

# 基于非线性超传导的能流不对称传输现象的研究\*

陶锋<sup>1)2)3)</sup> 陈伟中<sup>1)†</sup> 许文<sup>1)</sup> 都思丹<sup>3)</sup>

1) (南京大学声学研究所, 近代声学教育部重点实验室, 南京 210093)

2) (安徽工业大学电气信息学院, 马鞍山 243000)

3) (南京大学电子科学与工程学院, 南京 210093)

(2011年10月28日收到; 2011年12月16日收到修改稿)

研究了非线性传输线电路禁带内能量的不对称传输现象. 传输线电路中的两子电路结构相同, 电感参数不同, 并且具有低通滤波器的特点. 鉴于驱动频率在通频带的截止频率之上, 所以形成不对称能流的载体为禁带内传播的非线性波. 该研究中, 产生不对称能量传输的机理与非线性超传导现象密切相关. 通过调整耦合电感的大小, 总结出传输能量与耦合强度之间的变化规律. 同时也采用仿真的方式分析了驱动电压幅值与传输能量间的相关性. 最后, 通过在实验上改变驱动频率的大小, 得到超传导发生时的门限电压与驱动频率间的依赖关系, 该关系与理论计算的结果完全定性一致.

**关键词:** 能量, 不对称, 非线性传输线电路, 孤子

**PACS:** 41.20.-q, 03.75.Lm, 05.45.-a, 84.40.Az

## 1 引言

自从上个世纪, 物理系统中能量传输方面的研究就已经引起人们的广泛关注和兴趣. 但随着研究的深入, 尤其是受到电子二极管整流现象的影响, 人们已经开始把目光转移到物理系统中能量的非对称传输研究方面来. 能量不对称传输现象的产生意味着能量能够沿着特定的方向进行传输, 反之, 能量传播则被阻碍. 该现象的研究对于将来人们很好地控制能量传输具有十分深远的意义, 因此, 也成为目前各领域的研究热点<sup>[1-17]</sup>.

在热传导方面, 自从 Terraneo 等<sup>[8]</sup> 提出第一个热二极管模型以后, Li 及其合作者<sup>[9-12]</sup> 利用数值计算的方式, 研究了两段非线性晶格链中的热整流现象, 并取得了显著的成果. 而在声学方面, 声整流现象的研究更是取得了实质性的进展, Liang 等<sup>[14]</sup> 通过组合超晶格结构与强声学非线性媒质, 于 2009 年提出了声二极管模型, 并首次在实验室制造出了第一个真正的声二极管器件<sup>[15]</sup>. 该声二极管中能

量的载体是通频带中传播的线性波. 然而, 上个世纪 90 年代, Leon 等<sup>[18]</sup> 却发现能量能够在非线性链的禁带内传播, 即所谓的超传导现象 (supratransmission). 那么, 能流的不对称传输现象能否也在禁带内实现呢? 超传导现象中, 能量的传输来源于孤子的产生和传播. 目前, 人们已经对孤子进行了多方面的研究<sup>[19]</sup>, 并取得一定的成果. 关于孤子研究的系统也多种多样, 其中, 传输线电路被认为是一种行之有效的研究方式<sup>[20-25]</sup>, 具有模型简单、易于测量的优点. 然而, 关于非线性电路中能量不对称传输方面的研究相对较少. 目前, 在非线性耦合传输线电路中, 通过合理地设计电路通频带以及选取合适的驱动频率, 在数值仿真和物理实验方面均发现了能流的不对称传输现象<sup>[16,17]</sup>. 通过对传播的电压波进行频谱分析, 发现此种不对称能流的载体为通频带内传播的线性波, 其机理与非线性倍频效应和电路格点的滤波效应有密切的关系. 那么, 在一维非线性传输线电路中能否实现以孤子为载体的能流非对称传输现象呢?

