

弱电离尘埃等离子体层反射与透射的 SO-FDTD 方法分析*

李林茜¹⁾ 石雁祥^{1)†} 王飞²⁾ 魏兵²⁾

1) (新疆伊犁师范学院电子与信息工程学院, 伊宁 835000)

2) (西安电子科技大学理学院, 西安 710071)

(2011 年 10 月 10 日收到; 2011 年 11 月 2 日收到修改稿)

将弱电离尘埃等离子体复介电常数表示以 $j\omega$ 为自变量的分式多项式形式, 利用移位算子时域有限差分 (SO-FDTD) 方法, 给出了弱电离尘埃等离子体频域本构关系的时域形式. 推导了弱电离尘埃等离子体电磁特性的时域递推关系式. 用 SO-FDTD 方法计算了弱电离尘埃等离子体层的反射和透射系数, 分析了尘埃粒子浓度和尘埃粒子半径的变化对反射系数和透射系数的影响. 结果表明: 有尘埃粒子时的反射系数比没有尘埃粒子时反射系数小, 而透射系数要比没有尘埃粒子时的透射系数大; 当尘埃粒子浓度或尘埃粒子半径增大时, 其反射系数均减小.

关键词: 弱电离尘埃等离子体, SO-FDTD 方法, 反射系数, 透射系数

PACS: 52.27.LW, 52.40.Db, 52.65.-y

1 引言

尘埃等离子体物理是 20 世纪 90 年代兴起的等离子体物理的新分支. 它是在一般等离子体中考虑了尘埃粒子的充电作用的复杂等离子体. 分子浓度远大于带电粒子浓度的尘埃等离子体被称为弱电离尘埃等离子体. 由于在天体物理、航空航天、微波通信、微电子器件制造等一些重要的科学技术领域存在着大量的与尘埃等离子体有关的物理问题, 尘埃等离子体理论及相关的应用研究受到越来越普遍的重视^[1-7]. 由于尘埃粒子的充电作用, 尘埃等离子体的电磁特性与一般等离子体有很大的不同. 石雁祥等人研究了弱电离尘埃等离子体的电磁特性, 在忽略磁场作用的情况下, 给出了弱电离尘埃等离子体的电导率和介电常数表达式^[8], 并进一步研究了电磁波在弱电离尘埃等离子体的衰减^[9]. 然而, 用时域有限差分 (FDTD) 方法研究电磁波在弱电离尘埃等离子体中的传播规律, 目前尚

没有开展.

FDTD 方法是计算复杂介质电磁波传播和散射问题的有力工具^[10-19]. 近 20 年来, 处理色散介质的 FDTD 方法得到了迅速发展, 产生了辅助方程 (ADE) 方法^[11]、分段线性递归卷积方法 (PLRC)^[12]、Z 变换方法^[13] 等. 葛德彪等人提出了一种处理色散介质电磁问题的移位算子时域有限差分法 (SO-FDTD)^[14]. 杨利霞等人研究了各向异性介质的时域有限差分 (ANI-FDTD) 并行算法^[15], 魏兵、王飞等人基于德拜模型、德鲁模型和洛伦兹模型发展了 SO-FDTD 方法^[16-18]. 但弱电离尘埃等离子体中电磁波传播的仿真问题尚没有解决.

本文将弱电离尘埃等离子体介电常数化简为以 $j\omega$ 为自变量的分式多项式形式, 利用移位算子时域有限差分 (SO-FDTD) 方法给出了弱电离尘埃等离子体本构关系的时域形式, 并从色散介质的 Maxwell 方程组出发, 进一步导出了电场、磁场和电位移矢量之间完整的时域递推关系式. 计算了

* 国家自然科学基金 (批准号: 10865005) 和自治区高校科研计划重点项目 (批准号: XJEDU2009I36) 资助的课题.

† E-mail: stonm1234@yahoo.com.cn

弱电离尘埃等离子体层的反射系数和透射系数, 分析了尘埃粒子浓度和尘埃粒子半径变化对反射系数和透射系数的影响. 结果表明: 有尘埃粒子时的反射系数比没有尘埃粒子时反射系数小, 而透射系数要比没有尘埃粒子时的透射系数大; 当尘埃粒子浓度或尘埃粒子半径增大时, 其反射系数均减小.

