# 平行板微管道间 Maxwell 流体的高 Zeta 势周期电渗流动*

长龙[1)2)] 菅永军[1)†]

1) ( 内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021 )

2) ( 内蒙古财经学院统计与数学学院, 呼和浩特 010051 )

( 2011 年 7 月 12 日收到; 2011 年 10 月 10 日收到修改稿 )

本文研究了两平行板微管道中线性黏弹性流体的周期电渗流动, 其中线性黏弹性流体的本构关系是由广义 Maxwell 模型描述的. 将电渗力作为体力, 解析求解了非线性的 Poisson-Boltzmann (P-B) 方程, 柯西动量方程和广义 Maxwell 本构方程. 通过数值计算, 分析了无量纲壁面 Zeta 势 $\bar{\psi}_0$、周期电渗流 (electroosmotic flow, EOF) 振荡雷诺数 $Re$ 和无量纲弛豫时间 $\lambda_1\omega$ 对速度剖面的影响. 结果表明: 对给定的电动宽度 $K$(表示微管道的特征尺度与双电层厚度的比值)、弛豫时间 $\lambda_1\omega$ 和振荡雷诺数 $Re$, 高 Zeta 势 $\bar{\psi}_0$ 产生较大的 EOF 速度振幅, 并且速度剖面的变化主要集中在双电层 (electric double-layer, EDL) 的狭窄的区域. 此外, 随着弛豫时间的增长流体的弹性显著增加, 速度的变化可以延伸到整个流动的区域中. 对给定的雷诺数 $Re$, 较长的弛豫时间 $\lambda_1\omega$ 导致 EOF 速度剖面较快的变化, 且速度剖面的振幅逐渐增大.

**关键词**: EDL, 周期 EOF, 广义 Maxwell 流体, 平行板间微管道

**PACS:** 47. 61.−k, 47.50.−d, 47.57.jd, 02.60.−x

## 1 引 言

微流体设备在微电子系统 (micro electro mechanical systems, MEMS) 和生物传感器领域, 如芯片实验室 (lab-on-a-chip)[1,2], 有很重要的应用. 当电解质与微管道管道壁相互接触时, 就会引起壁面与电解质之间的电荷交换. 这依赖于微管道的化学成分和电解质在表面的化学反应过程. 表面的电荷通过影响流体中阴离子和阳离子的分布导致了 EDL 的形成. 带正电的离子很快地聚集在壁面附近, 形成了只有一个典型离子直径厚度的 stern 层. 紧贴着 stern 层, 形成了即含有阳离子又含有阴离子的 diffuse 层, 并且它的离子密度分布满足 Boltzmann 分布. 当外加电场沿带电表面切线方向时, 在 EDL 中的离子将会受到库仑力的作用而运动. 这时由于流体黏性的作用, 可以移动的 (自由) 离子将会带动附近流体微团运动, 最终形成了 EOF. 现在 EOF 被广泛地用于生物、化学和制药领域.

在各种几何形状的微管中, 如平行板管道 [3]、圆柱状微管 [4]、环形区域管道 [5,6]、椭圆形管道 [7]、矩形微管道 [8,9]、T 形 [10] 和半圆形混合截面微管道 [11], 完全发展的微管道牛顿流体 EOF 在理论与实验方面已有很多研究. 然而, 这种定常 EOF 现象要求较高电压和较大场强, 这有可能给实验条件带来诸多困难.

最近, 与时间有关的 EOF 作为一个微流体力学驱动机理引起了越来越多学者的注意. Dutta 和 Beskok[12] 最早用解析的方法来探讨两个平行板之间周期 EOF. 他们阐述了两平行板间周期 EOF

* 国家自然科学基金 (批准号: 11062005), 教育部高等学校博士学科点专项基金 (批准号: 20111501120001), 非线性力学国家重点实验室开放基金, 内蒙古自治区自然科学基金 (批准号: 2010BS0107), 内蒙古大学学科带头人科研启动基金 (批准号: Z20080211), 内蒙古自治区自然科学基金重点项目 (批准号: 2009ZD01) 和内蒙古财经学院重点项目资助的课题.

† E-mail: jianyongjun@yahoo.com.cn

 

和斯托克斯第二问题之间的异同点. 在不要求薄的 EDL 厚度假设下, Keh 和 Tseng[13] 研究了瞬时一维微管道中的电动流动, 给出了微管道中电渗流速度和瞬时流率的解析表达式. 通过运用格林函数的方法, Kang 等人 [14] 解析给出了随时间变化的外加电场作用下微管中的瞬时 EOF 速度场. 对于矩形微管道中的周期 EOF 流动, Wang 等人 [15] 给出了半解析解. 他们发现, 周期 EOF 的速度强烈地依赖于振荡雷诺数、EDL 的属性和外加电场. Chakraborty 和 Ray[16] 研究了圆形微管道中质量流率的控制问题. 最近, 对于周期 EOF 带有重合 EDL 的广义模型由 Chakraborty 和 Srivastava[17] 提出. 他们拓展了 Qu 和 Li[18] 的关于重合 EDL 的研究成果. 最近, Jian 等人 [19] 得到了环形微管道中周期 EOF 速度分布的解析解. 他们讨论了两种极限的情况, 即平行板之间和圆形微管中的周期 EOF.

