

# 基于小波域可导阈值函数与自适应阈值的脉冲星信号消噪

高国荣 刘艳萍<sup>†</sup> 潘琼

(西北农林科技大学理学院, 杨凌 712100)

(2011年11月8日收到; 2012年1月28日收到修改稿)

脉冲星辐射信号具有极低的信噪比, 传统降噪方法难以在抑制噪声的同时保留其细节信息. 为此, 提出了一种小波域脉冲星信号消噪方法. 在小波域, 利用一种可导的阈值函数和一种自适应阈值选取方法, 对含噪脉冲星信号进行小波域阈值去噪处理, 并利用信噪比 (SNR)、均方根误差 (RMSE)、峰值相对误差 (REPV) 以及峰位误差 (EPP) 四项指标来对去噪效果进行评价. 实验结果表明, 与软阈值与硬阈值法相比, 该方法能在有效去除含噪脉冲星信号中的噪声、显著提高其信噪比的同时, 更有效地保留原始信号中的有用信息, 同时可以获得更小的均方根误差、脉冲峰值相对误差与峰位误差.

**关键词:** 小波, 脉冲星信号, 自适应阈值, 消噪

**PACS:** 97.60.Gb, 43.60.Hj

## 1 引言

脉冲星是一种高速自转、具有强磁场的中子星, 其脉冲辐射信号的周期具有超高的稳定性, 被誉为极端条件下的太空实验室、自然界最稳定的时钟<sup>[1-3]</sup>. 近年来, 脉冲星由于其在计时、定位、导航、天体物理学等领域所突显出来的广阔应用前景而日益受到广泛的关注<sup>[4-7]</sup>. 然而, 由于脉冲星距离地球非常遥远, 其辐射脉冲信号在传播过程中不可避免地受到众多因素 (如色散延迟、散射、相对论效应、地球运动等) 的影响<sup>[7]</sup>, 人类所接收到的脉冲星辐射脉冲信号常常非常微弱且被噪声所淹没. 只有有效滤除脉冲星辐射脉冲信号中的噪声, 提高其信噪比, 提取淹没在噪声中的有用信息, 才能使后续对于脉冲星信号的研究与应用成为可能. 因此, 脉冲星信号降噪对于脉冲星后续的科学、应用研究都具有极其重要的意义.

脉冲星信号是典型的非平稳信号<sup>[8]</sup>, 传统的傅里叶分析方法对于非平稳的脉冲星信号是不适合的. 小波分析作为一种非常典型的时频分析方法, 其具有良好的时频局部性、多分辨率、去相关

性等特点, 在信号处理领域表现出极强的生命力. 1995年, Donoho<sup>[9]</sup>首次提出了基于阈值处理思想的小波域去噪方法. 在国内, 已有一些学者将小波分析应用到脉冲星信号的去噪处理中. 目前利用小波变换去除脉冲星信号噪声的方法主要是硬阈值法与软阈值法<sup>[8,10]</sup>. 由于这两种阈值函数都存在着一些固有的缺陷 (如硬阈值函数的不连续性、软阈值函数导数的不连续性以及由它估计出来的小波系数与被处理信号的小波系数之间存在恒定偏差等), 这些缺陷直接影响了小波域阈值消噪的效果. 本文在对小波域去噪原理分析的基础上, 将一种可导阈值函数和一种自适应阈值选取方法应用到脉冲星辐射信号的去噪处理中, 并分别采用软阈值法、硬阈值法和本文提出的方法对 B1953+29 脉冲星的辐射脉冲信号进行小波域去噪对比实验, 结果表明本文所提出的方法在有效去除噪声的同时能更好地保留原始信号的细节特征.

## 2 含噪脉冲星信号的去噪原理

一个含噪脉冲星辐射信号  $d_i$  可以表示成如下

<sup>†</sup> E-mail: ypliu0626@sina.com

的形式:

$$d_i = f_i + z_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

式中,  $f_i$  为真实脉冲星信号,  $z_i$  为噪声.