2 弱电离尘埃等离子体的复介电常数

弱电离尘埃等离子体相对复介电系数 ε_r 为 [8]

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu_{eff}^2}$$

$$\varepsilon_r = \frac{(j\omega)^3 + (\nu_{eff} + \nu_{ch})(j\omega)^2 + (\nu_{eff}\nu_{ch} + \omega_{pe}^2)(j\omega) + (\omega_{pe}^2\nu_{ch} - c\eta_{ed}/\varepsilon_0)}{(j\omega)^3 + (\nu_{eff} + \nu_{ch})(j\omega)^2 + \nu_{eff}\nu_{ch}(j\omega)}. \quad (2)$$

显然, 弱电离尘埃等离子体的复介电常数可以表示为 $j\omega$ 为自变量的分式多项式形式, 并进一步离散得到时域递推关系式.

3 弱电离尘埃等离子体的 SO-FDTD 递推公式

设频域中介质的本构关系为 (以 x 分量为例)

$$D_x = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) E_x, \quad (3)$$

若介电系数 $\varepsilon_r(\omega)$ 可以写成有理分式函数形式

$$\varepsilon_r(\omega) = \sum_{n=0}^N p_n(j\omega)^n / \sum_{n=0}^N q_n(j\omega)^n, \quad (4)$$

利用频域到时域的转换关系 $j\omega \rightarrow \partial/\partial t$, 将 (4) 式代入 (3) 式得到时域本构关系为

$$D_x(t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\partial/\partial t) E_x(t), \quad (5)$$

其中 $\varepsilon_r(\partial/\partial t)$ 为介电系数的时域算子形式

$$\varepsilon_r(\partial/\partial t) = \sum_{n=0}^N p_n(\partial/\partial t)^n / \sum_{n=0}^N q_n(\partial/\partial t)^n. \quad (6)$$

设函数

$$y(t) = \frac{\partial f(t)}{\partial t}, \quad (7)$$

上式在 $(n+1/2)\Delta t$ 中心差分近似为

$$\frac{y^{n+1} + y^n}{2} = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{c\eta_{ed}(\nu_{ch} + \nu_{eff})}{\varepsilon_0(\omega^2 + \nu_{eff}^2)(\omega^2 + \nu_{ch}^2)} \\ & - j \frac{1}{\varepsilon_0\omega} \left[\frac{\varepsilon_0\omega_{pe}^2\nu_{eff}}{(\omega^2 + \nu_{eff}^2)} \right. \\ & \left. + \frac{c\eta_{ed}(\omega^2 - \nu_{ch}\nu_{eff})}{(\omega^2 + \nu_{ch}^2)(\omega^2 + \nu_{eff}^2)} \right], \quad (1) \end{aligned}$$

这里, ε_0 为真空中介电系数, c 为真空中光速, ω_{pe} 为等离子体频率, ν_{eff} 为有效碰撞频率, ν_{ch} 为电荷弛豫速率, η_{ed} 为充电响应因子.

(1) 式经过整理以后得

引入离散时域的移位算子 z_t , 定义

$$z_t f^n = f^{n+1}, \quad (9)$$

合并 (8) 式和 (9) 式可得

$$y^n = \left(\frac{2}{\Delta t} \frac{z_t - 1}{z_t + 1} \right) f^n, \quad (10)$$

比较 (7) 式和 (10) 式得

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \left(\frac{2}{\Delta t} \frac{z_t - 1}{z_t + 1} \right), \quad (11)$$

将 (11) 式代入 (6) 式并在其两边乘以 $(z^t + 1)^N$, 整理得

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{l=0}^N q_l \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^l (z_t - 1)^l (z_t + 1)^{N-l} \right] D_x^n \\ & = \varepsilon_0 \left[\sum_{l=0}^N p_l \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^l (z_t - 1)^l (z_t + 1)^{N-l} \right] E_x^n. \quad (12) \end{aligned}$$

(12) 式称为离散时域含移位算子的本构关系.