以上所有提及的研究考虑的都是牛顿流体. 但微流体设备经常被用来分析生物流体, 这些流体经常是长链分子的溶液. 正是由于这些长链分子使得流体呈现出一些非牛顿流体的性质, 例如可以变化的黏性、记忆效应、法线应力效应、屈服应力以及迟滞流体属性. 为了描述非牛顿流体在微管道内的流动特点, 首先应该给出合适的本构关系来表征动力学黏性和剪切变化率之间联系, 然后用更广义的柯西动量方程来描述非牛顿流体的运动. 非牛顿流体的电渗流动在理论上的研究较少, 原因主要是流体本身复杂的本构关系带来的解析上的困难, 且这方面的研究主要限制在一些简单的非牛顿流体模型上.

Das 和 Chakrabotry[20,21] 研究了非牛顿的非弹性幂律流体的定常 EOF 流动. 同样的流体模型被 Zhao 等人 [22] 运用于微管道狭缝中的定常 EOF 方面的研究当中. 他们获得了依赖于幂律指数 $n$ 的速度剖面的解析表达式. Vasu 和 De[23] 研究了高 Zeta 电势矩形微管道中幂律流体的 EOF 问题. Zhao 和 Yang[24] 得到了在任意 Zeta 势的壁面上, 幂律流体 EOF 的广义 Smoluchowski 速度. Tang 等人 [25] 运用格子 Boltzmann 方法模拟了微管道中幂律流体 EOF 的流动. Wang 等人 [26] 数值模拟了变 Zeta 势情况下毛细管接口电渗流场, 说明 Zeta 势的变化将极大地影响流场的速度和压力分布. Zhang 等人 [27] 利用有限差分法对电渗驱动微通道中脉冲样品的浓度扩散进行了数值模拟. Lin 等人 [28] 利用控制体有限差分法对非均匀微通道不同表面势的混合样品进行了数值分析. 在文献 [29] 中, Liu 和 Jian 等人讨论了平行板微管道中黏弹性流体的周期 EOF 问题. 应用线性化的 P-B 方程, 他们首次得到了平行板微管道中线性黏弹性流体 —— 广义 Maxwell 模型的解析解, 并给出了无量纲化速度剖面的解析表达式. 同样的流体模型 Jian 等人 [30] 在矩形微管道中研究了非定常 EOF, 他们获得了广义 Maxwell 模型的速度剖面的解析表达式. 此外 Jian 等人 [31] 在圆形微管道中研究了 Jeffreys 流体的 EOF. 考虑了微管道附近的聚合物大分子的排斥效应, 将流动区域分为两层. 给出了速度剖面解析表达式.

在实际的工程应用中, 大多数固 - 液界面上的表面静电势都高于 25mV, 应用线性化的 P-B 方程一般是不符合实际情况的. 本文推广了文献 [29] 的结果, 将保留非线性 P-B 方程, 研究平行板微管道中线性黏弹性流体 —— 广义 Maxwell 模型的周期 EOF. 给出 EOF 速度的半解析解表达式, 并对结果进行了数值计算.

## 2 公式推导和解析解

如图 1 所示, 考虑两板间距为 $2H$、带负电荷的平行微管道中不可压缩广义 Maxwell 流体的非定常 EOF. 微管道的长度为 $L$, 宽度为 $W$. 假设这两个参数远远大于微管道的高度, 即 $L, W \gg 2H$. 建立二维坐标系, 令 $x$ 轴 $y$ 轴相互垂直并且分别与带电平面相切. 同时, 我们规定下板位于 $y=-H$ 处, 上板位于 $y=H$ 处. 电解质溶液与固体壁面之间的化学相互作用产生了 EDL. EDL 是一层非常薄的位于固体 - 液体界面上的带电流体层. EOF 流动是被沿轴线方向施加的场强为 $E_0$ 的交流电场所驱动. 由于几何形体上的对称性, 我们仅对于管道的上半部分进行研究. 若忽略沿 $x$ 方向的压力梯度, 那么一维的柯西动量方程可以表示为

$$\rho \frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \rho_{\mathrm{e}}(y) E_x(t), \tag{1}$$

其中, $u(y,t)$ 表示沿 $x$ 轴方向的速度分量, $\rho$ 是流体的密度, $t$ 表示时间, $\tau_{yx}$ 表示应力张量, $\rho_{\mathrm{e}}(y)$ 表示电荷体密度, $E_x(t)$ 表示交流电场. 对于广

义 Maxwell 流体, 本构关系满足如下关系 [32]:

$$\tau_{yx} = -\int_{-\infty}^{t} \frac{\eta_0}{\lambda_1} \exp[-\frac{(t-t')}{\lambda_1}] \frac{\partial u(y,t')}{\partial y} \mathrm{d}t', \quad (2)$$

其中 $\lambda_1$ 表示流体的弛豫时间, $\eta_0$ 是零剪切率黏度. 在 (2) 式中, $t$ 时刻的应力依赖于先前时刻 $t'$ 的速度梯度. 然而, 由于本构关系中被积函数是指数函数, 所以距离 $t$ 近的 $t'$ 时刻的状态对结果的影响最大. 因此, 流体对于近期的 "记忆" 强于它对以前时刻的 "记忆". 这种现象称为 "衰退记忆" 效应 [32]. 将 (2) 式代入 (1) 式得到

$$\rho \frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{t} \frac{\eta_0}{\lambda_1} \exp\left[-\frac{(t-t')}{\lambda_1}\right] \frac{\partial^2 u(y,t')}{\partial y^2} \mathrm{d}t' + \rho_{\mathrm{e}}(y) E_x(t). \quad (3)$$

