

# 基于弹性模量检测骨疲劳的超声导波方法研究\*

张正罡 他得安†

(复旦大学电子工程系, 上海 200433)

(2011年9月22日收到; 2011年12月8日收到修改稿)

研究早期诊断骨疲劳的方法是当前骨质评价方面的研究热点之一. 本文对不同弹性模量下长骨中超声导波的传播特性进行了理论分析和仿真研究. 首先, 通过数值计算得到导波在管状长骨中的理论解析解. 然后对管状长骨进行了时域有限差分 (FDTD) 仿真, 并验证了它与理论解析解的一致性, 同时得到长骨中不同模式导波群速度、中心频率和衰减与弹性模量的关系. 研究表明各个导波模式的群速度和中心频率均随弹性模量的增加而增加, 而衰减随弹性模量的增加而减小. 说明超声导波的传播特性参量可以反映长骨弹性模量的变化, 从而为长骨的早期疲劳诊断提供理论依据.

**关键词:** 超声导波, 长骨疲劳, 弹性模量, 时域有限差分

**PACS:** 43.35.Cg, 43.20.Hq

## 1 引言

人体长骨在循环载荷 (如运动员训练、负重运动、军训等) 下会发生疲劳损伤, 在一定的范围内, 这种损伤可以通过骨组织的再生进行修复, 但如果损伤积累过快, 超过了其修复阈值, 就会形成疲劳性骨折. 骨疲劳损伤已成为在负重活动中发生骨折的重要潜在威胁. 如何对骨疲劳进行早期诊断也已成为当前骨质评价方面的热点之一.

骨疲劳的产生会伴随着微观结构的改变. 文献 [1, 2] 对循环载荷下长骨的微观结构进行观测, 发现骨疲劳损伤与微观裂纹 (30—100  $\mu\text{m}$ ) 的产生和积累有关. 但这种直接观测的方法分辨率较低, 不能对骨疲劳微损伤进行诊断, 且由于价格昂贵、电离辐射等原因, 也不能满足对负重人员实时测量的要求. 当长骨发生疲劳时, 其生理参数也会发生相应的变化. 文献 [3—6] 分别对离体长骨进行疲劳测试, 结果指出疲劳损伤越严重, 长骨的密度越小, 弹性模量和泊松比也会越低, 而黏弹性则越强.

近年来, 超声技术在评价骨质状况方面受到广泛重视. 其中超声导波对材料的特性很敏感, 能比

较全面的反映波导内部的结构信息, 在评价波导材料方面具有独特的优势. 文献 [7,8] 采用超声 Lamb 波的方法对固体板状材料的疲劳特性进行了研究. 在长骨建模方面, 目前采用的模型也大都采用板状结构, 并把骨材料看做是完全弹性介质 [9—11]. 然而, 实际的长骨为不规则的管状结构, 且存在能量损耗. 所以, 这种模型不能准确的模拟超声导波在长骨中的传播过程.

本文提出用黏弹性材料的管状结构来模拟长骨, 并假定骨材料的其他生理参数如密度、泊松比、黏度等不变 (实际上, 当发生骨疲劳时, 这些生理参数的变化较小), 对不同弹性模量下长骨中超声导波的传播特性进行了研究. 希望通过超声导波的方法来反映长骨弹性模量的改变, 进而由弹性模量的改变反推出长骨的疲劳程度, 达到早期诊断骨质疲劳的目的.

本文首先通过弹性动力学方程计算出超声导波在长骨中的理论频散特性, 得出导波群速度与弹性模量之间的关系以及导波位移的空间分布特点. 然后采用 FDTD 方法模拟长骨中的导波, 验证仿真结果与理论计算结果的一致性, 并进一步研究超声导波中心频率和能量衰减与弹性模量的关系, 从而

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11174060)、教育部博士点基金 (批准号: 20110071130004)、上海市重点科技攻关项目 (批准号: 09441900400) 和教育部新世纪优秀人才支持计划 (批准号: NCET-10-0349) 资助的课题.

† E-mail: tda@fudan.edu.cn

为长骨的早期疲劳诊断提供理论依据。

## 2 长骨中的超声导波理论

当超声在有具体边界的介质中传播时,会在边界处发生反射和折射,并伴随着纵波、横波之间的模态转化,当反射波和折射波再次遇到新的边界时,又会产生新的反射波和折射波,这样不断地反射和折射,最终相同相位的横波或纵波会发生耦合而形成导波.超声在管状长骨中传播时会形成管状导波.根据弹性动力学方程以及边界条件,可以对导波进行数学建模,进而求得导波在特定波导中的理论解析解.

本文用内外表面均为自由边界的空心圆管来模拟长骨(图1),以研究纵向导波模态在该模型中的传播规律, $L(0, n)$ 表示不同模式的纵向导波, $n = 1, 2, 3, \dots$ .圆管的内半径为 $a$ ,外半径为 $b$ ,厚度为 $h(h = b - a)$ ,并假设长骨是各向同性的黏弹性材料.

