颗粒介质中的粘滞系数*

钱祖文†

(中国科学院声学研究所, 北京 100190)

(2011 年 8 月 2 日收到; 2011 年 12 月 8 日收到修改稿)

将颗粒介质看成是等效均匀介质, 其中的声衰减系数和声速等于该颗粒介质中的相应的量值 (它们可由作者的理论给出), 等效静态密度可以用二元混合规则求得. 此外, 根据浓颗粒介质中相互作用的声传播理论, 当入射波为平面波时, 相互作用的次级波仍然是平面波. 在这样的情况下, 可以将三维非线性方程组简化为一维情况, 从而算得浓颗粒介质中的粘滞系数, 结果表明, 颗粒介质中的粘滞系数不仅依赖于颗粒的体积分数而且还与频率有关. 根据推导过程可知, 对比于爱因斯坦理论所能应用的限制, 本文的结果可以更广泛地应用于实际介质.

关键词: 颗粒介质, 体积分数, 粘滞系数

PACS: 43.25.+y, 47.57.E, 66.20.+d, 82.70.K

1 引 言

如果一种流体 (称之为背景流体) 中出现了物理性质不同的其它颗粒物时, 人们就将它叫做颗粒介质 (或称为悬浮流体). 当颗粒物的体积分数 (或浓度) 很小, 以至于颗粒之间的相互作用可以忽略时, 我们将它称作低浓度颗粒介质 (或稀悬浮流体), 否则就成为高浓度颗粒介质 (或浓悬浮流体). 自然界的颗粒介质是枚不胜举, 例如江湖中的浑水、被研磨的矿浆、海洋浅层沉积物、沙丘与土壤、云雾以及粮仓中的粮食等都可以归之为颗粒介质, 只不过浓度不同罢了. 为了探索这些介质的几何和物理等性质, 例如它们的颗粒分布, 体积分数等物理量, 声学方法是首选的手段之一. 为了对它们的物理性质有所了解, 文献 [1] 的作者测量了水雾的声衰减系数, 文献 [2—4] 特别 [3,4] 的作者深入研究了水雾中的声衰减, 揭示了声衰减的动态物理机理. 与声衰减相关联的另一个物理量就是粘滞, 早在 1906 年, 爱因斯坦曾经研究过颗粒介质的切变粘滞系数 (爱因斯坦早期的文献不好找, 我们这里的叙述是根据文献 [5] 中 22 节的内容). 它讨论的情况是：背景流体是不可压缩的, 颗粒物的体积分数很小, 介质的运动是小雷诺数和稳态的, 经过近似计算他得到颗粒介质中的切变粘滞系数 μ 与背景流体中的切变粘滞系数 μ_0 有如下的关系 (见文献 [5] 的 73—75 页), 即

$$\mu=\mu_0\left\{1+\frac{5}{2}\tau_N\right\},\tag{1}$$

式中 τ_N 是颗粒的体积分数。这个结果表明, 颗粒物的出现, 使得切变粘滞系数增大了. 但美中不足的是, 上述理论结果所能应用的范围受到了太多的限制, 下面我们应用颗粒介质中的声传播理论来推广这一理论.

2 颗粒介质中波的相互作用理论

设单位体积的颗粒介质中有 N 个颗粒, 如果它们的体积分数较高, 它们之间要产生多体、多次的次级波相互作用, 对于这类介质, 文献 [6—9] 得到的结果表明, 如果入射波是平面波, 则相互作用所产生的次级波也是平面波. 根据这个结果, 我们就能够大大地简化要处理的问题。既然所有的波场是平面波, 我们就可以将三维非线性散射问题化归等效介质中的一维非线性问题, 同时将离散的颗粒介质看成为等效的均匀介质, 其中的有关参数

∗ 谨以此文纪念魏荣爵先生逝世两周年.

† E-mail: qianzw@mail.ioa.ac.cn

可以这样来选取：在文献 [6—9] 中我们已经得到了声衰减系数和声速的表示式, 这里令它们分别等于等效均匀介质中的等效声衰减系数 $\bar{\alpha}$ 和等效声速 $\bar{c}_0$；其它的物理量如等效密度 $\bar{\rho}_0$ 等可以根据二相混合规则来求得. 在这样的简化下, Navier-Stokes 方程可写为

$$\rho\Big(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\Big)=-\frac{\partial p}{\partial x}+(\bar{\mu}'+2\bar{\mu})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad (2)$$