假设交流电场和周期 EOF 的速度可以写成如下的复函数形式

$$u(y,t) = \Re u_0(y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega \mathrm{t}}, \quad E_x(t) = \Re E_0 \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega \mathrm{t}}, \quad (4)$$

式中, $\Re\{\}$ 表示周期 EOF 函数的实数部分, $\omega$ 表示交流电场的振荡角频率. 将 (4) 式代入 (3) 式后, 在等式两边同时除以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, 去掉实部符号, 得到

$$\rho \mathrm{i}\omega u_0(y) = \frac{\mathrm{d}^2 u_0(y)}{\mathrm{d}y^2} (\frac{\eta_0}{1+\mathrm{i}\lambda_1 \omega}) + \rho_{\mathrm{e}}(y) E_0. \quad (5)$$

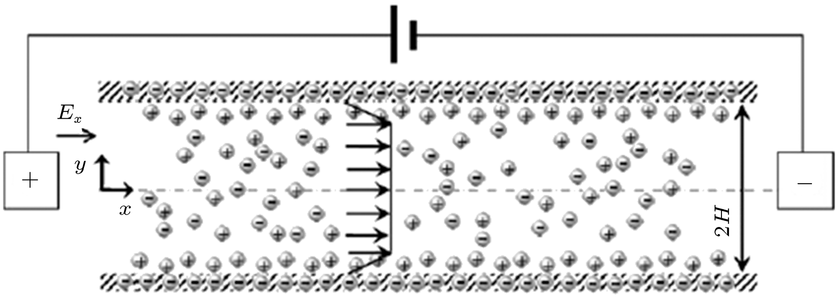


图 1 微管道中广义 Maxwell 流体的时间周期 EOF 流的示意图

根据静电学理论, 电势 $\psi$ 和单位体积的静电荷密度 $\rho_{\mathrm{e}}(y)$ 之间的关系可由 P-B 方程描述

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\rho_{\mathrm{e}}(y)}{\varepsilon}, \quad (6a)$$

$$\rho_{\mathrm{e}} = -2n_0 z_\nu e \sinh \frac{z_\nu e \psi}{k_{\mathrm{B}} T}, \quad (6b)$$

式中 $\varepsilon$ 是电解质溶液的介电常数, $n_0$ 是液体离子浓度, $z_\nu$ 是电荷化合价, $e$ 是电子所带的电荷量, $k_{\mathrm{B}}$ 是 Boltzmann 常数, $T$ 是绝对温度. 代方程 (6b) 到 (6a), 得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{2n_0 z_\nu e}{\varepsilon} \sinh\left(\frac{z_\nu e \psi}{k_{\mathrm{B}} T}\right). \quad (7)$$

它对应的边界条件为

$$\psi|_{y=H} = \psi_0, \quad (8a)$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y}|_{\mathrm{y}=0} = 0, \quad (8b)$$

式中 $\psi_0$ 为壁面的 Zeta 电势. 引入无量纲变量

$$\bar{\psi} = \frac{ze\psi}{k_{\mathrm{B}}T}, \quad \bar{\psi}_0 = \frac{ze\psi_0}{k_{\mathrm{B}}T},$$

$$\bar{y} = \frac{y}{H}, \quad K = \kappa H,$$

其中

$$\kappa = \left(\frac{2n_0 z_\nu^2 e^2}{\varepsilon k_{\mathrm{B}} T}\right)^{1/2}, \quad (9)$$

上式中, $\kappa$ 称为 Debye-Hückel 参数, 其倒数 $1/\kappa$ 具有长度因次, 代表 EDL 的厚度, 称为 Debye 长度. $K$ 称作无量纲的电动宽度, 它表征微管道的半宽度与 Debye 长度的比值. 将 (9) 代入 (7),(8) 式, 得到无量纲 P-B 方程和相应的边界条件

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} = K^2 \sinh \bar{\psi}, \quad (10)$$

$$\bar{\psi}|_{\bar{y}=1} = \bar{\psi}_0, \quad (11a)$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\psi}}{\mathrm{d}\bar{y}}|_{\bar{y}=0} = 0. \quad (11b)$$

求解问题 (10) 和 (11), 最终求得电场势和电荷密度分布

$$\bar{\psi} = 2\ln\Bigg[\left(1 + \mathrm{e}^{K(\bar{y}-1)} \tanh\frac{\bar{\psi}_0}{4}\right)$$

$$\Bigg/\left(1-\mathrm{e}^{K(\bar{y}-1)}\tanh\frac{\bar{\psi}_0}{4}\right)\Bigg], \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{e}} &= -2n_0 z_\nu e\sinh\bar{\psi}\\ &= -\kappa^2\varepsilon\frac{k_{\mathrm{B}}T}{z_\nu e}\sinh\bar{\psi}.\end{aligned} \tag{13}$$

事实上, 由于电荷密度分布达到稳定状态的时间非常短, 故 Debye 层上的电荷分布不会受到随时间变化的 EOF 的影响. 将 (13) 式代入 (5) 式, 得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2u_0(y)}{\mathrm{d}y^2}-\left[\frac{\mathrm{i}\rho\omega(1+\mathrm{i}\lambda_1\omega)}{\eta_0}\right]u_0(y)\\ =&\varepsilon k^2\frac{k_{\mathrm{B}}T}{z_\nu e}E_0\sinh\bar{\psi}\frac{(1+\mathrm{i}\lambda_1\omega)}{\eta_0},\end{aligned} \tag{14}$$