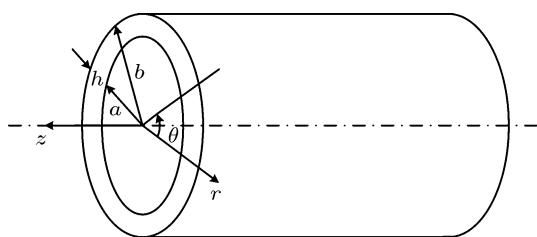


图1 柱坐标下的长骨模型:  $a$  为内径;  $b$  为外径;  $h$  为厚度

### 2.1 长骨中的波动方程

均匀、各向同性黏弹性材料的波动方程可表示为<sup>[12]</sup>:

$$\left(\lambda + \phi \frac{\partial}{\partial t} + \mu + \frac{\eta}{3} \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) + \left(\mu + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(z, r, \theta, t)$  为柱坐标系下的位移矢量;  $\rho$  为材料密度;  $\lambda$  和  $\mu$  为拉梅常数;  $\phi$  和  $\eta$  为黏度系数. 当  $\phi = \eta = 0$  时, 式(1)变为完全弹性材料的波动方程, Gazis<sup>[13]</sup>给出了具体的解析解. 本文把式(1)中由材料黏弹性引发的位移对时间的一阶微分项  $\frac{\partial}{\partial t}$  变换到频域, 并重新定义复数形式的拉梅

常数, 式(1)可变为:

$$(\lambda' + 2\mu') \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) + \mu' \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}, \quad (2)$$

其中  $\lambda' = \lambda + jw\phi$ ;  $\mu' = \mu + jw(\eta/3)$ ;  $w$  为角频率. 式(2)与完全弹性材料的波动方程形式相同, 由于本文采用的是轴对称的圆管模型, 可忽略位移的周向分量, 在柱坐标系下, 式(2)的解可表示为:

$$u_r = (x' + ky) e^{i(kz - wt)}, \quad (3)$$

$$u_z = i(kx + \frac{1}{r}y + y') e^{i(kz - wt)}, \quad (4)$$

其中  $x = A_0 Z_0(pr) + B_0 W_0(qr)$ ,  $y = A_1 Z_1(pr) + B_1 W_1(qr)$ ;  $p = \sqrt{\rho w^2 / (\lambda' + 2\mu') - k^2}$ ,  $q = \sqrt{\rho w^2 / \mu' - k^2}$ ;  $k$  为  $z$  轴方向的波数;  $x'$  和  $y'$  表示对  $r$  的一阶偏导数;  $Z_n$  和  $W_n$  ( $n = 0, 1$ ) 为 Bessel 函数(或修正的 Bessel 函数)<sup>[14]</sup>. 位移分量(3)和(4)对应的应力分量可表示为:

$$\sigma_{rr} = \mu' \left[ -\frac{\lambda'}{\mu'} (p^2 + k^2)x + 2x'' + 2ky' \right] \times e^{i(kz - wt)}, \quad (5)$$

$$\sigma_{rz} = i\mu' [2kx' + (k^2 - q^2)y] e^{i(kz - wt)}. \quad (6)$$

### 2.2 边界条件下的频散方程

内外表面均为自由边界的空心圆管的边界条件可表示为:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0 \quad (r = a, r = b), \quad (7)$$

把式(7)代入式(5)和(6), 可得如下所示的矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{N} = 0, \quad (8)$$

其中  $\mathbf{N} = [A_0 \ A_1 \ B_0 \ B_1]^T$  为未知的四维列矢量;  $\mathbf{M}$  为含有 Bessel 函数的四阶系数方阵. 令系数矩阵的行列式为零, 可得到式(8)的非解析解:

$$|\mathbf{M}| = 0, \quad (9)$$

式(9)为管状长骨中纵向导波模态的频散方程, 该方程的解为  $w-k$  平面内的一簇曲线, 每一条曲线代表某一个特定的模式. 其中  $k$  为复数, 实部和虚部

对应于传播速度和衰减,可由式 (10) 推出导波理论群速度与频率的关系:

$$c_g = \frac{dw}{dk_{\text{real}}}. \quad (10)$$

### 2.3 导波位移的空间分布

选取某一模式  $w-k$  曲线上一点,代入式 (8), 可得关于未知矢量  $\mathbf{N}$  的四元一次方程组,把方程组的解代入式 (3), (4), 即可计算出该点处的轴向位移

分量  $u_z(r, z, t)$  和径向位移分量  $u_r(r, z, t)$  [15].

本文中长骨模型的初始参数如表 1 所示 [16]. 把弹性模量 ( $E$ ) 分别设为初始值的 20%—100%, 计算出不同模式导波群速度的理论频散曲线以及位移的空间分布. 弹性模量、泊松比与拉梅常数的关系为:

$$E = \mu \times (3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu), \quad (11)$$

$$V = \lambda/[2 \times (\lambda + \mu)]. \quad (12)$$

表 1 长骨模型的结构参数和骨材料参数表

参数	$a/\text{mm}$	$h/\text{mm}$	$\rho/\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$	$V$	$E/\text{GPa}$	$\phi/\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$	$\eta/\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$
数值	15	3	1.85	0.37	8.59	0.1	40

### 3 FDTD 方法仿真

上述直接求解波动方程的方法虽然能够精确计算出超声导波的理论解析解, 但仅适用于简单的波导结构, 对于较为复杂的波导, 可采用 FDTD 方法进行模拟仿真.

FDTD 是一种波场的计算机模拟方法, 在电磁波、地震波、声波等领域都有很广泛的应用 [17–20]. 它利用泰勒展开把波动微分方程转化为差分方程来求解波场分量, 从而得到波场分量关于时间和空间的数值近似解. 本文采用的 FDTD 仿真模型如图 2 所示.