为了回答以上问题, 即, 在非线性传输线电路

\* 国家自然科学基金 (批准号:10974095,11174145) 和安徽工业大学青年科研基金 (批准号:QZ201113) 资助的课题.

† E-mail: wzchen@nju.edu.cn

禁带内实现非对称能流现象的分析研究,且能量的载体为非线性波-孤子,本文将依据基尔霍夫定律推导出的波动方程,对耦合非线性传输线电路禁带内的能量传输情况进行分析.同时,还对影响能量传输强度的参数相关性进行仿真分析.禁带内实现能量非对称传输的机理与非线性超传导有着密切的关系.

## 2 理论模型

本文所研究的非线性传输线电路是由两条子传输线电路(I和II)通过线性耦合电感 $L_c$ 首尾连接而成,电路模型的单元结构如图1所示.每一条子传输线电路均由 $N$ 个相同结构的单元组成.从图1中可见,该单元电路由两个元件构成,包括串臂上的线性电感 $L$ 和并臂上连接的非线性电容 $C(V_n)$ .两子电路的非线性电容模型相同,不同点在于串臂电感值有所差异,分别用 $L_I$ 和 $L_{II}$ 表示.很明显,整个 $LC$ 电路的非线性特性由非线性电容产生. $V_n$ 为施加在第 $n$ 个单元处的非线性电容两端的电压,而 $I_n$ 为通过第 $n$ 个单元串臂电感的电流.研究中,该非线性电容采用 Philips 电子公司的 BB112 变容二极管模型实现.在 2V 直流电压反向偏置情况下,该二极管典型线性电容值为  $C_0 = 320 \text{ pF}$ .非线性电容的容值与其两端的电压变化关系的二阶泰勒展开形式<sup>[26]</sup>如式(1)所示.

$$C(V_n) = C_0(1 - 2\alpha V_n + 3\beta V_n^2), \quad (1)$$

其中,  $\alpha$  和  $\beta$  是非线性系数,其值分别为  $\alpha = 0.21 \text{ V}^{-1}$ ,  $\beta = 0.0197 \text{ V}^{-2}$ .

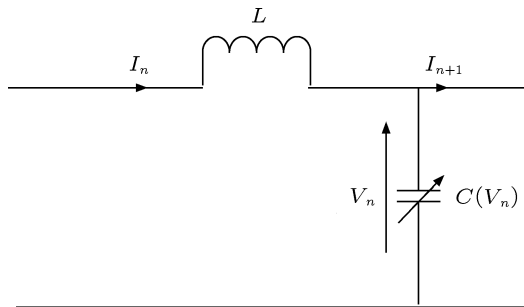


图1 非线性传输线电路单元结构图

由基尔霍夫(Kirchhoff)定律可以得到子电路 I 和 II 对应的 2 阶离散微分方程,如式(2)所示.

$$(1 - 2\alpha V_n + 3\beta V_n^2) \frac{d^2 V_n}{dt^2}$$

$$\begin{aligned} & - (2\alpha - 6\beta V_n) \left( \frac{dV_n}{dt} \right)^2 \\ & = \omega_{0i}^2 (V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1}), \\ & n = 1, 2, 3, \dots; \quad i = \text{I, II} \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $\omega_{0i}^2 = \frac{1}{L_i C_0}$ , ( $i = \text{I, II}$ ). 该方程具有  $e^{j(k_i n - \omega_i t)}$  形式的基本解,其中  $k_i$  为频率  $\omega_i$  对应的波矢量.将基本解代入式(2)中,可得线性色散关系如式(3)所示.

$$\omega_i^2 = \omega_c^2 \sin^2 \frac{k}{2}, \quad (3)$$

其中,  $\omega_{ci}$  为截止角频率,满足关系  $\omega_{ci} = 2\omega_{0i}$ .在该研究中,电路 I 和 II 中串臂电感的中心值分别为  $L_I = 230.0 \text{ }\mu\text{H}$ ,  $L_{II} = 199.0 \text{ }\mu\text{H}$ .因此,对应的截止角频率分别为  $\omega_{cI} = 7.3721 \text{ Mrad/s}$ ,  $\omega_{cII} = 7.9255 \text{ Mrad/s}$ .

