinh z \times \left[4(T_{n,l}-R_{n,l})\cosh^3 z + (R_{n,l}-3T_{n,l})\cosh z\right]\mathrm{sech}^{2l} z. \quad (72)$$

其中, 计算可得下面关系:

$$4R_{n,0} - 4T_{n,0} = 0, \quad (73)$$

$$4R_{n,1} - 4T_{n,1} - 3R_{n,0} + 5T_{n,0} = 0, \quad (74)$$

$$4R_{n,2} - 4T_{n,2} - 3R_{n,1} + 5T_{n,1} - T_{n,0} = 0, \quad (75)$$

由此又可以得到

$$4T_{n,1} - 4R_{n,1} + R_{n,0} - 3T_{n,0} = 0, \quad (76)$$

$$4T_{n,2} - 4R_{n,2} + R_{n,1} - 3T_{n,1} = 0. \quad (77)$$

所以

$$W_n(z) = \sum_{l=3}^{[n/2]+1} \Big[4(R_{n,l}-T_{n,l})\mathrm{sech}^{2(l-2)} z + \sum_{l=2}^{[n/2]+1} (5T_{n,l}-3R_{n,l})\mathrm{sech}^{2(l-1)} z - \sum_{l=1}^{[n/2]+1} T_{n,l}\mathrm{sech}^{2l} z + \sinh z\Big[\sum_{l=3}^{[n/2]+1} 4(T_{n,l}-R_{n,l}) \times \mathrm{sech}^{2(l-1)-1} z + \sum_{l=2}^{[n/2]+1} (R_{n,l}-3T_{n,l})\mathrm{sech}^{2l-1} z\Big]$$

$$= \sum_{l=1}^{[n/2]+1} b_{n,l}\mathrm{sech}^{2l} z + \sum_{l=1}^{[n/2]} a_{n,l}\mathrm{sech}^{2l+1} z \times \sinh z. \quad (78)$$

其中

$$b_{n,l}(z) = 4(R_{n,l+2} - T_{n,l+2}) + (5T_{n,l+1} - 3R_{n,l+1}) - T_{n,l}, \quad (79)$$

$$a_{n,l}(z) = 4(T_{n,l+2} - R_{n,l+2}) + (R_{n,l+1} - 3T_{n,l+1}). \quad (80)$$

显然, (78) 式除了关于求和 $\sum_{l=1}^{[n/2]+1} b_{n,l}\mathrm{sech}^{2l} z$ 中的上限与 (45) 式的不一样, 其他全都一样. 下面证明这两个求和号的上限也是一样的. 当 n 为偶数时, l 取最大值, 即 $[n/2]+1 = n/2+1$ 显然大于 $[(n+1)/2] = n/2$, 这时可以计算得到

$$b_{n,\frac{n}{2}+1} = -T_{n,\frac{n}{2}+1} = 0, \quad (81)$$

$$b_{n,\frac{n}{2}} = -3R_{n,\frac{n}{2}+1} + 5T_{n,\frac{n}{2}+1} - T_{n,\frac{n}{2}} \neq 0.$$

而当 n 为奇数时,l 取得最大值, 即 $l = [n/2]+1 = [(n+1)/2]$, 这时

$$b_{n,\frac{n+1}{2}} = -T_{n,\frac{n+1}{2}} \neq 0. \quad (82)$$

通过以上分析, (78) 式可以写成通式形式, 即

$$W_n(z) = \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} b_{n,k}\mathrm{sech}^{2k} z + \sum_{k=1}^{[n/2]} a_{n,k}\mathrm{sech}^{2k+1} z \times \sinh z. \quad (83)$$

因此, 我们已经证明了有关 W_n 公式的正确性, 也就是说, 对于任意的 $n \geqslant 1$, W_n 满足此关系式.

进一步化简可得

$$a_{\mathrm{n,l}} = \sum_{p=l+1}^{[\frac{n}{2}]+1} G_{n,p} \frac{J(2m+2p-3, p-l-1)(2m+2l-2)(2m+2l)}{(2m+2p-3)(2m+2l+1)(2m+2l+3)}, \quad (84)$$

$$b_{\mathrm{n,l}} = -\frac{3a_{n,l}}{2m+2l}, \quad l = 1, \quad (85)$$

$$b_{\mathrm{n,l}} = -\frac{3a_{n,l}}{2m+2l} - \frac{D_{n,p}}{2m+2l}, \quad l \geqslant 2. \quad (86)$$