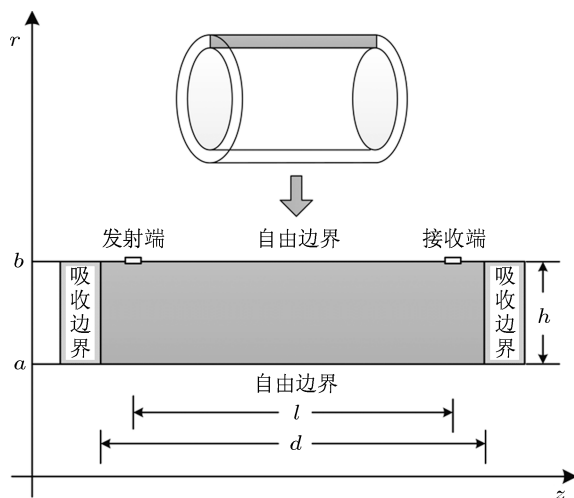


图 2 有限差分仿真的模型示意图

#### 3.1 黏弹性波动方程的差分离散

圆管中黏弹性材料的波动方程如式 (1) 所示,

忽略周向位移, 该矢量方程可在柱坐标下分解为两个标量方程 [21]:

$$\begin{aligned} & \left( \lambda + \phi \frac{\partial}{\partial t} + \mu + \frac{\eta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right) \\ & + \left( \mu + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \left( \lambda + \phi \frac{\partial}{\partial t} \right. \\ & \left. + \mu + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \left( \lambda + \phi \frac{\partial}{\partial t} + \mu + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ & + \left( \mu + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \left( \lambda + \phi \frac{\partial}{\partial t} \right. \\ & \left. + \mu + \frac{\eta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

如图 3 所示, 对于空间域的微分项, 采用交错网格的二阶中心差分算子进行离散 [22]. 以式 (13) 为例, 其空间微分可表示为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= \frac{1}{\Delta r^2} \begin{pmatrix} u_r & -2u_r & u_r \\ i,j+1 & i,j & i,j-1 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} &= \frac{1}{\Delta z^2} \begin{pmatrix} u_r & -2u_r & u_r \\ i+1,j & i,j & i-1,j \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{1}{2\Delta r} \begin{pmatrix} u_r & -u_r \\ i,j+1 & i,j-1 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \frac{1}{2\Delta z} \begin{pmatrix} u_z & +u_z & -u_z & -u_z \\ i+1,j+1 & i+1,j & i,j+1 & i,j \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} &= \frac{1}{\Delta r \Delta z} \begin{pmatrix} u_z & -u_z & -u_z & +u_z \\ i+1,j+1 & i+1,j & i,j+1 & i,j \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $\Delta r = h/j_{\text{max}}$ ,  $\Delta z = d/i_{\text{max}}$  分别表示径向和轴向的空间步长,  $d$  为圆管模型的长度;  $i, j$  分别表

示轴向和径向的位置, 如下式所示:

$$\begin{aligned} u_r : z_i &= i\Delta z, \quad r_j = a + j\Delta r \\ (i &= 0, 1, \dots, i_{\max}; j = 0, 1, \dots, j_{\max}) \\ u_z : z_i &= i\Delta z + \frac{\Delta z}{2}, \quad r_j = a + j\Delta r + \frac{\Delta r}{2} \\ (i &= 0, 1, \dots, i_{\max}; j = 0, 1, \dots, j_{\max}) \end{aligned} \quad (16)$$

式 (13) 时间域的微分项可离散表示为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= \frac{1}{\Delta t^2} \begin{pmatrix} u_r^{n+1} & -2u_r^n & u_r^{n-1} \\ i,j & i,j & i,j \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{1}{2\Delta t} \begin{pmatrix} X^{n+1} & -X^{n-1} \\ i,j & i,j \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $\Delta t$  为时间步长;  $n$  为时间索引值, 即  $t_n = n\Delta t$ ;  $X$  为与材料黏弹性有关的部分.

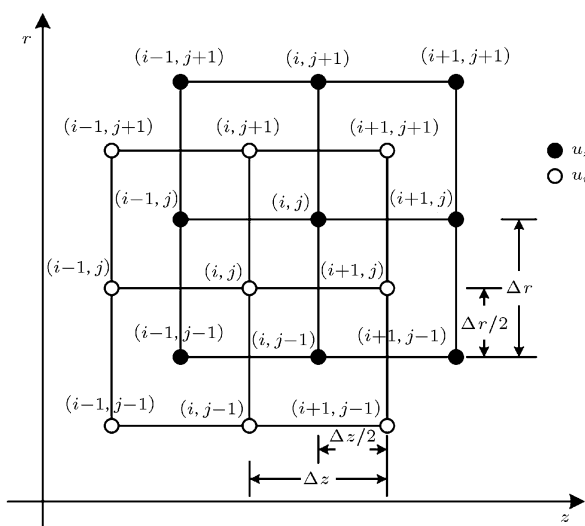


图3 径向和轴向位移分量的交错网格分布

### 3.2 边界条件的设置

仿真模型边界处的节点由于缺少与其相邻的节点, 不能采用上述方法进行差分离散, 需在边界的外部引入虚拟层. 不同的边界条件, 虚拟层的层数以及设置的要求也不相同.

#### 3.2.1 自由边界

本文的管状长骨模型内外表面为自由边界, 如式 (7) 所示, 这类边界只需一层虚拟层. 根据弹性动力学方程以及应力应变关系, 可推出应力和位移的关系:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\ \sigma_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

对该式进行差分离散后代入式 (7), 可计算出虚拟层中节点位移需满足的条件, 以内表面为例, 表达式为:

$$\begin{aligned} u_{r,i,-1} &= \frac{\lambda + \mu}{\Delta r} u_{r,i,j+1} + \frac{\lambda}{2\Delta z} u_{z,i+1,0} - \frac{\lambda}{2\Delta z} u_{z,i-1,0}, \\ u_{z,i,-1} &= \frac{\Delta r}{\Delta z} u_{r,i+1,0} - \frac{\Delta r}{\Delta z} u_{r,i-1,0} + u_{z,i,1}. \end{aligned} \quad (19)$$

#### 3.2.2 吸收边界

超声在实际的长骨中传播时, 由于传播距离较远, 且骨端的形状不规则, 接收探头接收到反射波的能量很小. 故将该长骨模型的两端设为完全匹配层 (PML) 吸收边界, 以防止声波在该边界处发生反射, 对仿真结果形成干扰.