此方程的边界条件如下:

$$u_0(y)|_{y=H}=0, \tag{15a}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_0(y)}{\mathrm{d}y}|_{y=0}=0. \tag{15b}$$

引入一组无量纲参数

$$\begin{aligned}\bar{u}_0(\bar{y}) &= \frac{u_0(y)}{U_{\mathrm{eo}}},\\ U_{\mathrm{eo}} &= -\frac{\varepsilon\psi_0 E_0}{\eta_0},\\ Re &= \frac{\rho\omega H^2}{\eta_0},\end{aligned} \tag{16}$$

上式中, $U_{\mathrm{eo}}$ 表示牛顿流体稳定的 Helmholtz-Smoluchowski EOF 速度, $Re$ 是电振荡雷诺数. 运用等式 (16), 方程 (14) 和相应的边界条件 (15) 可无量纲化为如下形式:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}_0(\bar{y})}{\mathrm{d}\bar{y}^2}-[\mathrm{i}Re(1+\mathrm{i}\lambda_1\omega)]\bar{u}_0(\bar{y})\\ =&-\frac{K^2}{\bar{\psi}_0}\sinh\bar{\psi}(1+\mathrm{i}\lambda_1\omega),\end{aligned} \tag{17}$$

$$\bar{u}_0(\bar{y})|_{\bar{y}=1}=0, \tag{18a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}_0(\bar{y})}{\mathrm{d}\bar{y}}|_{\bar{y}=0}=0. \tag{18b}$$

等式 (17) 是一个关于复函数 $\bar{u}_0(\bar{y})$ 的二阶非齐次的偏微分方程, 设系数

$$\mathrm{i}Re(1+\mathrm{i}\lambda_1\omega)=(\alpha+\mathrm{i}\beta)^2, \tag{19}$$

其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 是实数, 它们由下面的等式给出:

$$\alpha=\sqrt{\frac{Re}{2}}\left[\sqrt{1+(\lambda_1\omega)^2}-\lambda_1\omega\right]^{1/2}, \tag{20a}$$

$$\beta=\sqrt{\frac{Re}{2}}\left[\sqrt{1+(\lambda_1\omega)^2}+\lambda_1\omega\right]^{1/2}. \tag{20b}$$

方程 (17) 的通解用常数变易法给出, 最终形式为

$$\begin{aligned}\bar{u}_0(\bar{y}) =&\left\{\int_0^{\bar{y}}\left[-\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)}{2\mathrm{i}Re}\cdot\frac{K^2}{\bar{\psi}_0}\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{i}\beta)\bar{y}'}\right.\right.\\ &\left.\left.\times\sinh\bar{\psi}'\right]\mathrm{d}\bar{y}'+C_1\right\}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)\bar{y}}\\ &+\left\{\int_0^{\bar{y}}\left[\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)}{2\mathrm{i}Re}\cdot\frac{K^2}{\bar{\psi}_0}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)\bar{y}'}\right.\right.\\ &\left.\left.\times\sinh\bar{\psi}'\right]\mathrm{d}\bar{y}'+C_2\right\}\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{i}\beta)\bar{y}},\end{aligned} \tag{21}$$

上式中 $\sinh\bar{\psi}'$ 表示 $\sinh\bar{\psi}$ 中的 $\bar{y}$ 换为 $\bar{y}'$. 初始条件 (18) 代入方程 (21), 则常数 $C_1$ 和 $C_2$ 可表示为

$$\begin{aligned}C_1 =C_2 =& \frac{K^2(\alpha+\mathrm{i}\beta)}{2\mathrm{i}Re\bar{\psi}_0[\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)}+\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{i}\beta)}]}\\ &\times\left\{\int_0^1\left[\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)(1-\bar{y})}-\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)(\bar{y}-1)}\right]\right.\\ &\left.\times\sinh\bar{\psi}\mathrm{d}\bar{y}\right\}.\end{aligned} \tag{22}$$

## 3 结果与讨论

尽管上述结果是由无量纲参数来给出的, 但在实际的工程问题中仍然需要指出一些典型的有量纲参数的取值. 在以下的计算中, 典型参数的取值如下 [33,34]: $\rho=10^3$ kg·m$^{-3}$, $\eta_0=10^{-3}$ kg·m$^{-1}$s$^{-1}$, $H=100$ μm, 壁面 Zeta 势 $\Psi_0$ 的变化范围认为 −25 mV 到 −250 mV. 同时, 外加电场频率的变化范围是从 0 到 1.6 kHz, 与之对应的角频率 $\omega$ 的变化范围是从 0 到 $10^4$s$^{-1}$. 因此, 雷诺数 $Re$ 可以从 0 到 100 之间取值. 壁面无量纲 Zeta 势 $\bar{\psi}_0$ 的变化范围为 −1 到 −10. 根据文献 [32], 弛豫时间 $\lambda_1\omega$ 的取值很广泛, 在本文中的取值范围定为 $10^{-4}$ s 到 $10^3$ s.