对比 (2), (12) 式可得 $N = 3$, 并令 $\frac{2}{\Delta t} = h$, 化简得

$$\begin{aligned} E_x^{n+1} = & \frac{1}{b_0} \left[\frac{1}{\varepsilon_0} (a_0 D_x^{n+1} + a_1 D_x^n \right. \\ & + a_2 D_x^{n-1} + a_3 D_x^{n-2}) \\ & \left. - b_1 E_x^n - b_2 E_x^{n-1} - b_3 E_x^{n-2} \right], \quad (13) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= q_0 + q_1 h + q_2 h^2 + q_3 h^3, \\ a_1 &= 3q_0 + q_1 h - q_2 h^2 - 3q_3 h^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= 3q_0 - q_1h - q_2h^2 + 3q_3h^3, \\ a_3 &= q_0 - q_1h + q_2h^2 - q_3h^3; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} b_0 &= p_0 + p_1h + p_2h^2 + p_3h^3, \\ b_1 &= 3p_0 + p_1h - p_2h^2 - 3p_3h^3, \\ b_2 &= 3p_0 - p_1h - p_2h^2 + 3p_3h^3, \\ b_3 &= p_0 - p_1h + p_2h^2 - p_3h^3; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} p_3 &= 1, \quad p_2 = \nu_{\text{eff}} + \nu_{\text{ch}}, \\ p_1 &= \nu_{\text{eff}}\nu_{\text{ch}} + \omega_{\text{pe}}^2, \\ p_0 &= \omega_{\text{pe}}^2\nu_{\text{ch}} - c\eta_{\text{ed}}/\varepsilon_0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} q_3 &= 1, \quad q_2 = \nu_{\text{eff}} + \nu_{\text{ch}}, \\ q_1 &= \nu_{\text{eff}}\nu_{\text{ch}}, \quad q_0 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

色散介质中, Maxwell 方程组为

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \nabla \times H, \quad (18)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times E, \quad (19)$$

对于电磁波沿 z 传播的一维情形, 从 E 分量计算 H 分量和 H 到 D 的迭代式为

$$\begin{aligned} H_y^{n+1/2}\left(k + \frac{1}{2}\right) &= H_y^{n-1/2}\left(k + \frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z} \\ &\times [E_x^n(k+1) + E_x^n(k)], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} D_x^{n+1}\left(k + \frac{1}{2}\right) &= D_x^n(k) - \frac{\Delta t}{\Delta z} \times \left[H_y^{n+1/2}\left(k + \frac{1}{2}\right) \right. \\ &\left. - H_y^{n+1/2}\left(k - \frac{1}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

这样 (13), (20) 和 (21) 式构成了模拟弱电离尘埃等离子体电磁行为的完整递推关系式。

4 数值结果

例 1 SO-FDTD 方法计算结果与传播矩阵法计算结果的比较. 设层厚度 $d = 2.25 \times 10^{-2}$ m, 尘埃等离子体中电子浓度、电荷弛豫速率、有效碰撞频率、尘埃粒子浓度、尘埃粒子半径分别为 $N_e = 10^{18} \text{ m}^{-3}$, $\nu_{\text{ch}} = 8.7 \times 10^9 \text{ rad/s}$, $\nu_{\text{eff}} = 3.8 \times 10^{10} \text{ rad/s}$, $N_d = 8.5 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$, $r_d = 10^{-6} \text{ m}$. 尘埃等离子体层的反射系数和透射系数如图 1 所示 (图中三角), 其中图 1(a) 为反射系数, 图 1(b) 为透射系数. 作为比较图中还给出了

传播矩阵法 [20] 的计算结果 (实线). 由图可见, 两者的计算结果相符合.