### 3.3 初始条件以及稳定性

仿真模型的发射端采用高斯型线状声源, 表达式为:

$$S(t) = e^{-(t-N/f)^2/3} \times \sin(2\pi f \cdot t), \quad (20)$$

其中  $f$  为频率;  $N$  为周期数.

为保证有限差分算法的稳定性, 时间步长和空间步长应满足如下关系:

$$\Delta t \leq \min(\Delta z, \Delta r) / \sqrt{V_L^2 + V_T^2}, \quad (21)$$

其中  $V_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  为纵波速度;  $V_T = \sqrt{\mu/\rho}$  为横波速度.

### 3.4 仿真实验

本文采用轴向传播技术, 从发射端输入频率为 0.5 MHz, 3 个周期的高斯激励信号, 经过一段距离的传播后, 由接收端接收并输出. 发射端和接收端的长度均为 2 mm, 传播距离从 100 mm 逐渐增加至 180 mm, 仿真时间为 250  $\mu$ s.

### 3.5 数据处理

对仿真信号的处理流程如图 4 所示. 首先对信号进行短时傅里叶变换 (STFT), 得到时频图. 然后对时频图进行膨胀处理, 找到图中不同导波模式各自对应的极大值点, 进而计算出各个模式的群速度、中心频率以及衰减.

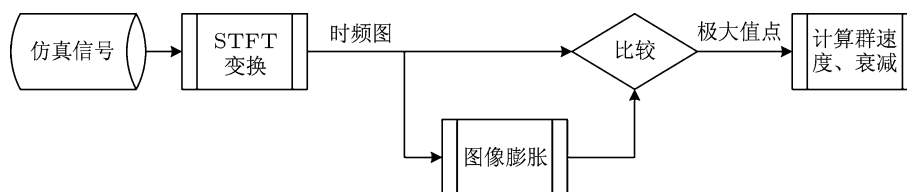


图4 数据处理流程图

### 3.5.1 STFT 变换

本文中采用简单有效的 STFT 变换:

$$\text{STFT}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(\tau) \times h(\tau - t)] \times e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (22)$$

其中  $x(\tau)$  为仿真信号;  $h(\tau - t)$  为高斯窗函数.

### 3.5.2 极大值点

STFT 变换后得到的时频图是一幅灰度图像, 对该图像的膨胀处理可表示为:

$$(s \oplus b)(f, t) = \max \{s(f - x, t - y) + b(x, y)\}, \quad (f - x), (t - y) \in D_s; (x, y) \in D_b, \quad (23)$$

其中  $s(f, t)$  为原时频图;  $b(x, y)$  为结构元素, 本文中结构元素的值都取为 0;  $D_s, D_b$  分别为原图像和结构元素的定义域.

比较膨胀后的图像  $(s \oplus b)(f, t)$  与原时频图  $s(f, t)$ , 在相同位置处, 灰度值相同的点即为极大值点, 坐标为  $(f_c, t_c)$ . 其中  $t_c$  表示对应模式导波的传播时间,  $f_c$  为该模式导波的中心频率.

### 3.5.3 群速度与衰减

在仿真模型中, 某一模式导波的群速度可由下式进行计算:

$$V_{gr} = \frac{l}{t_c - t_o}, \quad (24)$$

其中  $l$  为导波的传播距离,  $t_o$  为时间修正项, 包括发射信号的持续时间等.

对于导波信号的能量衰减, 定义如下的衰减系数:

$$\alpha = -20 \log \left( \frac{A_c}{A_0} \right), \quad (25)$$

其中  $A_c$  为对应模式导波在时频域中极大值点的幅度;  $A_0$  为发射波形在时频域中的最大幅度.

## 4 理论及仿真结果

由式 (9) 可计算出不同弹性模量下各个导波模式的频散曲线, 图 5 为当频率固定为 0.5 MHz 时,

各个导波模式的群速度与弹性模量的关系.

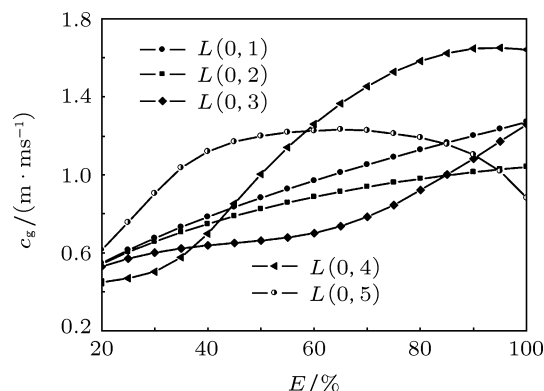


图5 理论计算群速度与弹性模量的关系 (频率为 0.5 MHz)

导波的位移分布可由式 (3), (4) 计算得到, 径向位移分量在圆管模型外表面 ( $r = b$ ) 处垂直于表面, 可由接收端接收. 而轴向位移分量在该处与表面平行, 不能被接收. 所以, 外表面处的径向位移可作为衡量可接收导波能量大小的标准. 图 6 为各个导波模式在外表面处的径向位移与频率的关系, 弹性模量为初始值  $8.5945E/\text{GPa}$ .