## 3 仿真研究

研究中,整条耦合电路的长度为  $2N + 1 = 501$  个单元,第 251 单元处的线性耦合电感大小为  $L_c = 900 \text{ }\mu\text{H}$ .驱动信号采用正弦电压形式(见式4).

$$V(t) = V_0 \sin(\omega t) \quad (4)$$

其中,  $V_0$  为驱动电压幅值,  $\omega$  为驱动频率.频率值选择为  $\omega = 7.9294 \text{ Mrad/s}$ ,满足  $\omega > \omega_{cI}$ ,  $\omega > \omega_{cII}$ ,即在电路 I 和 II 的禁带内.

在禁带内,只有电路进入不稳定状态,才能够激发出孤子,导致超传导现象发生.为使电路进入不稳定状态,驱动电压与禁带内的驱动频率之间必须满足一定的关系,即,对于固定的驱动频率,存在一个使得电路能够实现从稳定状态到不稳定状态转变的电压值.相关的电压门限值公式<sup>[18]</sup>如式(5)所示.

$$V_{thi} = 4 \sqrt{\frac{\omega - \omega_{ci}}{\omega_{ci}(2\alpha^2 - 3\beta)}}, \quad (i = \text{I or II}), \quad (5)$$

由式(5)可知,理想无耗散情况下,电路 I 和 II 的门限电压值分别为  $V_{thI} = 6.4471 \text{ V}$  和  $V_{thII} = 0.5180 \text{ V}$ .

电路的驱动电压幅值选择为  $V_0 = 0.55 \text{ V}$ .利用 4 阶龙格-库塔(Runge-Kutta)计算方法,对耦合电路的波动微分方程进行积分运算,仿真时间设置为 15 ms.为了避免电压冲击给结果带来的影响,驱

动信号幅值将从 0 V 逐渐地上升到最大值. 图 2 给出了仿真得到的能量分布图. 可以看出, 当激励电压施加在耦合电路的左边界时, 由于  $V_0 < V_{thI}$ , 子电路 I 中没有能量传播, 因此整条电路中没有能量传输 (见图 2(a)), 此时的电路就像绝缘体一样. 进一步地, 从图 2(a) 的插图中可以明显地知道, 在电路 I 中, 能量传输经历了一个快速的指数下降趋势, 直至降为 0. 而当驱动电压施加在电路右边界时, 此时由于满足  $V_0 > V_{thI}$ , 子电路 II 中有超传导现象发生, 从而导致能量的传播, 该现象可以清楚地从图 2(b) 中体现出来. 在孤子的传播过程中, 由于能量的局域化, 导致孤子具有升压效应, 即一部分孤子的幅值会比驱动电压的幅值大得多. 因此, 在耦合界面处, 幅值大于电路 I 门限电压的孤子将穿越耦合界面进入到电路 I 中继续传播, 从而导致一部分能量在电路 I 中传输, 此时电路表现为导体的特性. 明显地, 孤子的产生条件和升压特性在能量不对称传输中起到关键作用. 综合以上两种情况, 该研究实现了在非线性 LC 传输线电路禁带内的能量不对称传输.

