变系数非线性发展方程的 G'/G 展开解*

庞晶† 靳玲花 赵强

(内蒙古工业大学理学院, 呼和浩特 010051)

(2011 年 10 月 17 日收到; 2011 年 12 月 23 日收到修改稿)

用近年来提出的 (G'/G) 展开法首次尝试了对变系数非线性发展方程的求解, 并以两类变系数非线性 KdV 方程为例, 且成功得到了新的精确解. 实践证明: (G'/G) 展开法不仅适用于常系数非线性发展方程, 而且还很好地适用于变系数非线性方程, 具有广泛的应用前景.

关键词: (G'/G) 展开法, 变系数非线性 KdV 方程, 精确解

PACS: 02.30.IK, 02.30.Jr

1 引 言

众所周知, 非线性发展方程是一类相应自然现象的高度精简和浓缩, 该类方程的求解问题一直是物理学家和数学家们广泛关注和研究的重要课题. 由于其本身的复杂性, 所以还很难用一个统一的方法去求解. 近几十年来, 随着计算机符号计算的出现和广泛应用, 人们构造了许多种有效的求解方法, 比如齐次平衡法、指数函数法、Jacobi 椭圆函数展开法、试探函数法、改进的 tanh 方法、截断展开法、自 Bäcklund 变换法, 等等. 这些方法大多都用在求解常系数非线性发展方程上, 而对变系数非线性发展方程求解的研究历史还很短. 从进一步研究的现实意义看, 变系数非线性发展方程能更好地反映真实自然现象, 研究其基本理论非常有必要. 本文就是在这样的背景下提出来的.

下面考虑被科学家们广泛关注的两类非线性变系数波方程:

$$u_t + a_{(t)}uu_x + b_{(t)}u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

$$u_t + (\sigma_{(t)} + \mu_{(t)}x)u_x + \alpha_{(t)}uu_x + \beta_{(t)}u_{xxx} + \gamma_{(t)}u = 0. \tag{2}$$

文献 [1] 用 Jacobi 椭圆函数展开法得到了这两类波方程的类椭圆余弦波解和孤子解; 文献 [2] 用试探方程法得到了这两类方程的类椭圆余弦波解和孤子解之外, 还获得了三角函数解、有理函数解; 文献 [3] 用改进的 tanh 方法也求得了这两类方程的许多显式精确解; 而文献 [4—7] 分别利用改进的 tanh 函数方法、截断展开法、经典李对称方法、用普通的 KdV 方程做变换的方法求解了广义 KdV 方程并获得了该方程的孤子解、类孤子解、孤波解、有理函数解、三角函数解, 等等; 在文献 [8] 中用自 Bäcklund 变换法求解了变系数耦合 KdV 方程组并得到了多重孤立子解; 文献 [9] 则直接用解的构造求解了上述两类以及广义变系数 KdV 方程,等等.

近年来, 王明亮等人提出了一种新的求解法: (G'/G) 展开法. 这里的 $G = G(\xi)$ 是一个二阶线性常微分方程的解. 该法的主要思想是: 非线性演化方程的行波解可以表示成 (G'/G) 的多项式, 多项式的次数可由齐次平衡原则确定; 多项式的系数可通过解一个非线性代数方程组求得; 非线性代

* 国家教育部博士点基金 (批准号: 20070128001)、内蒙古自然科学基金 (批准号: 2010MS0115) 和内蒙古工业大学自然科学基金 (批准号: ZS201035) 资助的课题.

† E-mail: pang_j@imut.edu.cn

数方程组是应用 (G'/G) 展开法过程中产生的. 这种方法很方便有效、简洁实用, 且已被证明在常系数 (如文献 [10—13]) 非线性方程求解方面有非常广泛的应用, 而对变系数发展方程求解的研究还涉及很少. 因此本文主要是将这种方法尝试应用到求变系数非线性发展方程中去, 并以 (1) 和 (2) 式为例展开求解. 实践证明 (G'/G) 展开法对变系数非线性发展方程仍很高效, 且具有广泛的应用前景, 并得到了新的精确解.