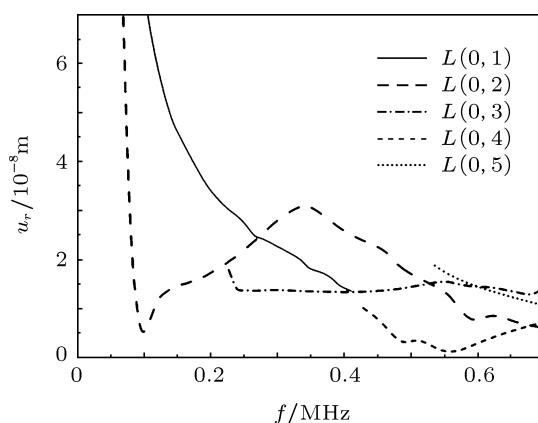


图6 长骨模型外表面各模式的径向位移与频率的关系 (弹性模量为初始值  $8.59E/\text{GPa}$ )

有限差分法仿真中, 通过设置不同的弹性模量以及传播距离, 可得到不同情况下的时域仿真波形. 当弹性模量为初始值的 70%, 传播距离分

别为 100 mm, 120 mm, 140 mm, 160 mm, 180 mm 时的仿真波形如图 7 所示. 图 8 表示当传播距离为 100 mm, 弹性模量分别为初始值的 100%, 80%, 60%, 40%, 20% 时的时域仿真波形.

对仿真信号进行时频域分析, 图 9, 图 10 为不同弹性模量、传播距离下的时域波形、时频图和

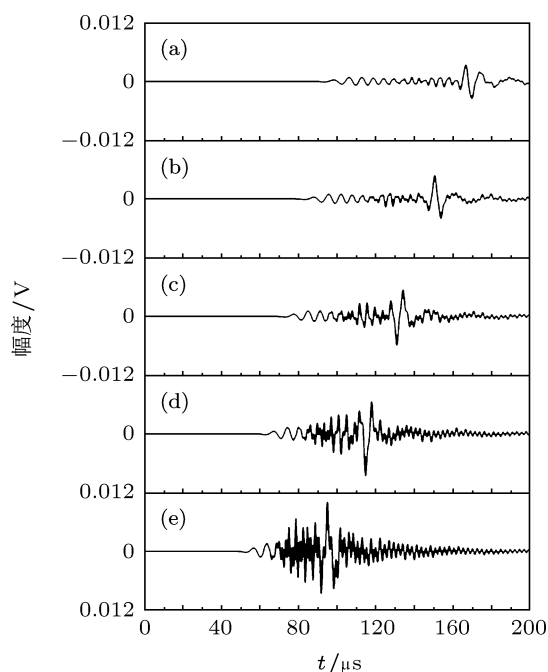


图 7 长骨中的仿真波形, 传播距离: (a) 180 mm; (b) 160 mm; (c) 140 mm; (d) 120 mm; (e) 100 mm. 其中弹性模量为初始值的 70%

把时频图中极大值点的时间坐标, 代入式 (24) 可计算出仿真的群速度, 再通过极大值点的频率坐标, 可在频散曲线中找到理论计算的群速度. 仿真群速度和中心频率与弹性模量之间的关系如图 11 所示. 由于骨材料的黏滞特性, 导波在长骨中传播时会发生衰减, 由式 (25) 可计算出衰减系数. 图 12 为固定传播距离为 140 mm 时, 导波的能量衰减与弹性模量的关系. 图 13 则表示导波能量随传播距离的衰减规律, 弹性模量为初始值  $8.59E/GPa$ .

## 5 分析与讨论

理论计算结果表明, 超声导波群速度与弹性模量的关系与频率有关. 当频率一定时, 不同导波模式的群速度与弹性模量的关系也不相同. 从图 5 可以看出, 当频率为 0.5 MHz 时,  $L(0, 1)$ ,  $L(0, 2)$

各个模式的极大值点. 其中, 曲线为理论频散曲线, 与仿真结果进行对比, 圆点为对时频图进行膨胀处理后得到的各个模式对应的极大值. 图 9(a) 和 (b) 对应的弹性模量为初始值分别为 70% 和 40%, 传播距离都为 140 m; 图 10(a) 和 (b) 对应的弹性模量初始值都为 80%, 传播距离分别为 100 mm 和 160 mm.

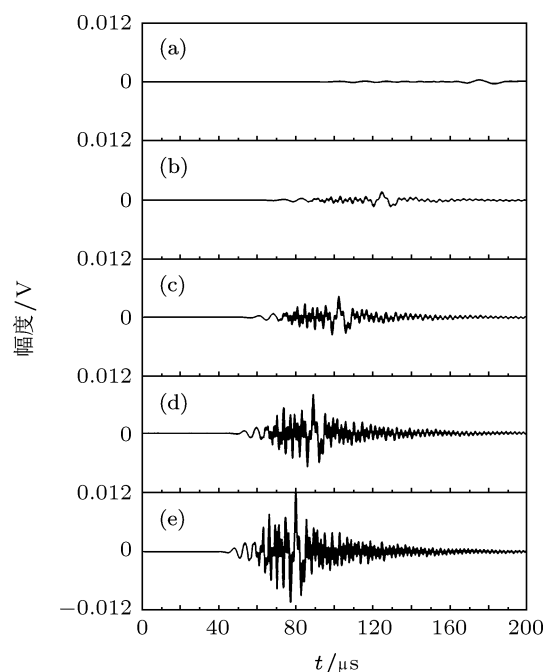


图 8 长骨中的仿真波形, 弹性模量为初始值的: (a) 20%; (b) 40%; (c) 60%; (d) 80%; (e) 100%. 其中传播距离为 100 mm

和  $L(0, 3)$  模式的群速度随弹性模量的增加而增大, 且  $L(0, 1)$  模式的线性度最高. 而  $L(0, 4)$  和  $L(0, 5)$  模式的群速度与弹性模量呈非线性的变化.