其中

$$\begin{aligned} G_{n,p} &= 4(C_{n,p}+D_{n,p})+(2m+2p-3)F_{n,p} \\ &= \frac{[(2m+2p)C_{n,p}+3D_{n,p}](2m+2p+1)}{(2m+2p-2)(2m+2p)}, \end{aligned} \tag{87}$$

$$F_{n,p} = -\frac{3C_{n,p}+5D_{n,p}}{2m+2p-2}+\frac{(2m+2p-1)D_{n,p}}{(2m+2p-2)(2m+2p)}. \tag{88}$$

4 求解基态波函数

我们得到了 $W_n(z)$ 的通式, 就可以根据势的形不变特性求出相应的激发态波函数 Θ_0. 因为

$$W = W_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sinh z\sum_{k=1}^{[n/2]} a_{n,k}\mathrm{sech}^{2k+1}z + \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} b_{n,k}\mathrm{sech}^{2k}z\right]\beta^n. \tag{89}$$

所以基态波函数 Θ_0 为

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= N\exp\left[-\int W\,\mathrm{d}z\right] = N\exp\left[-\int W_0\,\mathrm{d}z - \sum_{n=1}^{\infty}\int W_n\,\mathrm{d}z\right] \\ &= N\exp\left[-\int W_0\,\mathrm{d}z - \sum_{n=1}^{\infty}\int\left[\sinh z\sum_{k=1}^{[n/2]} a_{n,k}\mathrm{sech}^{2k+1}z + \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} b_{n,k}\mathrm{sech}^{2k}z\right]\beta^n\,\mathrm{d}z\right] \\ &= N\mathrm{ch}^m z\exp[-3\mathrm{z}/2]\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{[n/2]} a_{n,k}\frac{\mathrm{sech}^{2k}z}{2k} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} b_{n,k}Q(k,z)\right]\beta^n. \end{aligned} \tag{90}$$

其中, $Q(k,z)$ 为

$$\begin{aligned} Q(k,z) &= \int \mathrm{sech}^{2k}z\,\mathrm{d}z = \int \cosh^{-2k}z\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\sinh z}{k}\sum_{i=0}^{k-1} I(k,i)\cosh^{-2k+2i+1}z. \end{aligned} \tag{91}$$

上式中 $I(k,i)$ 为

$$\begin{aligned} I(k,i) &= \frac{2^i k(k-1)(k-2)\cdots(k-i)}{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\cdots(2k-2i-1)} \\ &= \frac{k(2k-2)(2k-4)\cdots(2k-2i)}{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\cdots(2k-2i-1)} \end{aligned} \tag{92}$$

此时, 特征值为

$$E = E_{0,0;m} + \sum_{n=1}^{\infty}\beta^n E_{0,n;m} = m^2+m-\frac{15}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n E_{0,n;m}. \tag{93}$$

其中, $E_{0,n;m}$ 由 (62) 式给出. 为了与文献 [19] 对比, 我们必须把基态波函数在化成 θ 的函数形式. 这可以由变换 $\mathrm{sech}z=\sin\theta, \tanh z=-\cos\theta, \sinh z=-\cot\theta, \exp(-z)=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ 得到

$$\Theta_0 = N\frac{(1-\cos\theta)^3}{\sin^{m-3/2}\theta}\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{[n]/2} a_{n,k}\frac{\sin^{2k}\theta}{2k} + \cos\theta\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} b_{n,k}\sum_{i=0}^{k-1} I(k,i)\sin^{2k-2i-2}\theta\right]\right]\beta^n. \tag{94}$$

从公式 [17]

$$\begin{aligned} P(2m+1,\theta) &= \int sin^{2m+1}\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{\cos\theta}{2m+2}\left[\sum_{k=0}^{m} I(2m+1,k)\sin^{2m-2k}\theta\right], \end{aligned} \tag{95}$$

这里

$$I(2m+1,k)=\frac{(2m+2)(2m)\cdots(2m+2-2k)}{(2m+1)(2m-1)\cdots(2m-2k+1)}, \tag{96}$$

得到

$$\begin{aligned}P(2m-1,\theta)&=\int\sin^{2m-1}\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=-\frac{\cos\theta}{2m}\left[\sum_{k=0}^{m}I(2m-1,k)\sin^{2m-2k-2}\theta\right].\end{aligned} \tag{97}$$