2 第一类变系数 KdV 方程的解

这里我们将 (G'/G) 展开法中的行波变换改进, 记为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u(\xi),\\
\xi &= k(x)+c(t)+l,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

待定函数 $k(x)$ 和 $c(t)$ 分别是自变量的单变元函数. 将 $G=G(\xi)$ 满足的二阶常微分方程用文献 [14] 中的形式 (为运算简便起见):

$$
G''(\xi)+\lambda G(\xi)=0, \tag{4}
$$

因此将 (3) 式代入 (1) 式中变形为

$$
\begin{aligned}
&[c'(t)+b(t)k'''(x)]u'+a(t)k'(x)uu'\\
&+b(t)[k''(x)k'(x)+k'(x)]u''+b(t)k'(x)^3u'''\\
&=0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

通过齐次平衡原则, 平衡 (5) 式中非线性项和最高阶微分项得 $n=2$, 则设 (5) 式的解为

$$
u(\xi)=a_0+a_1\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}+a_2\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2. \tag{6}
$$

将 (6) 式代入 (5) 式, 并利用 (4) 式化简为关于 (G'/G) 的各幂次多项式, 并令各幂次系数为零, 得到如下一组符号代数方程组:

$$
12b(t)k'(x)^2+a_2a(t)=0, \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
&2a_1b(t)k'(x)^2-2a_2b(t)(k''(x)\\
&+2)+a_1a_2a(t)=0,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&-40a_2\lambda b(t)k'(x)^3+2a_1b(t)(k''(x)k'(x)\\
&+2k'(x))-(2a_0a_2+a_1^2+2a_2^2\lambda)a(t)k'(x)\\
&-2a_2(b(t)k'''(x)+c'(t))\\
&=0,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&-8a_1\lambda b(t)k'(x)^3+8a_2\lambda b(t)(k''(x)k'(x)\\
&+2k'(x))-(a_0a_1+3a_1a_2\lambda)a(t)k'(x)\\
&-a_1(b(t)k'''(x)+c'(t))\\
&=0,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
&-16a_2\lambda b(t)k'(x)^3+2a_1b(t)(k''(x)k'(x)\\
&+2k'(x))-(2a_0a_2+a_1^2)a(t)k'(x)\\
&-2a_2(b(t)k'''(x)+c'(t))\\
&=0,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2a_1\lambda b(t)k'(x)^3+2a_2\lambda b(t)(k''(x)k'(x)\\
&+2k'(x))-a_0a_1a(t)k'(x)\\
&-a_1(b(t)k'''(x)+c'(t))\\
&=0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

由 (7), (8) 两式可以得到:

$$
a_1=-\frac{12b(t)(k''(x)+2)}{5a(t)}, \tag{13}
$$

$$
a_2=-\frac{12b(t)k'(x)^2}{a(t)}. \tag{14}
$$

再由 Mathematics 化简 (9)—(12) 式得

$$
k''(x)=-2, \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&b(t)=Ca(t),\\
&c'(t)+a_0a(t)k'(x)+8b(t)\lambda k'(x)^3=0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

则由 (13)—(16) 有:

$$
\begin{aligned}
k'(x)&=-2x+C_1,\\
k(x)&=-x^2+C_1x+C_2,\\
a_1&=0,\\
c(t)&=C_3\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau,\\
a_0&=-\frac{C_3}{k'(x)}-8C\lambda k'(x)^2,\\
a_2&=-12Ck'(x)^2,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

其中 C_1, C_2, C_3 均为积分常数, C 为任意常数.

最后, 将 (4) 式的解代入 (6) 式中, 即得方程 (1) 如下的精确解:

$$
\begin{aligned}
u_1=&-\frac{C_3}{k'(x)}-8C\lambda k'(x)^2+12\lambda Ck'(x)^2\\
&\times\frac{\left[A_2\cosh(\sqrt{\lambda}\xi)+A_1\sinh\left(\sqrt{\lambda}\xi\right)\right]^2}{\left[A_1\cosh(\sqrt{\lambda}\xi)+A_2\sinh\left(\sqrt{\lambda}\xi\right)\right]^2}\quad(\lambda<0),
\end{aligned}
$$

$$u_2 = -\frac{C_3}{k'(x)} + 4\lambda Ck'(x)^2 - 12\lambda Ck'(x)^2 \times \frac{A_1^2 + A_2^2}{\left[A_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\xi\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\xi\right)\right]^2} \quad (\lambda > 0),$$