对含噪脉冲星信号进行去噪, 就是要尽可能地消除其中的噪声成分  $z_i$ , 获得真实脉冲星信号  $f_i$  尽可能精确的估计值  $\hat{f}_i$ , 也就是使得在  $l^2$  范数意义下最小化如下的风险函数<sup>[11]</sup>

$$\begin{aligned} R(\hat{f}, f) &= \frac{1}{N} \|\hat{f} - f\|^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{f}_i - f_i)^2, \end{aligned} \quad (2)$$

对  $d_i$  进行离散小波变换后, 风险函数就转化为

$$\begin{aligned} R(\hat{f}, f) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{f}_i - f_i)^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j,k} (\hat{v}_{j,k} - w_{j,k})^2. \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $w_{j,k}$ ,  $\hat{v}_{j,k}$  为真实脉冲星信号与估计脉冲星信号的小波系数. 在小波域内对含噪脉冲星信号进行去噪的问题, 就转化为使得上述风险函数 (3) 最小化的问题. 在小波域内信号的能量常常集中在少数幅值较大的系数中, 而噪声信号由于其频率、能量谱相对分散, 所以其小波系数绝对值较小, 且分散于大部分小波系数上, 因此经过小波分解后, 可以认为信号的系数大于噪声的系数, 这样就可以找到一个适当的阈值  $T$ , 通过阈值萎缩的方法对含噪信号进行去噪处理.

### 3 一种可导的阈值函数

Donoho 的小波阈值去噪方法分为软阈值法和硬阈值法. 软阈值函数为:

$$\hat{v}_{j,k} = \text{sign}(v_{j,k}) \max(|v_{j,k}| - T, 0). \quad (4)$$

其含义是将小波系数  $v_{j,k}$  的绝对值和阈值  $T$  进行比较, 小于或等于阈值的系数置 0, 大于阈值的系数修正为其与阈值的差值, 并保持符号不变. 硬阈值函数为:

$$\hat{v}_{j,k} = \begin{cases} v_{j,k}, & |v_{j,k}| \geq T, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (5)$$

即当  $|v_{j,k}|$  小于给定阈值  $T$  时, 将其置零; 当  $|v_{j,k}|$  大于等于给定阈值  $T$  时, 将其保留.

从上述软硬阈值函数的定义可知, 软阈值函数虽然在  $\pm T$  处连续, 但不可导, 而且由软阈值函数

估计出来的无噪信号的小波系数的绝对值总比真实的小波系数的绝对值小  $T$ , 从而影响重构信号对真实信号的逼近程度, 给重构信号带来不可避免的误差; 而对硬阈值函数来说, 虽然由其估计出来的无噪信号的小波系数与真实的小波系数偏差为零, 但其在  $\pm T$  处既不连续, 又不可导, 从而使消噪后的信号在信号突变处产生振铃现象. 一个好的阈值函数应该是既要使估计出的小波系数与原始小波系数的偏差尽可能小, 又要在小波域连续, 最好还具有一阶乃至高阶导数. 文献 [12] 就构建了一种满足上述要求的新的的小波阈值函数. 新的小波阈值函数为:

$$\begin{aligned} \eta(x, T, m, k) &= \begin{cases} x - 0.5 \cdot \frac{T^m \cdot k}{x^{m-1}} + (k-1) \cdot T, & x > T, \\ 0.5 \cdot \frac{|x|^{m+[(2-k)/k]} \cdot k}{T^{m+[(2-2k)/k]}} \cdot \text{sign}(x), & |x| \leq T, \\ x + 0.5 \cdot \frac{(-T)^m \cdot k}{x^{m-1}} - (k-1) \cdot T, & x < -T, \end{cases} \\ &= \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $x$  为小波系数,  $m, k$  为阈值函数调整因子, 通过调整它们的值, 可以增强阈值函数在实际去噪应用中的灵活性. 参数  $m$  确定阈值函数的形状;  $k$  确定阈值函数的渐近线, 取值在 0 到 1 之间. 若  $k \rightarrow 0$ , 则新阈值函数趋向于软阈值函数; 若  $k = 1$ , 则新阈值函数趋向于硬阈值函数. 新的阈值函数不仅克服了硬阈值函数在阈值附近的不连续性和软阈值函数在修正小波系数时存在恒定偏差的缺点, 而且还保留了软硬阈值函数原有的优点, 同时该阈值函数还是一阶可导的. 相对于软、硬阈值函数来说, 该阈值函数是一个更优、更灵活的选择.

### 4 自适应阈值选取规则

文献 [13] 指出, 含噪信号经小波分解后, 真实信号的小波系数幅值较大且在局部邻域存在较强的尺度内相关性, 而噪声的小波系数幅值通常较小且尺度内相关性也很弱. 据此, 本文提出一种基于邻域窗口的自适应阈值选取方法.

对每一个高频子带  $D_j$ , 记  $v_{j,n}$  为位置  $n$  处的小波系数,  $W$  为以  $v_{j,n}$  为中心、大小为  $M$  的邻域窗,  $M$  可取为 3, 5, 7 等. 通过合理设置局部邻域窗口中心位置小波系数的阈值, 可实现自适应小波系数的萎缩. 要确定邻域窗口中心位置小波系数的阈

值,首先需要按下式计算各层的统一阈值<sup>[14]</sup>

$$T_j = \sigma_{n,j} \sqrt{2 \cdot \ln \left( \frac{N}{2^j} \right)}, \quad (7)$$

其中:  $\sigma_{n,j}$  为高频子带  $D_j$  内噪声的标准差,其估计为

$$\sigma_{n,j} = \frac{\text{Median} \{ |v_{j,n}| \}}{0.6745}, \quad (8)$$

令  $\sigma_b^2$  为高频子带  $D_j$  内邻域窗  $W$  中含噪信号小波系数的方差,估计方法如下:

$$\sigma_b^2 = \frac{1}{M} \sum_{v_{j,k} \in W} v_{j,k}^2, \quad (9)$$

则邻域窗内信号系数方差的估计为  $\sigma_s^2 = \max \{ \sigma_b^2 - \sigma_{n,j}^2, 0 \}$ . 于是,高频子带  $D_j$  内邻域窗中心位置小波系数的阈值可表示为

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sigma_{n,j}^2}{\sigma_s^2 + \sigma_{n,j}^2} \cdot T_j \\ &= \frac{\sigma_{n,j}^3}{\sigma_s^2 + \sigma_{n,j}^2} \cdot \sqrt{2 \cdot \ln \left( \frac{N}{2^j} \right)}, \end{aligned} \quad (10)$$

在小波域进行阈值去噪时,如果阈值过小,就会保留较多的噪声,使信号中噪声成分的去噪不彻底.因此,在实际使用时,为避免阈值过小,我们将高频子带  $D_j$  内邻域窗  $W$  中心位置小波系数的阈值修正如下:

$$T = \begin{cases} \frac{\sigma_{n,j}^2}{\sigma_s^2 + \sigma_{n,j}^2} \cdot T_j, & \text{if } \frac{\sigma_{n,j}^2}{\sigma_s^2 + \sigma_{n,j}^2} \geq \alpha \\ \alpha \cdot T_j, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

其中,  $\alpha$  为介于 0.5 与 1 之间的参数.  $\alpha$  取值越大,滤出的高频成分就越多,消噪后的信号越平滑;反之,  $\alpha$  取值越小,保留的高频成分就越多,消噪后的信号就包含更多的细节.