对比 (91), (93), (95) 和 (97), 可得

$$\varTheta_0=N\frac{(1-\cos\theta)^3}{\sin^{m-3/2}\theta}\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{[n]/2}a_{n,k}\frac{\sin^{2k}\theta}{2k}-\cos\theta\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}b_{n,k}P(2m-1,\theta)\right]\beta^n.\right. \tag{98}$$

文献 [19] 中

$$\varTheta_0=N\frac{(1-\cos\theta)^3}{\sin^{m-3/2}\theta}\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{[n]/2}-a_{n,k}\frac{\sin^{2k}\theta}{2k}-\cos\theta\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}b_{n,k}P(2m-1,\theta)\right]\beta^n.\right. \tag{99}$$

注意文献 [19] 中的 $a_{n,k}$ 跟本文中 $a_{n,k}$ 互为相反数, 所以两者的结果是一样的. 虽然我们超势的形式及获得方式与文献 [19] 不同, 但是, 与文献 [19] 对比, 可知 $\varTheta_0(\theta)$ 与 $E_{0;m}$ 完全一样, 这也间接的验证了本文正确性.

5 结 论

本文中, 我们利用超对称量子力学这种新的方法来试探的求解广义椭球函数, 为以后对广义椭球函数的深入研究做了很好的铺垫. 文章中我们推导出了超势的通式, 并且用数学归纳法证明了此通式的正确性, 并求出了基态的能量本征值和本征函数.

[1] Teukolsky S 1972 *Phys. Rev. Lett.* **29** 1114

[2] Teukolsky S 1973 *Astrophys. J.* **185** 635

[3] Emanuele Berti, Vitor Cardoso, Marc Casals 2006 *Phys. Rev.* D **73** 024013

[4] Leaver E 1986 *J. Math. Phys.* **27** 1238

[5] Breuer R, Ryan Jr, Waller S 1977 *Proc. R. Soc. London* A **358** 71

[6] Press W, Teukolsky S 1973 *Astrophys. J.* **185** 649

[7] Fackerell E, Grossman R 1977 *J. Math. Phys.* (N.Y.) **18** 1849

[8] Ryuichi Fujita, Hideyuki Tagoshi 2004 arXiv:gr-qc/0410018 v1 5

[9] Tian G H 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 030308

[10] Tian G H, Zhong S Q 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 040305

[11] Tian G H, Zhong S Q. Arxiv: 2009, 0906.4687 V3

[12] Tian G H, Zhong S Q 2010 *Sci. Chin.* G **54** 393

[13] Tang W L, Tian G H 2011 *Chin. Phys.* B **20** 010304

[14] Tang W L, Tian G H 2011 *Chin. Phys.* B **20** 050301

[15] Tian G H 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 3013

[16] Li K, Sun Y, Tian G H, Tang W L 2011 *Science in China* **41** 729 (in Chinese) [李凯, 孙越, 田贵花, 唐文林 2011 中国科学 G **41** 729]

[17] Sun Y, Tian G H, Dong K 2011 *Chin. Phys.* B **20** 061101

[18] Dong K, Tian G H, Sun Y 2011 *Chin. Phys.* B **20** 071101

[19] Dong K, Tian G H 2011 “Study of the Spin-weighted Spheroidal Wave Equation in the Case of $s=3/2$”, Preprint

[20] Cooper F, Khare A, Sukhatme U 1995 *Phys. Rep.* **251** 268

[21] Gradsbteyn I S, Ryzbik L M 2000 *Table of integrals, series, and products.* 6th ed. Singapore: Elsevierpte. Ltd

Solving the spheroidal wave equation with $s = 3/2$ by super-symmetric quantum mechanic

Guo Wei-Qi† Tian Gui-Hua Dong Kun

(*School of Science, Beijing University of Posts And Telecommunications, Beijing* 100876, *China*)

(Received 26 September 2011; revised manuscript received 6 November 2011)

Abstract

In the paper, we use the method of super-symmetric quantum mechanics to study the spin-weighted spheroidal wave equation in the case of $s = 3/2$. We first change the equation into Schrödinger's form, then calculate and derive the first four terms concerning E and super-potential W. we summarize the general formula of super-potential W_n and use mathematical induction to prove its correctness. In turn, this completely gives all the information about the ground eigenvalue and eigenfunction.

Keywords: spin-weighted spheroidal wave equation, super-symmetric quantum mechanics, super-potential, exited state wave functions

PACS: 11.30.Pb, 03.65.Ge, 02.03.Gp

† E-mail: gwqkyr@126.com