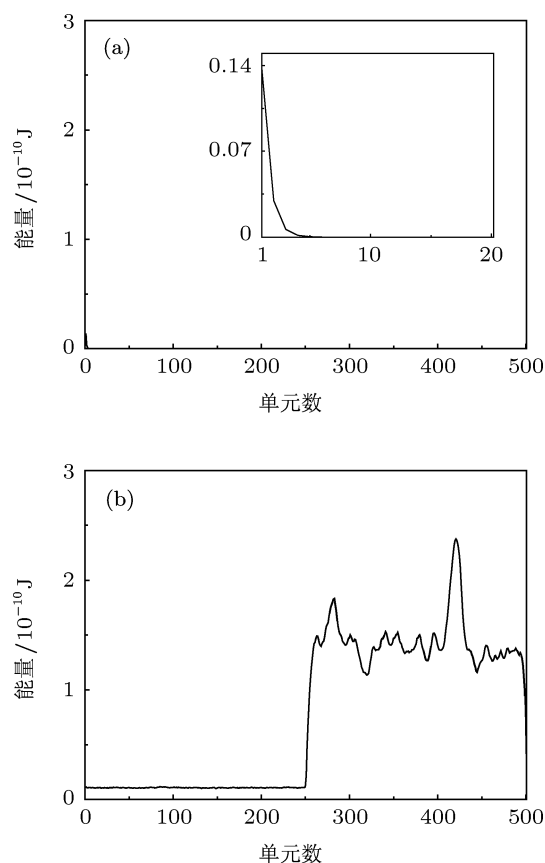


图 2 能量分布图 (a) 驱动信号施加在电路左边界; (b) 驱动信号施加在电路右边界

#### 4 参数相关性分析

本研究中, 能量的非对称传输与电路禁带内的超传导现象有密切的关系. 同时, 分析发现, 电路的参数对能流的强度会产生一定的影响, 例如驱动信号的幅值以及耦合强度均与能流强度有一定的相关性. 本节将对非对称能流现象与电路参数之间的关联性进行分析和研究. 仿真得到的能量为经由界面流通到电路 I 各单元中的能量总和.

图 3 给出了驱动电压幅值与能量之间的关系. 驱动信号施加在耦合电路的右边界. 图中实心三角形代表仿真数据点, 实线为对应的拟合曲线. 很明显, 传播到电路 I 中的能量将随着激励电压幅值的增大而增大. 换句话说, 不对称能流的强度与激励电压幅值有密切的关系.

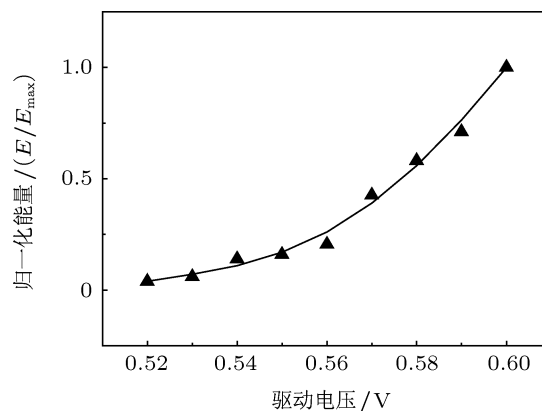


图 3 驱动电压与传播到电路 I 中的能量的关系曲线

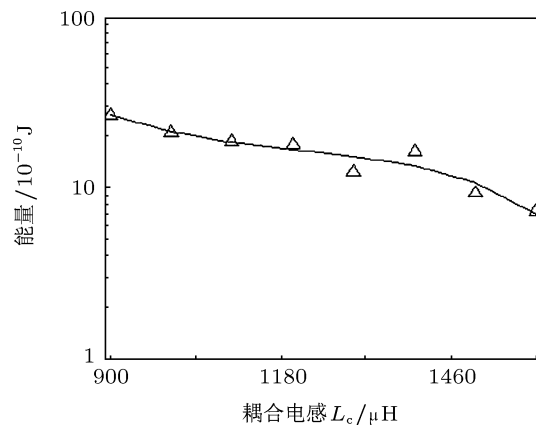


图 4 耦合电感大小与传播到电路 I 中的能量间的关系

通过分析, 可知非对称能流与耦合强度  $L_c$  间也有着密切的关系, 如图 4 所示. 众所周知, 随着耦

合电感值  $L_c$  的逐渐增大, 耦合强度将逐渐减弱, 电感的阻抗将随之增大. 即电感值越大对电流的阻碍程度越强. 从图 4 中可以看到, 传输到电路 I 中的能量随着电感值  $L_c$  的增大而减小. 图中空心三角形代表仿真数据点, 实线为其拟合曲线.