### 5 实验结果及分析

本文选取脉冲星 B1953+29 辐射信号进行实验. 脉冲星辐射信号来自欧洲脉冲星网络 EPN 数据库 (The European Pulsar Network Data Archive). 该脉冲星辐射信号的标准轮廓如图 1 所示. 实验中,对其添加一定量的高斯白噪声来模拟含噪脉冲星辐射信号 (含噪脉冲星辐射信号如图 2), 含噪信号的信噪比为 21.57 dB, 然后用 ‘db4’ 小波对含噪脉冲星辐射信号进行 6 尺度一维小波分解, 分别用 Donoho 的软阈值法、硬阈值法、本文方法 (参数  $m = 4, k = 1, \alpha = 0.9$ ) 对含噪脉冲星辐射信号

进行去噪处理, 比较三种方法在该脉冲星辐射信号去噪中的有效性. 不同方法对含噪脉冲星信号去噪后的效果见图 3—图 5.

利用信噪比 (SNR)、均方根误差 (RMSE)、峰值相对误差 (REPV) 以及峰位误差 (EPP) 四项指标来对去噪效果进行评价, 其中, 峰值相对误差 (REPV) 以及峰位误差 (EPP) 定义如下:

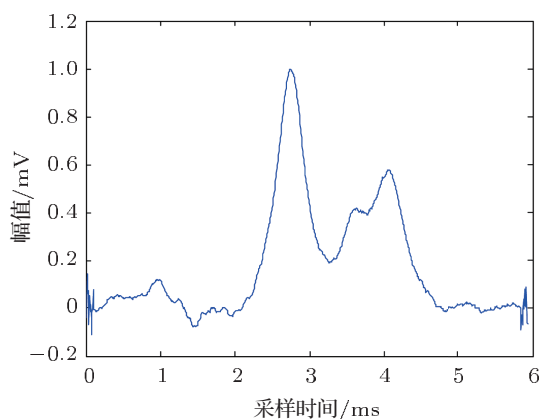


图 1 脉冲星辐射信号标准轮廓

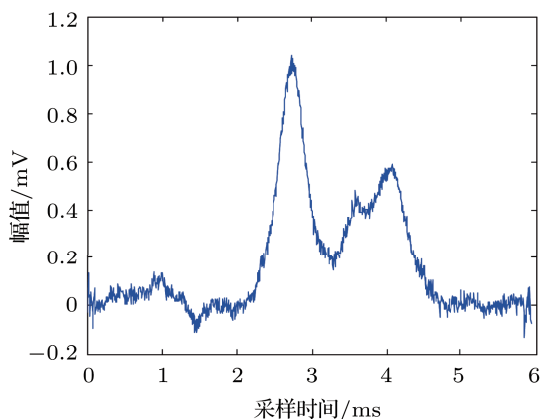


图 2 含噪脉冲星信号

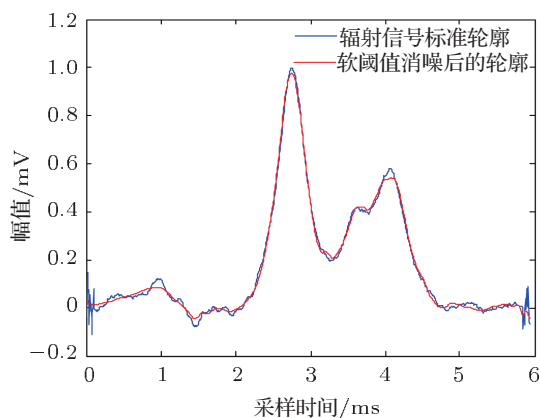


图 3 软阈值法消噪信号与标准轮廓对比

表1 不同方法去噪后各项指标的对比

评价指标	软阈值法	硬阈值法	本文方法
信噪比 (SNR)/dB	22.6973	24.9334	25.9373
均方根误差 (RMSE)	0.0179	0.0138	0.0123
峰值相对误差 (REPV)	2.48%	0.1%	0.03%
峰位误差 (EPP)/s	$6.0000 \times 10^{-6}$	$1.1000 \times 10^{-5}$	$6.0000 \times 10^{-6}$

峰位误差

$$EPP = |P_o - P_d|, \quad (13)$$

其中  $P_o$  为标准脉冲星信号的脉冲峰位值,  $P_d$  为去噪后脉冲星信号的脉冲峰位值.