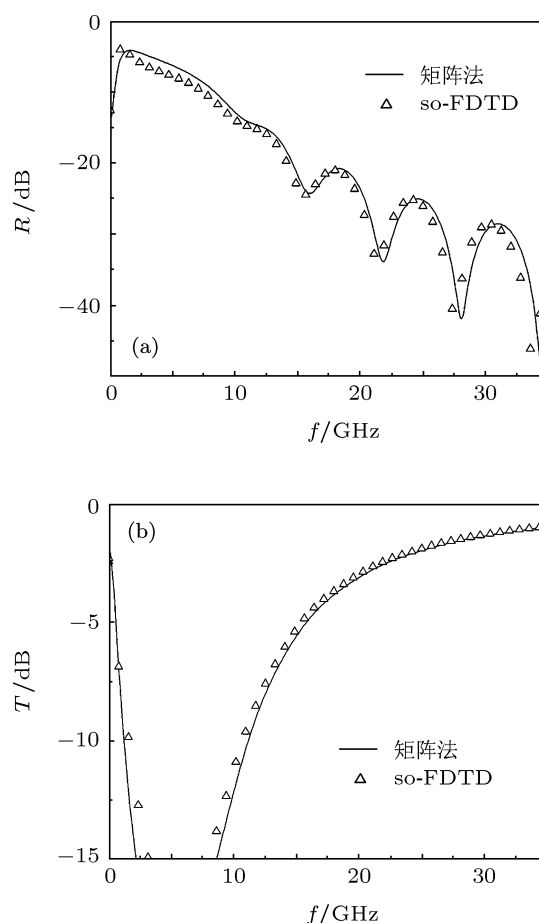


图 1 尘埃等离子体层的反射系数、透射系数 (a) 反射系数; (b) 透射系数

例 2 尘埃粒子浓度对反射和透射系数的影响. 设尘埃等离子体层厚 $d = 2.25 \times 10^{-2}$ m. 尘埃等离子体中, 电子浓度 $N_e = 10^{18} \text{ m}^{-3}$, 电荷弛豫速率 $\nu_{\text{ch}} = 7 \times 10^{11} \text{ rad/s}$, 有效碰撞频率 $\nu_{\text{eff}} = 10^{11} \text{ rad/s}$, 尘埃粒子半径 $r_d = 10^{-6} \text{ m}$. 分别考虑无尘埃粒子和尘埃粒子浓度 $N_d = 6 \times 10^{14} \text{ m}^{-3}$ 的两种情形, 计算可得尘埃等离子体层的反射系数和透射系数如图 3 所示, 图中 '□' 代表无尘埃粒子时的情形, 实线代表 $N_d = 6 \times 10^{14} \text{ m}^{-3}$ 时的情形, 其中图 2(a) 表示反射系数, 图 2(b) 表示透射系数.

例 3 尘埃粒子半径对反射和透射系数的影响. 层厚 $d = 2.25 \times 10^{-2}$ m, 尘埃等离子体中电子浓度、电荷弛豫速率、有效碰撞频率、尘埃粒子浓度分别为 $N_e = 10^{18} \text{ m}^{-3}$, $\nu_{\text{ch}} = 7 \times 10^{11} \text{ rad/s}$,

$\nu_{\text{eff}} = 10^{11}$ rad/s. $N_d = 3 \times 10^{14} \text{ m}^{-3}$, 分别取尘埃粒子半径为 $r_d = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$, $r_d = 1.4 \times 10^{-6} \text{ m}$. 尘埃等离子体层的反射系数和透射系数如图 3 所

示, 图中实线代表 $r_d = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$ 情形, ‘○’ 代表 $r_d = 1.4 \times 10^{-6} \text{ m}$ 情形, 其中图 3(a) 表示反射系数, 图 3(b) 表示透射系数.