对现存的数值积分方法, 梯形求积公式和 Simpson 求积公式虽然计算简单、使用方便, 但是精度较差. 高斯型求积公式的精度较高, 但因其节点不规则, 且节点增加时, 前面计算的函数值不能为后面所用, 计算时还要预先存入不同的节点值和系数表, 故较少使用. 利用二分技术得到的 Romberg 方法的算法简单, 易于编程实现.

当节点加密提高积分近似程度时, 前面计算的结果可以为后面所用, 对减少计算量很有好处, 并有比较简单的误差估计. 因此 (21) 式用 Romberg 数值积分计算, 当 $K = 20$, 给定的弛豫时间 $\lambda_1\omega$ (0.5 和 3.5), 图 2 和图 3 分别给出了在不同的 Zeta 势 $\bar{\psi}_0$ ($-1.0$, $-5.0$, $-7.0$ 和 $-10$) 下, 不同的振荡雷诺数 $Re$ (3, 10, 30 和 100) 对应的广义 Maxwell 流体的半管道 EOF 速度剖面. 从图 2 中可以看出, 对于较短的弛豫时间 $\lambda_1\omega$, 速度的变化被限制在紧贴 EDL 的狭窄区域. 对于较长的弛豫时间 $\lambda_1\omega$, 如图 3, EOF 速度变化扩展到整个区域. 产生这种现象的原因是较长的弛豫时间 $\lambda_1\omega$ 意味着较大的弹性效应和较小的恢复能力. 由于广义 Maxwell 的 "衰退记忆" 现象, 对于给定的振荡雷诺数, 增加弛豫时间 $\lambda_1\omega$ 导致 EOF 的速度剖面在外加电场的作用下更加容易变化. 因此, 从图 3 中我们可以看到速度剖面更快速地变化. 此外, 从图 2 和图 3 可以看出, 对给定的电动宽度 $K$, 振荡雷诺数 $Re$ 和弛豫时间 $\lambda_1\omega$, 增加壁面 Zeta 势使得流体的 EOF 速度振幅变大.

从图 2 和图 3 还可以看出, 对于给定的弛豫时间 $\lambda_1\omega$, 增加振荡雷诺数 $Re$ 将会导致 EOF 速度剖面的快速变化. 产生这种现象的原因是耗散时间尺度远远长于振动周期. 因此, 流体的运动没有足够的时间扩散到微管道的两壁面中间的平面, 并且 EOF 的速度变化被限制在紧贴两固体壁面的薄层中.

图 4 给出了在不同的弛豫时间 $\lambda_1\omega$(0,2 和 4) 下, 不同的振荡雷诺数 $Re$ (0.1 和 50), 不同壁面 Zeta 势情况下广义 Maxwell 流体的 EOF 速度剖面分布. 当 $\lambda_1\omega = 0$ 时, 表示牛顿流体的速度剖面. 从图 4 中可以看出牛顿流体和 Maxwell 流体 ($\lambda_1\omega = 2$ 和 4) 之间的速度振幅的差异是明显的. 因此研究 Maxwell 流体在微通道中的 EOF 是非常必要的. 从图 4 中还可以看出, 对于较低的振荡雷诺数 $Re$ 和较短的弛豫时间 $\lambda_1\omega$, 经典的 Helmholtz-Smoluchowski 速度剖面会出现 (图 4(a), (c)). 高 Zeta 势对应的速度剖面图振幅较大.