从导波位移分布 (图 6) 的特点来看, 由于骨材料的衰减, 导波能量随频率的升高而逐渐降低, 主要集中在低频段 (0—0.2 MHz) 内, 包含两个模式  $L(0, 1)$  和  $L(0, 2)$ , 其中  $L(0, 1)$  模式的能量较高. 在中频段 (0.2—0.5 MHz) 内存在除  $L(0, 5)$  之外的四个模式,  $L(0, 2)$  模式的能量最大. 而高频段 (0.5 MHz 以上),  $L(0, 5)$  模式的能量显著,  $L(0, 4)$  模式最低.

有限差分法仿真的时域波形 (图 7 和图 8) 显示出, 传播距离的增加以及弹性模量的降低都会使导波的幅度减少, 导波传播的时间变长. 但各个模式的导波在时间上混叠在一起, 无法进行分辨. 图 9 和图 10 为导波的 STFT 时频图, 可以看到, 各个导

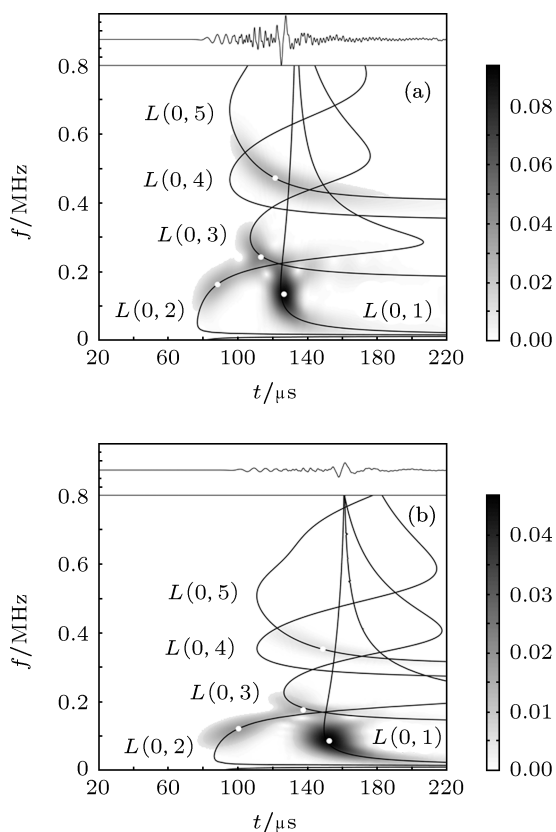


图9 传播距离为 140 mm, 弹性模量为初始值的 (a) 70%; (b) 40% 时的仿真波形、STFT 时频图, 以及对应的理论频散曲线

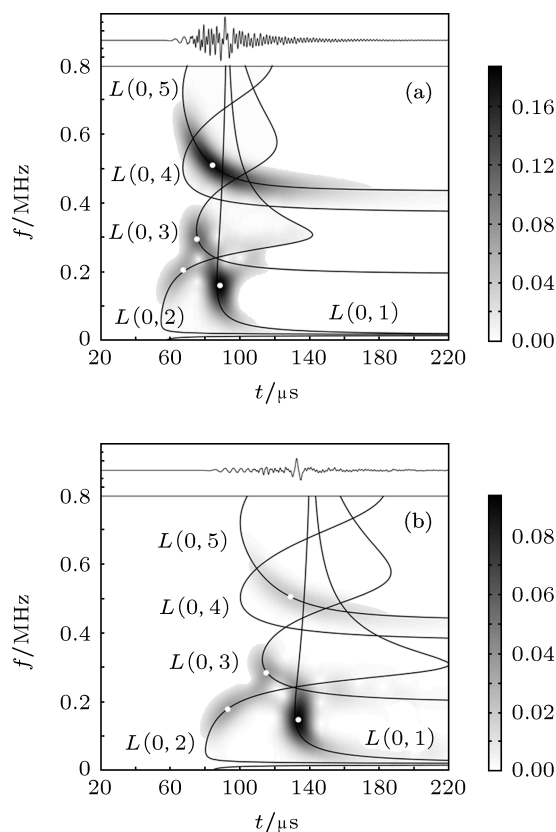


图10 弹性模量为初始值的 80% 时的仿真波形、STFT 时频图以及理论频散曲线, 传播距离为 (a) 100 mm; (b) 160 mm

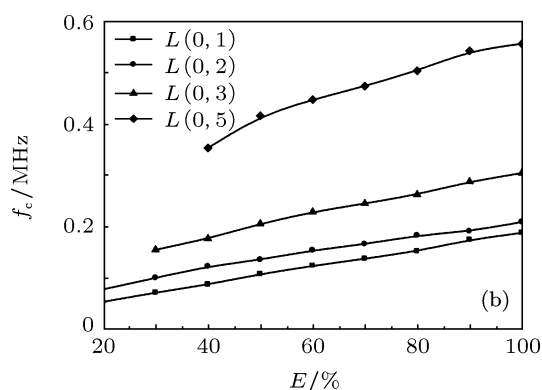
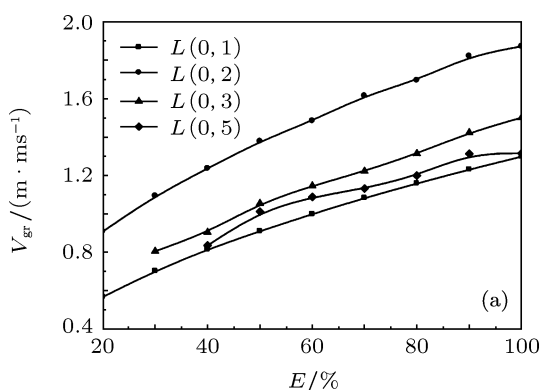