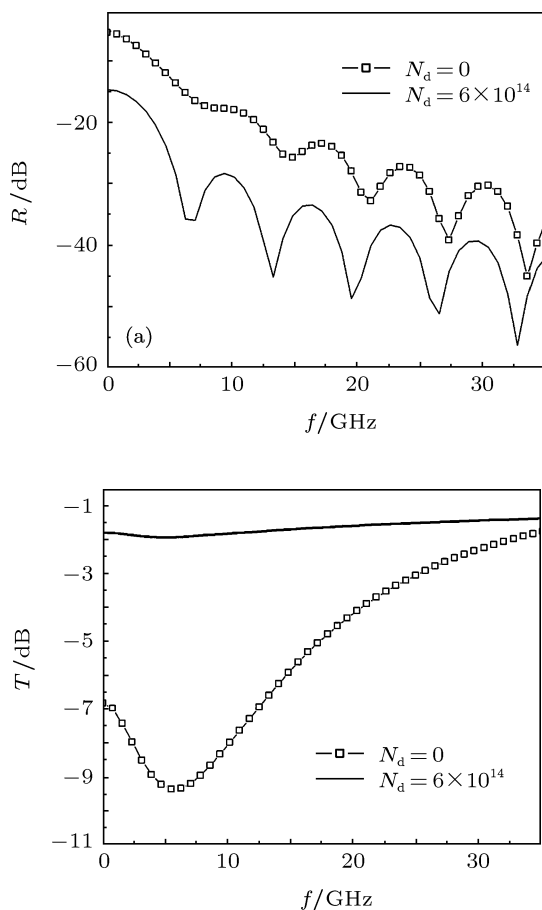


图 2 不同尘埃粒子浓度下尘埃等离子体层反射和透射系数 (a) 反射系数; (b) 透射系数

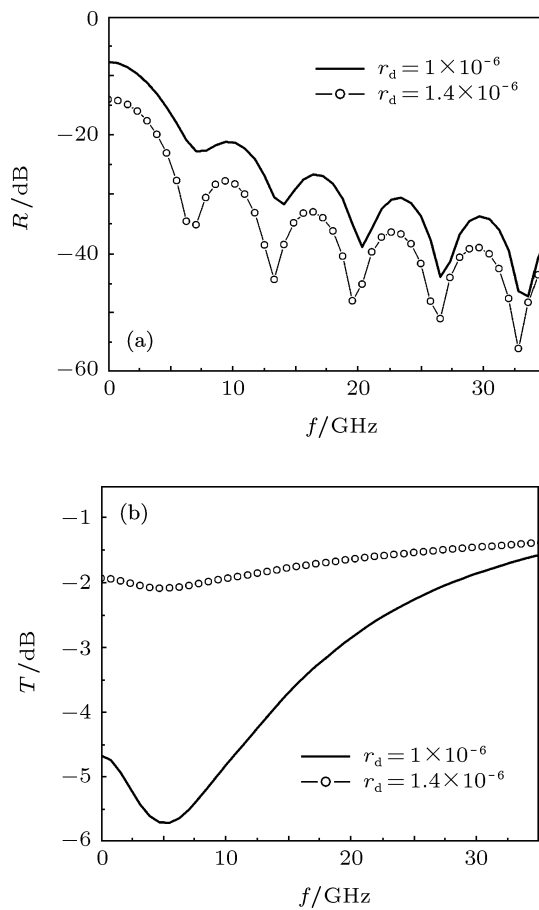


图 3 不同尘埃粒子半径下尘埃等离子体层反射和透射系数 (a) 反射系数; (b) 透射系数

5 结论

本文用 SO-FDTD 方法计算了弱电离尘埃等离子体层的反射系数和透射系数. 图 1 说明了 SO-FDTD 方法在弱电离尘埃等离子体中的适用性; 图 2 给出, 当尘埃粒子浓度增大时, 其反射系数减小, 且随着频率的增加而减小; 由图 2(a) 可以看出, 有尘埃粒子时的反射系数比没有尘埃粒子时反射

系数小 10 到 15 个 dB; 由图 2(b) 可知, 有尘埃粒子参与时的透射系数要比没有尘埃粒子时的透射系数大; 图 3 中由 (a) 图可以看出尘埃粒子半径由 $1 \mu\text{m}$ 增大到 $1.4 \mu\text{m}$ 时, 反射系数平均减小 10 个 dB, 由图 3(b) 看出尘埃粒子半径增大时, 透射系数也增大, 这表明尘埃粒子的参与对弱电离尘埃等离子体微波衰减有很大的影响.

[1] Havnes O 1984 *Adv. Space Res.* **4** 75
 [2] Goertz C K, Morfill G E, Ip W, Grun E, Hanes O 1986 *Letters To Nature* **320** 141
 [3] Angelis U D, Bingham R, Tsytovich V N 1989 *J. Plasma Physics* **42** 445

[4] Ma J X, Liu J Y 1997 *Phys. Plasmas* **4** 253
 [5] Kotsarenko N Y, Koshevaya S V, Kotsarenko A N 1998 *Geofisica Internacional* **37** 71
 [6] Shukla P K, Stenflo L, Mamun A A, Resendes D P, Sorasio G 2002 *Journal of Geophysical Research* **107** 8-1