连续性方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad (3)$$

以及物态方程

$$p=p(\rho,s)=P-P_0\approx \bar{c}_0^2(\rho-\bar{\rho}_0),\quad (4)$$

式中 P 和 P_0 是全部压力和静压力, p 和 ρ 分别为声压和密度, s 是熵, 而

$$\bar{\rho}_0=\rho_0[1+(\sigma-1)\tau_N],\quad (5)$$

ρ_0 为密度项 ρ 中的静态密度, $\bar{\rho}_0$ 是按二相混合规则算得的等效密度, 以及

$$\sigma=\frac{\rho_{\rm g}}{\rho_0},\quad (6)$$

$\rho_{\rm g}$ 是颗粒物的密度. 而本文的任务是寻求两个等效粘滞系数 $\bar{\mu}$ 和 $\bar{\mu}'$. 下面我们用逐步近似的方法来求解非线性散射问题, 取线性近似, 即令

$$\left.\begin{aligned}&p=p^{(1)},\\&u=u^{(1)},\\&\rho=\bar{\rho}_0+\rho^{(1)},\end{aligned}\right\}\quad (7)$$

将 (7) 式代入到 (2)—(4) 式, 取相同阶近似得到各阶力量所满足的微分方程：对于一级近似我们有

$$\bar{\rho}_0\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t}=-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x}+(\bar{\mu}'+2\bar{\mu})\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2},\quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t}+\bar{\rho}_0\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}=0,\quad (9)$$

$$p^{(1)}=\bar{c}_0^2\rho^{(1)}=\mathrm{i}\bar{\rho}_0\varphi^{(1)},\quad (10)$$

这里 $\varphi^{(1)}$ 是一阶速度势.

现在我们来寻求 (8) 和 (9) 两式的解. 显然, 可以写

$$u^{(1)}(x,t)=u_0^{(1)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\bar{k}x)-\bar{\alpha}x},\quad (11)$$

$$\rho^{(1)}(x,t)=\rho_0^{(1)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\bar{k}x)-\bar{\alpha}x},\quad (12)$$

式中

$$\bar{k}=\frac{\omega}{\bar{c}_0},\quad (13)$$

尽管由于颗粒物的出现, 但其中的声速与背景介质中的声速之间的差异不是很大 [10,11], 故今后我们将不再区分 $\bar{k}$ 和 k. 将它们代入到 (8) 和 (9) 两式得到

$$\begin{aligned}&(\mathrm{i}k-\bar{\alpha})\bar{c}_0^2\rho_0^{(1)}\\&-\{(\bar{\mu}'+2\bar{\mu})(\mathrm{i}k-\bar{\alpha})^2+\mathrm{i}\omega\bar{\rho}_0\}u_0^{(1)}=0,\end{aligned}\quad (14)$$

$$-\mathrm{i}\omega\rho_0^{(1)}+\bar{\rho}_0(\mathrm{i}k-\bar{\alpha})u_0^{(1)}=0.\quad (15)$$

如果 (11) 和 (12) 两式是 (8) 和 (9) 式的解, 则齐次方程组 (14) 和 (15) 式必须成立, 于是有

$$\bar{\mu}'+2\bar{\mu}=-\mathrm{i}\bar{\rho}_0\omega\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+\mathrm{i}\bar{\alpha})^2}\right].\quad (16)$$

由此可见, 颗粒介质中的等效粘滞系数是复数, 而且依赖于声波的频率. 当颗粒介质的体积分数等于零, 以及 $k\gg\bar{\alpha}$, 则由 (15) 式应当得到背景流体的吸收系数. 事实上, 由 (16) 式可得

$$\bar{\alpha}=\frac{\bar{\rho}_0\omega^2}{2c_0^3}(\bar{\mu}'+2\bar{\mu}).\quad (17)$$

对于经典流体 (或 Stokes 流体), 第二粘滞系数与第一粘滞系数有如下的关系, 即 $\bar{\mu}'=-\dfrac{2}{3}\bar{\mu}$, 或流体的体积粘滞系数为零 [12,13], 于是 (17) 式变为

$$\bar{\alpha}=\frac{2\bar{\rho}_0\omega^2}{3c_0^3}\bar{\mu}.\quad (18)$$

上式即为流体的经典吸收系数公式. 通常 $k\gg\bar{\alpha}$, 故 (16) 式可以改写为

$$\bar{\mu}'+2\bar{\mu}\approx\frac{2\bar{\rho}_0\omega\bar{\alpha}}{k^3},\quad (19)$$

式中 $\bar{\alpha}$ 是颗粒介质中的声吸收系数, 它应当等于背景流体中的吸收 α_0 与颗粒物出现之后介质增大的吸收 $\alpha_{\rm s}$ 之和, 即

$$\bar{\alpha}=\alpha_0+\alpha_{\rm s}.\quad (20)$$

由文献 [12,13](例如文献 [12] 中的 (4.2.5) 式) 可以得到背景流体中的声衰减系数为

$$\alpha_0=\frac{\omega^2}{2\rho_0c_0^3}(\mu_0'+2\mu_0),\quad (21)$$

式中 μ_0 和 μ_0' 为背景流体的两个粘滞系数. 再由文献 [7,8], 例如 [7] 中的 (12) 式可知, 只要 $kR\ll 1$, 于是有

$$\alpha_{\rm s}=\frac{3}{2}k\tau_N a+O(\tau_N^2),\quad (22)$$

式中 a 的表达式是

$$a(z)=\frac{12(\sigma-1)^2z^2(1+z)}{[2(2\sigma+1)z^2+9z]^2+81(1+z)^2},\tag{23}$$