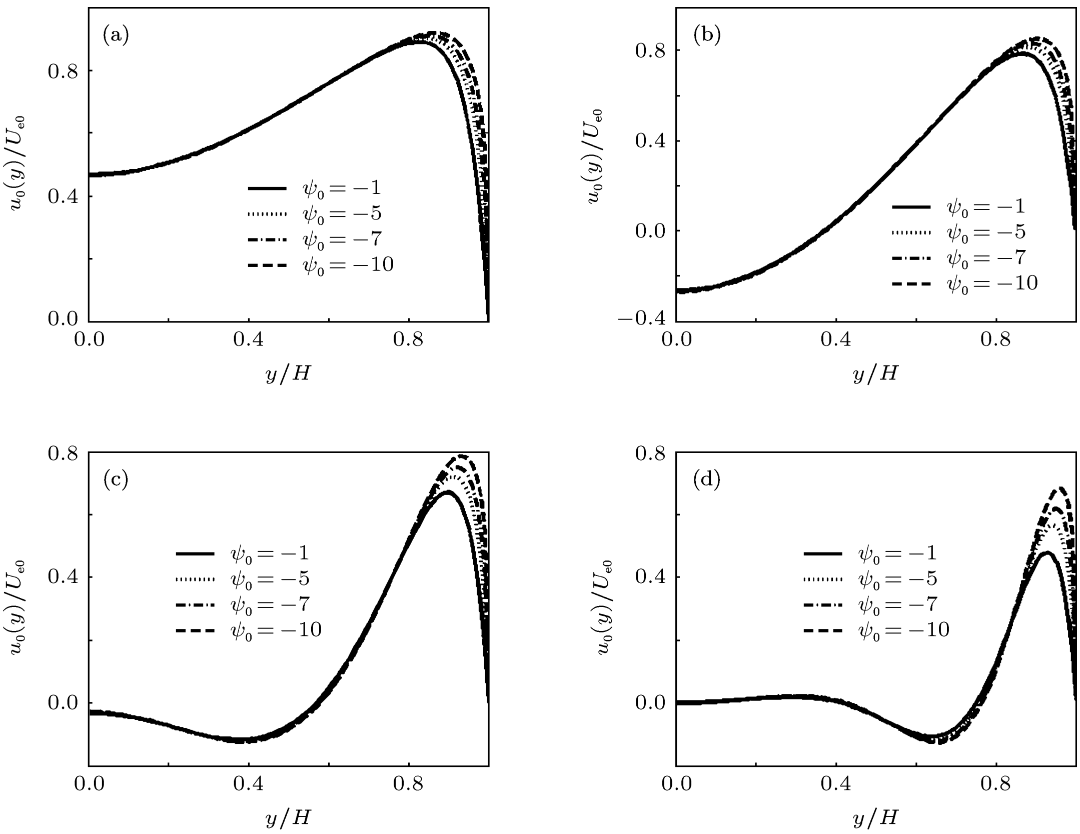


图 2 不同 $Re$ 和 $\bar{\psi}_0$ 时无量纲 EOF 速度的剖面图 ($K = 20$, $\lambda_1\omega = 0.5$) (a) $Re = 3$; (b) $Re = 10$; (c) $Re = 30$; (d) $Re = 100$

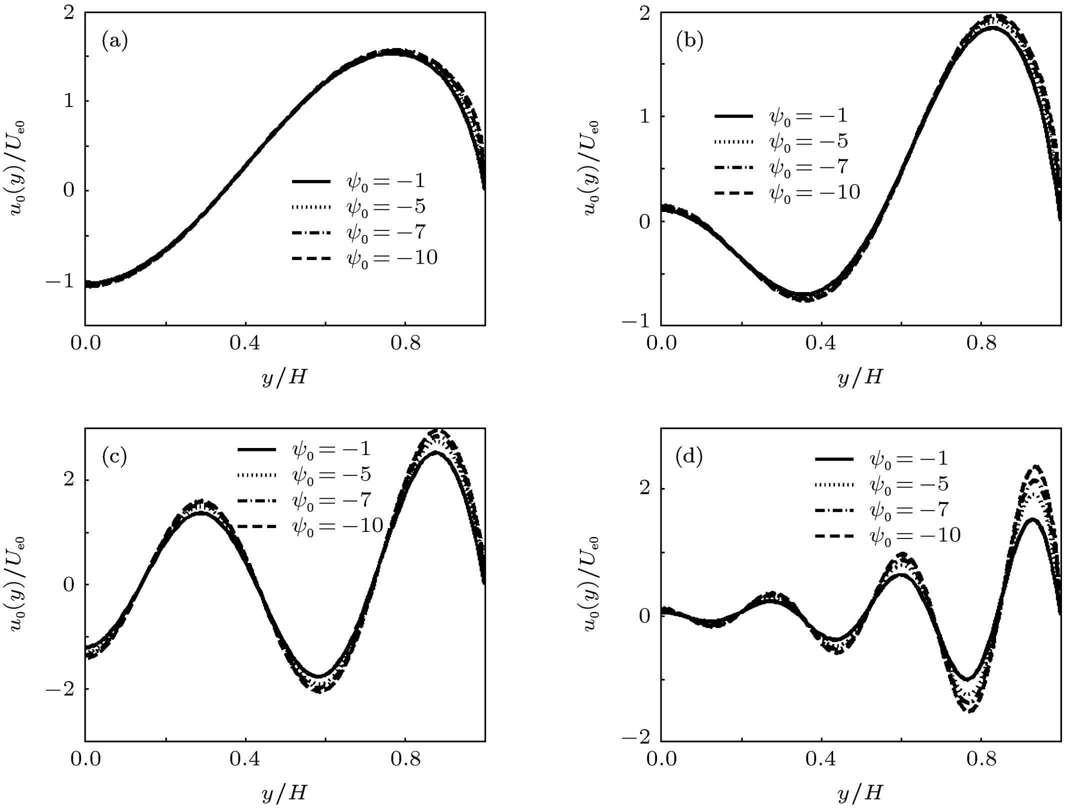


图 3 不同 $Re$ 和 $\bar{\psi}_0$ 时无量纲 EOF 速度的剖面图 ($K = 20, \lambda_1\omega = 3.5$) (a) $Re = 3$; (b) $Re = 10$; (c) $Re = 30$; (d) $Re = 100$