显然, 信噪比越高, 均方根误差、峰值相对误差以及峰位误差越小, 说明去噪的效果越好. 表 1 列出了用不同方法去噪的各项指标的对比.

从图 3—5 及表 1 可以看出, 软阈值法虽然可以有效地平滑高频噪声, 使去噪后的脉冲星辐射信号很平滑, 但是该方法在对高频噪声进行平滑的同时也对有用信号进行了平滑, 结果在降低噪声的同时也平滑了脉冲星信号中的锐变尖峰成分, 使脉冲峰的高度产生了相对较大的偏差, 进而损失了这些突变点可能携带的重要信息. 相对于软阈值法而言, 硬阈值法在信噪比、均方根误差、峰值相对误差方面都有较大的提升, 但脉冲峰位置误差较大; 而本文提出的方法在信噪比、均方根误差、峰值相对误差方面都远远优于其他两种方法, 在峰位置误差上, 也优于硬阈值法, 与软阈值法相当. 试验结果表明: 本文提出的方法比软阈值法与硬阈值法更适合于脉冲星辐射信号的去噪处理.

6 结论

将一种可导阈值函数和一种自适应阈值选取方法应用到小波域脉冲星辐射信号的去噪处理中. 试验结果表明: 与软阈值与硬阈值法相比, 该方法能在有效提高脉冲星辐射信号信噪比的同时, 有效降低其均方根误差, 峰值相对误差以及峰位置误差, 从而更有效地保留原始信号的细节特征, 是一种比小波域软阈值法与硬阈值法更有效的脉冲星辐射信号消噪方法, 具有一定的实用价值.

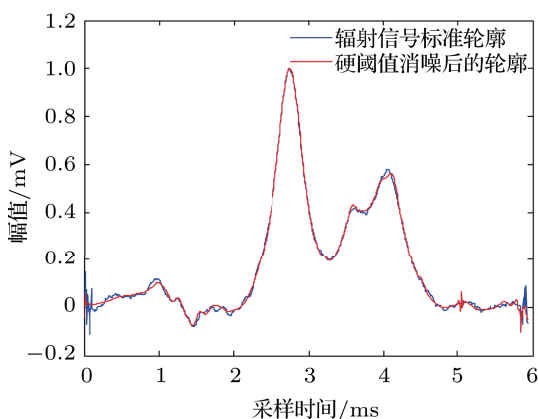


图4 硬阈值法消噪信号与标准轮廓对比

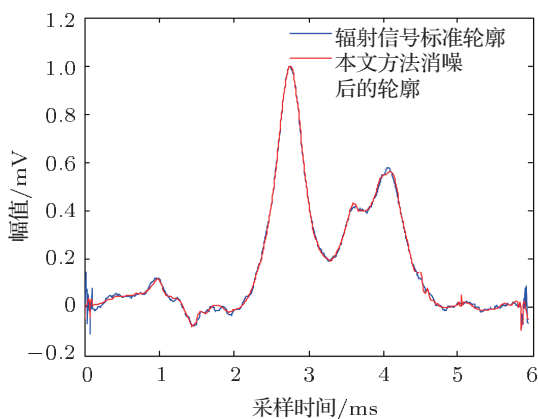


图5 本文方法消噪信号与标准轮廓对比

峰值相对误差

$$REPV = \frac{|V_o - V_d|}{V_o} \cdot 100\% \quad (12)$$

其中  $V_o$  为标准脉冲星信号的脉冲峰值,  $V_d$  为去噪后脉冲星信号的脉冲峰值.