- [7] Ryu C M, Cheng Rim Choi 2005 *Proceedings of ISSS* 7 26
- [8] Shi Y X, Wu J, Ge D B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5495 (in Chinese) [石雁祥, 吴健, 葛德彪 2009 物理学报 **58** 5495]
- [9] Shi Y X, Ge D B, Wu J 2007 *Chinese J. Geophys.* **50** 1005 (in Chinese) [石雁祥, 葛德彪, 吴健 2007 地球物理学报 **50** 1005]
- [10] Ge D B, Yan Y B 2005 *Finite Difference Time Domain Method For Electromagnetic Waves* (Xi'an: Xidian University) pp290-293 (in Chinese) [葛德彪, 闫玉波 2005 电磁波时域有限差分方法 (第二版) (西安: 西安电子科技大学出版社) 第 290-293 页]
- [11] Takayama Y, Klaus W 2002 *IEEE Microwave Wireles Components Lett.* **12** 102
- [12] Kelley D F, Luebbers R J 1996 *IEEE Trans. Antennas Propagat* **44** 792
- [13] Sullivan D M 1992 *IEEE Trans. Antennas Propagat* **40** 1223
- [14] Ge D B, Wu Y I, Zhu X Q 2003 *J. of Radio Sci.* **18** 359 (in Chinese) [葛德彪, 吴跃丽, 朱湘琴 2003 电波科学学报 **18** 359]
- [15] Yang L X, Ge D B, Wei B, Zheng K S, Ge N 2006 *Acta Electronica Sinica* **34** 1703 (in Chinese) [杨利霞, 葛德彪, 魏兵, 郑奎松, 葛宁 2006 电子学报 **34** 1703]
- [16] Wei B, Ge D B, Wang F 2008 *A General microwave* **57** 6290 (in Chinese) [魏兵, 葛德彪, 王飞 2008 微波学报 **57** 6290]
- [17] Wang F, Ge D B, Wei B 2008 *J. of Radio Sci.* **23** 704 (in Chinese) [王飞, 葛德彪, 魏兵 2008 电波科学学报 **23** 704]
- [18] Wang F, Ge D B, Wei B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6356 (in Chinese) [王飞, 葛德彪, 魏兵 2009 物理学报 **58** 6356]
- [19] Ma L X, Zhang H, Zhang C X 2010 *Henan Normal University (Natural Science)* **38** 75 (in Chinese) [麻来宣, 张厚, 张晨新 2010 河南师范大学学报 (自然科学版) **38** 75]
- [20] Ge D B, Wei B 2011 *Electromagnetic Waves Theory Beijing* (Science Press) p62 (in Chinese) [葛德彪, 魏兵 2011 电磁波理论 (北京: 科学出版社) 第 62 页]

SO-FDTD method of analyzing the reflection and transmission coefficient of weakly ionized dusty plasma layer*

Li Lin-Qian¹⁾ Shi Yan-Xiang^{1)†} Wang Fei²⁾ Wei Bing²⁾

1) (Department of Electronics and Information Engineering, Yili Normal University, Yining 835000, China)

2) (Department of Physics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(Received 10 October 2011; revised manuscript received 2 November 2011)

Abstract

The complex permittivity of weakly ionized dusty plasma is presented as a fractional polynomial in $j\omega$. A frequency-domain constitutive relation of weakly ionized dusty plasma is given by shift operator finite-difference time-domain (SO-FDTD) method in time domain. Also the recurrence relation on the electromagnetic properties of weakly ionized dusty plasma is deduced by the SO-FDTD. The reflection and transmission coefficients of the weakly ionized dusty plasma layer are calculated, and the influences which is caused by the change of the dust particle concentration and radius on reflection and transmission coefficients are also analyzed by the SO-FDTD method. The result shows that the reflection coefficient in the presence of dust particles is smaller than in the absence of dust particles, while the transmission coefficient in the former case is larger than in the latter case. Besides, it is found that the reflection coefficient decreases as the concentration or radius of dust particle increases.

Keywords: weakly ionized dusty plasma, SO-FDTD method, reflection coefficient, transmission coefficient

PACS: 52.27.LW, 52.40.Db, 52.65.-y

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10865005), and the Key Research Program of Xinjiang institution of higher education (Grant No. XJEDU2009I36).

† E-mail: stonml234@yahoo.com.cn