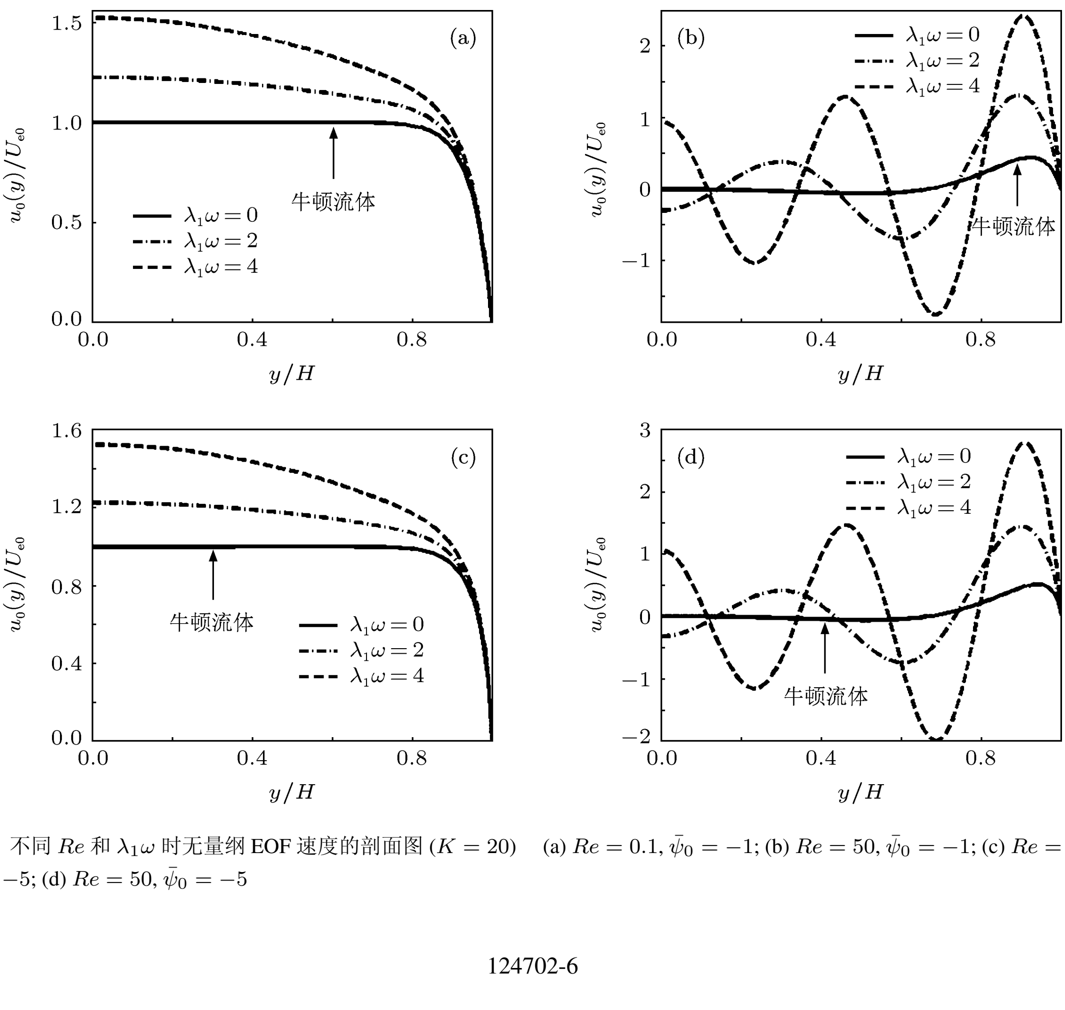


图 4 不同 $Re$ 和 $\lambda_1\omega$ 时无量纲 EOF 速度的剖面图 ($K = 20$) (a) $Re = 0.1, \bar{\psi}_0 = -1$; (b) $Re = 50, \bar{\psi}_0 = -1$; (c) $Re = 0.1$, $\bar{\psi}_0 = -5$; (d) $Re = 50, \bar{\psi}_0 = -5$

## 4 结 论

本文研究了平行板微管道中广义 Maxwell 流体的周期 EOF. 运用分离变量及常数变易法, 通过求解非线性的 P-B 方程、柯西动量方程和广义 Maxwell 本构方程, 我们获得周期 EOF 速度剖面的半解析解. 通过数值计算, 结果表明广义 Maxwell 流体的速度剖面强烈地依赖于无量纲壁面 Zeta 势 $\bar{\psi}_0$, 振动雷诺数 $Re$ 和弛豫时间 $\lambda_1\omega$, 并得出如下的结论:

1. 对于给定的弛豫时间 $\lambda_1\omega$, 增加振荡雷诺数 $Re$ 将会导致 EOF 速度剖面的快速变化.

2. 对于给定的振荡雷诺数 $Re$, 增加弛豫时间 $\lambda_1\omega$ 导致 EOF 的速度剖面在外加电场的作用下更加容易变化.

3. 对于给定的振荡雷诺数 $Re$, 弛豫时间 $\lambda_1\omega$, 电动宽度 $K$, 增加壁面 Zeta 势 $\bar{\psi}_0$ 会导致速度剖面振幅变大, 进而说明了采用线性化的 P-B 方程会引起很大的误差.

4. 对于较低的振荡雷诺数 $Re$ 和较短的弛豫时间 $\lambda_1\omega$, 经典 Helmholtz-Smoluchowski 的 EOF 速度剖面会出现.