通过分析公式 (5), 可知产生超传导现象的电压门限阈值与驱动信号频率  $\omega$  之间成单调递增的关系. 为了验证此关系, 图 5 给出了基于物理实验电路测量到的驱动信号频率与门限电压之间的相关曲线. 可见, 随着驱动频率  $f = \omega/2\pi$  逐渐增大, 门限阈值电压  $V_{thi}$ , ( $i = I, II$ ) 均随之增大. 该现象与公式 (5) 计算得到的规律定性一致. 其中, 实线是对应实验数据的拟合曲线. 相同频率下, 电路 I 的门限电压值要比电路 II 的高.

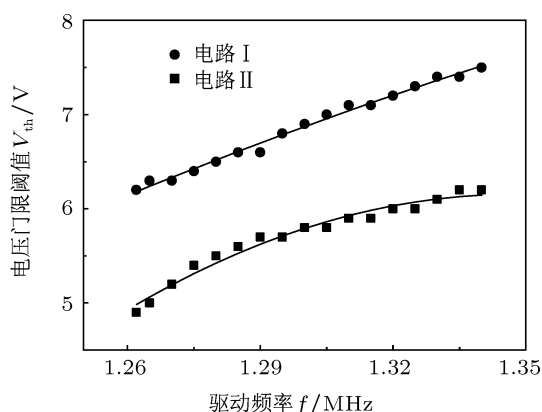


图 5 驱动电压频率与门限电压之间的关系 (实验测量)

综上, 通过调整电路的耦合强度, 驱动电压幅值等参数, 分别得到了其与能流强度之间的关系. 从而为研究提高不对称能流强度奠定基础, 也为后

续实验研究提供理论参考.

## 5 结论

本文采用仿真的方式, 研究了非线性  $LC$  传输线电路中能量不对称传输这一有趣现象. 驱动信号的频率位于电路通频带截止频率之上, 即禁带内. 仿真结果表明非线性传输线电路在研究非对称能流现象方面具有模型简单等特点. 整个耦合传输线电路是由有限长的结构相同但电感参数不同的两段子传输线电路构成. 耦合电感为线性电感. 两段子电路具有典型的低通滤波器结构, 并且具有不同的产生能量超传导现象的电压门限阈值. 需要强调的是, 线性波的传播在该研究频段内被完全阻碍掉, 禁带内的非线性波形成了能流的不对称性, 换句话说, 该研究中不对称能流的载体是非线性波 - 孤子. 经过对比可知, 该研究中形成能流不对称现象的机理完全不同于文献 [14 - 17]. 当驱动信号施加在电路左边界时, 耦合电路中没有能量流通, 此时的整个电路就像绝缘体一样. 而当驱动信号施加在电路右边界时, 电路中能量穿越耦合界面从右向左流动, 电路表现出导通性质.

为了研究能量不对称现象, 本文还对能量非对称传输现象的参数相关性进行仿真和分析. 例如驱动信号电压幅值对能量传输的影响, 以及耦合电感的强度与能量传输之间的关系等等. 同时, 文中还对物理非线性传输线子电路的电压阈值进行了实验测量, 可知实验测量到的电压门限阈值, 和计算公式 [18] 的结果定性一致.