其中

$$z=\sqrt{\rho_0\omega/2\mu_0}R,\tag{24}$$

这里的 R 是球形颗粒物的半径. 将这些结果代入到 (19) 式可以近似地得到

$$\bar{\mu}'+2\bar{\mu}\approx(\mu_0'+2\mu_0)\left[1+\frac{2\beta_1^2a(z)}{k^2}\tau_N\right]+O(\tau_N^2),\tag{25}$$

式中

$$\beta_1=\sqrt{\frac{3\rho_0\omega}{2(\mu_0'+2\mu_0)}}.\tag{26}$$

对于 Stokes 流体, 体积粘滞系数为零, 我们有 $\bar{\mu}'=-\frac{2}{3}\bar{\mu}$, 以及 $\mu_0'=-\frac{2}{3}\mu_0$, 则可以得到

$$\bar{\mu}\approx\mu_0\left[1+\frac{9\beta^2a(z)}{2k^2}\tau_N\right]+O(\tau_N^2),\tag{27}$$

式中 k 近似地等于背景流体中的波数. 值得提起的是, 对于自然界的大多数介质而言, 除了少数物质 (例如单原子气体) 以外, 它们的体积粘滞系数都不等于零 [13]. 另一方面, 颗粒介质中的粘滞系数不仅依赖于颗粒的体积分数, 而且还与声波的频率有关. 对比于 (1) 式所能够应用的前提条件, (25) 或者 (27) 式的应用几乎不受什么限制, 因此, 它可以用之于许多实际问题中.

[1] Knudsen V O, Wilson J V, Anderson N S 1948 *Jour. Acoust. Soc. Am.* **20** 849

[2] Epstein P S, Richard R Carhart 1953 *J. Acoust. Soc. Am.* **25** 553

[3] Wei R J 1954 *Acta Phys. Sin.* **10** 187 [魏荣爵 1954 物理学报 **10** 187]

[4] Wei R J, Wu J R 1981 *Jour. Acoust. Soc. Am.* **70** 1213

[5] Landau L D, Lifshitz E M 1998 *Fluid Mechanics* (Beijing: World Pubishing Corporation) (2nd Ed) (流体力学 (第二版) (北京, 世界图书出版公司) pp73–75

[6] Qian Z W 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 433 [钱祖文 1981 物理学报 **30** 433]

[7] Qian Z W 1985 *J. Sound Vib.* **103** 427

[8] Qian Z W 1986 *J. Sound Vib.* **108** 147

[9] Qian Z W 1998 *Acta Acustica* **84** 621

[10] Qian Z W 2008 *Chinese J. Acousyics* **33** 385 [钱祖文 2008 声学学报 **33** 385]

[11] Qian Z W 2009 *Chinese Journal of Acousyics* **28** 244

[12] Qian Z W 2009 *Nonlinear Acoustics* (2nd Ed.) (Beijing: Science Press) p76 [钱祖文 2009 非线性声学 (第二版 科学出版社)] 第 76 页

[13] Markham J J, Beyer R T, Lindsay R B 1951 *Rev. Mod. Phys.* **23** 353

Viscosity coefficient in granular medium

Qian Zu-Wen†

(*Acoustics Institute, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190, *China*)

(Received 2 August 2011; revised manuscript received 8 December 2011)

Abstract

A granular medium can be regarded as an equivalent uniform medium, of which the attenuation coefficient and the acoustic speed are obtained from the author's theory published elsewhere. The equivalent static density can be given by the mixed rule. According to the author's sound propagation theory in the granular medium, furthermore, the secondary waves are plane waves as well when the incidental sound wave is plane wave. In these cases, the three-dimensional equations can be simplified into a one-dimensional equation, and an expression for the viscosity coefficient in concentrated granular medium can be obtained. The theoretical results show that the viscosity coefficient depends on not only the volume fraction of the grains, but also sound frequency. On the other hand, the theory given in this paper can be used in the realistic cases, where less restrictions will be imposed on the applications than the Einstein's theory.

Keywords: granular media, volume fraction, viscosity coefficients

PACS: 43.25.+y, 47.57.E, 66.20.+d, 82.70.K

† E-mail: qianzw@mail.ioa.ac.cn