[1] Ni G R, Yang T G, Ke X Z, Zhao D L 2000 *Journal of Xidian University* 27 781 (in Chinese) [倪广仁, 杨廷高, 柯熙政, 赵当丽 2000 西安电子科技大学学报 27 781]  
 [2] Su Z, Xu L P, Wang Y, Xie Z H, Luo N 2010 *Systems Engineering*

*and Electronics* 32 2501 (in Chinese) [苏哲, 许录平, 王勇, 谢振华, 罗楠 2010 系统工程与电子技术 32 2501]  
 [3] Sun J R, Xu L P, Wang T 2010 *Journal of Xidian University* 37 1059 (in Chinese) [孙景荣, 许录平, 王婷 2010 西安电子科技大学

- 学学报(自然科学版) **37** 1059]
- [4] Xie Z H, Xu L P, Ni G R 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6683 (in Chinese) [谢振华, 许录平, 倪广仁 2008 物理学报 **57** 6683]
- [5] Lan S C, Xu G D, Zhang J X 2010 *Systems Engineering and Electronics* **32** 650 (in Chinese) [兰盛昌, 徐国栋, 张锦绣 2010 系统工程与电子技术 **32** 650]
- [6] Li J X, Ke X Z 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 8304 (in Chinese) [李建勋, 柯熙政 2010 物理学报 **59** 8304]
- [7] Zhong C X, Yang T G 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6157 (in Chinese) [仲崇霞, 杨廷高 2007 物理学报 **56** 6157]
- [8] Zhu X M, Liao F C, Tang Y Y 2006 *Acta Astronomica Sinica* **47** 328 (in Chinese) [朱晓明, 廖福成, 唐远炎 2006 天文学报 **47** 328]
- [9] Donoho D L 1995 *IEEE Transactions on IT* **41** 613
- [10] Wang L, Ke X Z, Ni G R 2008 *Astronomical Research & Technology* **5** 49 (in Chinese) [汪丽, 柯熙政, 倪广仁 2008 天文研究与技术(国家天文台台刊) **5** 49]
- [11] Zhang X P, Mita D D 1998 *IEEE Signal Processing Letters* **5** 265
- [12] Mehdi N, Hossein N P 2009 *Neurocomputing* **72** 1012
- [13] Yan H, Pan Y J, Liu J L, Zhang X C 2009 *Chinese Journal of Scientific Instrument* **30** 198 (in Chinese) [闫河, 潘英俊, 刘加伶, 张小川 2009 仪器仪表学报 **30** 198]
- [14] Shark L K, Yu C 2000 *Electronics Letters* **36** 581

# A differentiable thresholding function and an adaptive threshold selection technique for pulsar signal denoising

Gao Guo-Rong Liu Yan-Ping<sup>†</sup> Pan Qiong

(College of Science, Northwest A & F University, Yangling 712100, China)

(Received 8 November 2011; revised manuscript received 28 January 2012)

## Abstract

Because of the extremely low signal-to-noise ratio of pulsar signals, it is difficult to suppress noise while preserving details by the traditional denoise methods. Therefore, a wavelet domain pulsar signal denoising method based on a differentiable thresholding function and an adaptive threshold selection technique is presented. The signal-to-noise ratio(SNR), the root mean square error(RMSE), the relative error of the peak value (REPV) and the error of the peak position (EPP) are used to evaluate the performance of the proposed denoising method. Experimental results show that the proposed method can remove the pulsar signal noise and keep the useful information effectively. At the same time, it can achieve a higher PSNR, a lower RMSE, a lower REPV and a lower EPP than the soft thresholding and hard thresholding methods.

**Keywords:** wavelet, pulsar signal, adaptive threshold, denoising

**PACS:** 97.60.Gb, 43.60.Hj

<sup>†</sup> E-mail: ypliu0626@sina.com