[1] Stone H A, Stroock A D, Ajdari A 2004 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **36** 381
[2] Bayraktar T, Pidugu S B 2006 *Int. J. Heat Mass Transfer* **49** 815
[3] Burgreen D, Nakache F R 1964 *J. Phys. Chem.* **68** 1084
[4] Levine S, Marriott J R, Neale G, Epstein N 1975 *J. Colloid Interface Sci.* **52** 136
[5] Tsao H K 2000 *J. Colloid Interface Sci.* **225** 247
[6] Kang Y J, Yang C, Huang X Y 2002 *J. Colloid Interface Sci.* **253** 285
[7] Hsu J P, Kao C Y, Tseng S J, Chen C J 2002 *J. Colloid Interface Sci.* **248** 176
[8] Yang C, Li D, Masliyah J H 1998 *Int. J. Heat Mass Transfer* **41** 4229
[9] Arulanandam S, Li D 2000 *Colloids Surf.* A: *Physicochem. Eng. Aspects* **161** 89
[10] Bianchi F, Ferrigno R, Girault H H 2000 *Anal. Chem.* **72** 1987
[11] Wang C Y, Liu Y H, Chang C C 2008 *Phys. Fluids* **20** 063105
[12] Dutta P, Beskok A 2001 *Anal. Chem.* **73** 5097
[13] Keh H J, Tseng H C 2001 *J. Colloid Interface Sci.* **242** 450
[14] Kang Y J, Yang C, Huang X Y 2002 *Int. J. Eng. Sci.* **40** 2203
[15] Wang X M, Chen B, Wu J K 2007 *Phys. Fluids* **19** 127101
[16] Chakraborty S, Ray S 2008 *Phys. Fluids* **20** 083602
[17] Chakraborty S, Srivastava A K 2007 *Langmuir* **23** 12421
[18] Qu W L, Li D Q 2000 *J. Colloid Interface Sci.* **224** 397
[19] Jian Y J, Yang L G, Liu Q S 2010 *Phys. Fluids* **22** 042001
[20] Das S, Chakraborty S 2006 *Anal. Chim. Acta* **559** 15
[21] Chakraborty S 2007 *Anal. Chim. Acta* **605** 175
[22] Zhao C, Zholkovskij E, Masliyah J H, Yang C 2008 *J. Colloid Interface Sci.* **326** 503
[23] Vasu N, De S 2010 *Colloids and Surfaces* A: *Physicochem. Eng. Aspects* **368** 44
[24] Zhao C, Yang C 2010 *Electrophoresis* **31** 973
[25] Tang G H, Li X F, He Y L, Tao W Q 2009 *J. Non-Newtonian fluid Mech.* **157** 133
[26] Wang R J, Lin J Z, Li Z H 2005 *Binmedical Microdevices* **7** 131
[27] Zhang K, Lin J Z, Li Z H 2006 *Appl. Math. Mech.* ( English Edition) **27** 575
[28] Lin J Z, Zhang K, Li H J 2006 *Chin. Phys.* **15** 2688
[29] Liu Q S, Jian Y J, Yang L G 2011 *J. Non-Newtonian fluid Mech.* **166** 478
[30] Jian Y J, Liu Q S, Yang L G 2011 *J. Non-Newtonian fluid Mech.* **166** 1304
[31] Jian Y J, Liu Q S, Duan H Z, Chang L, Yang L G 2011 *The Sixth International Conference on Fluid Mechanics (ICFM6)*, Guang Zhou, June 30-July 3, p616
[32] Bird R B, Stewart W E, Lightfoot E N 2001 *Transport phenomena, Second Edition* (New York: Wiley-Interscience Publication) p242
[33] Gong L, Wu J, Wang L, Cao K 2008 *Phys. Fluids* **20** 063603
[34] Goswami P, Chakraborty S 2009 *Langmuir* **26** 581

物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 61, No. 12 (2012) 124702

# Time periodic electroosmotic flow of the generalized Maxwell fluids between two micro-parallel plates with high Zeta potential*

Chang Long[1)2)] Jian Yong-Jun[1)†]

1) ( *School of Mechanical Science, Inner Mongolia University, Hohhot, Inner Mongolia* 010021, *China* )

2) ( *School of Mathematics and Statistics, Inner Mongolia Finance and Economics College, Hohhot, Inner Mongolia* 010051, *China* )

( Received 12 July 2011; revised manuscript received 10 October 2011 )

**Abstract**

In this study, semi-analytical solutions are presented for the time periodic electroosmotic flow (EOF) of linear viscoelastic fluids between micro-parallel plates. The linear viscoelastic fluids used here are described by the general Maxwell model. The solution involves analytically solving the nonlinear Poisson-Boltzmann (P-B) equation, the Cauchy momentum equation and the general Maxwell constitutive equation. By numerical computations, the influences of the dimensionless wall Zeta potential $\bar{\psi}_0$, the periodic EOF electric oscillating Reynolds number $Re$, and normalized relaxation times $\lambda_1\omega$ on velocity profiles are presented. Results show that for prescribed electrokinetic width $K$, relaxation time $\lambda_1\omega$ and oscillating Reynolds number $Re$, higher Zeta potential $\bar{\psi}_0$ will lead to larger amplitude of EOF velocity, and the variation of velocity is restricted to a very narrow region close to the electric double-layer (EDL). In addition, with the increase of relaxation time $\lambda_1\omega$, the elasticity of the fluid becomes conspicuous and the velocity variations can be expanded to the whole flow field. For prescribed $Re$, longer relaxation time $\lambda_1\omega$ will lead to quick change of the EOF velocity profile, and the amplitude becomes larger gradually.

**Keywords:** EDL, time periodic EOF, generalized Maxwell fluids, micro-parallel plates

**PACS:** 47.61.−k, 47.50.−d, 47.57.jd, 02.60.−x

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11062005), Ph. D. Programs Foundation of Ministry of Education of China (Grant No. 20111501120001), Opening Fund of State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, the Inner Mongolia Natural Science Foundation of China (Grant No. 2010BS0107), the research start up fund for excellent talents at Inner Mongolia University (Grant No. Z20080211), the support of Natural Science Key Fund of Inner Mongolia (Grant No: 2009ZD01), and the Key Programs of the Inner Mongolia Finances and Economic College.

† E-mail: jianyongjun@yahoo. com. cn