图11 传播距离为 140 mm 时, 四个模式的群速度和中心频率与弹性模量的关系: (a) 群速度; (b) 中心频率

波模式分布在不同的频率范围内, 再与理论计算得到的频散曲线进行对比, 可以清晰的分辨出不同的导波模式, 其中因  $L(0, 4)$  模式的能量太小, 未能显示在时频图中. 其余四个模式理论群速度和仿真群速度的相关系数都大于 0.99, 说明本文所采用的有限差分仿真结果与理论计算结果非常符合.

本文还具体分析了导波的衰减、群速度和中心频率与骨材料弹性模量的关系. 首先, 从图 11(a) 中可以看出, 四个导波模式的群速度与弹性模量基本呈线性关系, 弹性模量越大, 群速度越高,  $L(0, 5)$  模式的线性度稍差,  $L(0, 2)$  模式的群速度的值最高. 此外, 导波中心频率随弹性模量的增加而线性

增大,如图 11(b) 所示,其中  $L(0,5)$  的中心频率最高. 而导波衰减与弹性模量呈负相关,弹性模量越高,导波的衰减越小(图 12),其中  $L(0,1)$  模式的衰减最小, $L(0,5)$  模式衰减较大. 并且,导波的衰减会随着传播距离的增加而变大(图 13).

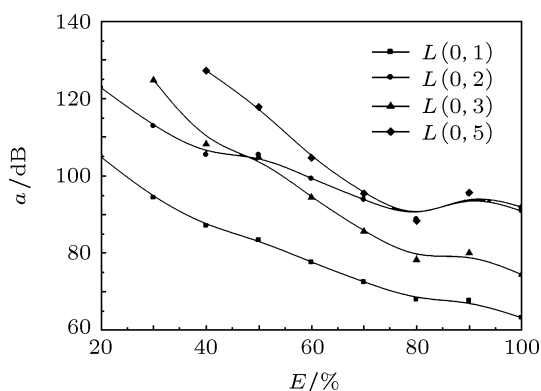


图 12 传播距离为 140 mm, 导波能量衰减与弹性模量的关系

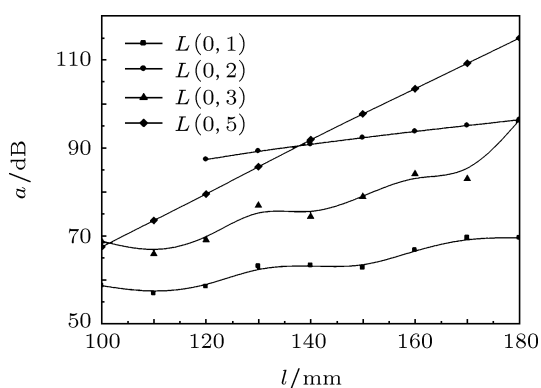


图 13 弹性模量为初始值时, 导波能量衰减与传播距离的关系

由以上结果可见超声导波的群速度、中心频率和衰减均与骨材料弹性模量的变化有关,其中,导波的群速度、中心频率随弹性模量的增大而线性增加,而衰减则随弹性模量的增大而减小. 但不同模式的导波对模量变化的敏感程度不同. 在低频范围内, $L(0,1)$  模式能量较大,容易检测. 而在高频段内, $L(0,5)$  模式对模量变化较为敏感. 从微观角度分析,弹性模量表征材料内部质点间结合力的大小,弹性模量越大,结合力越强,那么已振动的质点更容易带动相邻质点发生振动,声波更容易向前传播,在宏观上就表现为声波群速度的增大,因此超

声导波的群速度会随弹性模量的增大而增大. 当导波在黏弹性材料中传播时,其应变滞后于应力,一部分机械能会转化为热能而发生衰减,若弹性模量升高,应变减小,则超声导波的衰减也会随之减小. 并且,这种因应力与应变不同步而造成的衰减还与导波频率有关,高频衰减较强,低频衰减相对较弱,所以当弹性模量降低时,高频部分衰减更加剧烈,致使导波中心频率向低频移动,反之,当弹性模量升高时,导波的中心频率会随之增大.

这些结果说明当长骨发生疲劳时,其骨材料弹性模量的降低会使超声导波的传播特性也发生相应的变化. 因此,可选择合适模式的超声导波对长骨进行测量,并根据导波传播特性的改变得出长骨弹性模量的变化,进而通过弹性模量的变化来对长骨的疲劳程度进行诊断.

本文采用管状、黏弹性介质的模型准确的模拟了超声导波在长骨中的传播过程,并通过探讨骨材料的弹性模量对导波传播特性的影响,为长骨弹性模量的测量提供了一种思路,并为骨疲劳损伤的超声导波检测方法提供了理论基础. 当然,本文的工作也有一些不足之处,比如,未考虑激励声源的频率、入射角度、长骨模型的几何尺寸以及骨材料的其他特性参数(密度、泊松比、黏度等)的变化对导波传播特性的影响. 并且,本文采用的有限差分法仿真采用了管状的长骨模型,使三维立体的模型简化到二维平面上来处理,但实际长骨并不是严格的圆形管状结构. 对这些问题的进一步研究,将会在以后的工作中加以进行.