- [1] Scalora M, Dowling J P, Bowden C M, Bloemer M J 1994 *J. Appl. Phys.* **76** 2023
- [2] Tocci M D, Bloemer M J, Scalora M, Dowling J P 1995 *Appl. Phys. Lett.* **66** 2324
- [3] Song M H, Park B, Takaniishi Y, Ishikawa K, Nishimura S, Toyooka T, Takezoe H 2006 *Thin Solid Films* **509** 49
- [4] Konotop V V, Kuzmiak V 2002 *Phys. Rev. B* **66** 235208
- [5] Hu B, Li B W, Zhao H 2000 *Phys. Rev. E* **61** 3828
- [6] Chang C W, Okawa D, Majumdar A, Zettl A 2006 *Science* **314** 1121
- [7] Hu B, Yang L, Zhang Y 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 124302
- [8] Terraneo M, Peyrard M, Casati G 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 094302
- [9] Li B W, Wang L, Casati G 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 184301
- [10] Li B W, Lan J H, Wang L 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 104302
- [11] Lan J H, Li B W 2006 *Phys. Rev. B* **74** 214305
- [12] Lan J H, Li B W 2007 *Phys. Rev. B* **75** 214302
- [13] Nesterenko V F, Daraio C, Herbold E B, Jin S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 158702
- [14] Liang B, Yuan B, Cheng J C 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 104301
- [15] Liang B, Guo X S, Tu J, Zhang D, Cheng J C 2010 *Nature Mater.* **9** 989
- [16] Tao F, Chen W Z, Xu W, Pan J T, Du S D 2011 *Phys. Rev. E*, **83** 056605
- [17] Tao F, Chen W Z, Xu W, Du S D 2011 *Chin. Phys. B* **21** 014101
- [18] Koon K Tse Ve, Leon J, Marquié P, Tchofo-Dinda P 2007 *Phys. Rev. E* **75** 066604
- [19] Yang H, Tang L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1674
- [20] Fukushima K, Wadati M, Narahara Y 1980 *J. Phys. Soc. Jpn.* **49**

- 1593  
[21] Marquié P, Bilbault J M, Remoissenet M 1994 *Phys. Rev. E* **49** 828  
[22] Kuusela T 1995 *Chaos, Solitons & Fractals* **5** 2419  
[23] Martín F, Oriols X 2001 *Appl. Phys. Lett.* **78** 2802  
[24] Dinkel J N, Setzer C, Rawal S, Lonnfren K E 2001 *Chaos, Solitons & Fractals* **12** 91  
[25] Yamgoué S B, Morfu S, Marquié P 2007 *Phys. Rev. E* **75** 036211  
[26] Yemélé D, Marquié P, Bilbault J M 2003 *Phys. Rev. E* **68** 016605

## The study of asymmetric energy transmission based on the nonlinear supratransmission\*

Tao Feng<sup>1)2)3)</sup> Chen Wei-Zhong<sup>1)†</sup> Xu Wen<sup>1)</sup> Du Si-Dan<sup>3)</sup>

1) (Institute of Acoustics, Key Laboratory of Modern Acoustics of Ministry of Education, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

2) (School of Electrical Engineering & Information, Anhui University of Technology, Ma'anshan 243000, China)

3) (School of Electronic Science and Engineering, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

(Received 28 October 2011; revised manuscript received 16 December 2011)

### Abstract

In this paper, the phenomenon of the asymmetric energy transmission is numerically investigated in the forbidden band of the electrical transmission line formed by two nonlinear segments which are identical in structure but different in inductor parameter. By considering the driving voltage at the frequency within the forbidden bands of both segments, the carrier of the asymmetric energy flux is the nonlinear wave beyond the band, instead of the linear wave in the passband, and the mechanism is closely related to the nonlinear supratransmission. To further understand this phenomenon in electrical transmission line, we also study the correlations between the energy intensity and the circuit parameters. Finally, we investigate the dependency of the voltage threshold on the driving frequency in physical experiment, and the result is qualitatively identical with that calculated by using equation.

**Keywords:** energy, asymmetry, nonlinear transmission line, soliton

**PACS:** 41.20.-q, 03.75.Lm, 05.45.-a, 84.40.Az

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10974095, 11174145) and the Research Foundation for Young Scientists of Anhui University of Technology, China (Grant No. QZ201113).

† E-mail: wzchen@nju.edu.cn