## 6 结论

本文在考虑长骨材料弹性模量的基础上,对长骨进行数学建模,并采用理论分析和模拟仿真的方法对长骨中超声导波的传播机理进行了研究. 结果表明,长骨材料的弹性模量与导波传播特性参量密切相关,其中,各个导波模式的衰减随弹性模量的增加而减小,而群速度和中心频率均随弹性模量的增加而线性增加. 因此,由超声导波的传播特性参量可以反映出长骨弹性模量的变化,从而为骨疲劳的早期诊断提供了一种可能的方法.



- [1] Lee T C, O'Brien F J, Taylor D 2000 *Int. J. Fatigue* **22** 847
- [2] Akkus O, Rimmnac C M 2001 *J. Biomech.* **34** 757
- [3] Zioupos P, Casinos A 1998 *J. Biomech.* **31** 825
- [4] Magnusson H I, Ahlborg H G, Karlsson C, Nyquist F, Karlsson M K 2003 *Am. J. Sports Med.* **31** 596
- [5] Pidaparti R M, Vogt A 2001 *J. Biomed. Mater. Res.* **59** 282
- [6] Haddock S M, Yeh O C, Mummaneni P V, Rosenberg W S, Keaveny T M 2004 *J. Biomech.* **37** 181
- [7] Deng M X, Pei J F 2010 *Sci. China Ser. G-Phys. Mech. Astron.* **53** 1286
- [8] Pruell C, Kim J Y, Qu J, Jacobs L J 2009 *Smart Mater. Struct.* **18** 035003
- [9] Bossy E, Talmant M, Laugier P 2002 *J. Acoust. Soc. Am.* **112** 297
- [10] Lee K I, Yoon S W 2004 *J. Acoust. Soc. Am.* **115** 3210
- [11] Moilanen P, Talmant M, Bousson Valerie, Nicholson P H F, Cheng S L, Timonen J, Laugier P 2007 *J. Acoust. Soc. Am.* **122** 1818
- [12] Bertram A A 1990 *Acoustic Fields and Waves in Solids* (Second Edition) (Florida: Krieger Publishing Company) pp86–97
- [13] Gazis D C 1959 *J. Acoust. Soc. Am.* **31** 568
- [14] Ta D A, Wang W Q 2009 *Ultrasound Med. Biol.* **35** 641
- [15] Ta D A, Liu Z Q, He P F 2003 *Acta Meteriae Compositae Sinica* **20** 130 (in Chinese) [他得安, 刘镇清, 贺鹏飞 2003 复合材料学报 **20** 130]
- [16] Luo G M, Kaufman J J, Chiabrera A, Bianco B, Kinney J H, Haupt D, Ryaby J T, Siffert R S 1999 *Ultrasound Med. Biol.* **25** 5
- [17] Chen Z Q, Liu M H, Lan C H, Chen W, Tang L, Luo Z Q, Yan B R, Lü J H, Hu X W 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3484
- [18] Wang S Y, Liu S B, Le W J L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 084101
- [19] Tang W, Yan Y B, Li Q L, Wu Z S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4173 (in Chinese) [汤炜, 闫玉波, 李清亮, 吴振森 2004 物理学报 **53** 4173]
- [20] Zhang Y Q, Ge D B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4573 (in Chinese) [张玉强, 葛德彪 2009 物理学报 **58** 4573]
- [21] Deniel G, Tobias L, Jürg D 2004 *J. Acoust. Soc. Am.* **116** 3284
- [22] Wang G, Wen J H, Han X Y, Zhao H G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1943 (in Chinese) [王刚, 温激鸿, 韩小云, 赵宏刚 2003 物理学报 **52** 1943]

# Study of bone fatigue evaluation with ultrasonic guide waves based on elastic modulus\*

Zhang Zheng-Gang Ta De-An<sup>†</sup>

(*Department of Electronic Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China*)

(Received 22 September 2011; revised manuscript received 8 December 2011)

## Abstract

How to diagnose the bone fatigue damage at early stages is one of the hot research subjects in bone evaluation field. In this study, the propagation characteristics of ultrasonic guide wave in a long bone under different elastic moduli are analyzed using theoretical calculation and simulation methods. First, theoretical solutions of guided wave in a long bone are calculated. Then, a finite difference time-domain (FDTD) numerical method of simulating the propagation of guide wave in a long bone is presented. The simulation results are in good agreement with the theoretical values. And, the relationship between elastic modulus and the propagation characteristics, including group velocity, central frequency and attenuation, is discussed. The results show that group velocity and central frequency increase with the increase of elastic modulus. However, attenuation decreases with the increase of elastic modulus. Those results demonstrate that the propagation of guide wave can reflect the variation of elastic modulus of long bone, which provides a theoretical basis for evaluating the early stages of fatigue damage in long bone.

**Keywords:** ultrasonic guide waves, long bone fatigue, elastic modulus, finite difference time-domain (FDTD)

**PACS:** 43.35.Cg, 43.20.Hq

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11174060), the Ph.D. Programs Foundation of Ministry of Education of China (Grant No. 20110071130004), the Shanghai Key Scientific and Technological Project (Grant No. 09441900400) and the Program for New Century Excellent Talents in University of Ministry of Education of China (Grant No. NCET-10-0349).

<sup>†</sup> E-mail: tda@fudan.edu.cn