其中 $\xi = -x^2 + C_1 x + C_2 + C_3 \int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau + l.$

3 第二类非线性变系数 KdV 方程的解

将 (3) 式代入 (2) 式则方程化为

$$\begin{aligned}&\{c'(t) + [\sigma(t) + \mu(t)x]k'(x) + \beta(t)k'''(x)\}u'\\&+\beta(t)[k''(x)k'(x) + 2k'(x)]u''\\&+\beta(t)k'(x)^3u''' + \alpha(t)k'(x)uu' + \gamma(t)u\\&= 0.\end{aligned} \tag{18}$$

设其解的形式为

$$u(\xi) = a_0 + a_1\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} + a_2\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2$$

将上式代入 (18) 式, 并利用 (4) 式化简为关于 (G'/G) 的各幂次多项式, 并令各幂次系数为零, 得到如下代数方程组:

$$12\beta(t)k'(x)^2 + a_2\alpha(t) = 0, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&2a_1\beta(t)k'(x)^2 - 2a_2\beta(t)(k''(x) + 2)\\&+a_1a_2\alpha(t) = 0,\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&-2a_2\{c'(t) + \beta(t)k'''(x)\\&+[\sigma(t) + \mu(t)x]k'(x)\}\\&+2a_1\beta(t)(k''(x)k'(x) + 2k'(x))\\&-40a_2\lambda\beta(t)k'(x)^3 - (2a_0a_2\\&+a_1^2 + 2a_2^2\lambda)\alpha(t)k'(x)\\&= 0,\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}&-a_1\{c'(t) + \beta(t)k'''(x)\\&+[\sigma(t) + \mu(t)x]k'(x)\}\\&+8\lambda a_2\beta(t)(k''(x)k'(x) + 2k'(x))\\&-8a_1\lambda\beta(t)k'(x)^3 - (3\lambda a_1a_2\\&+a_1a_0)\alpha(t)k'(x) + a_2\gamma(t)\\&= 0,\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}&-2a_2\lambda\{c'(t) + \beta(t)k'''(x)\\&+[\sigma(t) + \mu(t)x]k'(x)\}\\&+2\lambda a_1\beta(t)(k''(x)k'(x) + 2k'(x))\\&-16a_2\lambda^2\beta(t)k'(x)^3 - (2\lambda a_0a_2\\&+\lambda a_1^2)\alpha(t)k'(x) + a_1\gamma(t)\\&= 0,\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}&-\lambda a_1\{c'(t) + \beta(t)k'''(x)\\&+[\sigma(t) + \mu(t)x]k'(x)\}\\&+2\lambda^2a_2\beta(t)(k''(x)k'(x) + 2k'(x))\\&-2a_1\lambda^2\beta(t)k'(x)^3)\\&-\lambda a_1a_0\alpha(t)k'(x) + a_0\gamma(t)\\&= 0.\end{aligned} \tag{24}$$

同方程 (1) 的解法, 由 (19), (20) 两式可以得到:

$$a_1 = -\frac{12\beta(t)(k''(x) + 2)}{5\alpha(t)}, \tag{25}$$

$$a_2 = -\frac{12\beta(t)k'(x)^2}{\alpha(t)}. \tag{26}$$

再由 Mathematics 计算 (21)—(24) 可得:

$$\begin{aligned}&\gamma(t) \neq 0,\\&a_0 = \lambda a_2,\\&k''(x) = -2,\\&\beta(t) = C\alpha(t),\\&c'(t) + [\sigma(t) + \mu(t)x]k'(x)\\&-4\lambda C\alpha(t)k'(x)^3 = 0.\end{aligned}$$

所以由上述式可得:

$$\begin{aligned}&k'(x) = -2x + C_1,\\&k(x) = -x^2 + C_1x + C_2\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}&a_0 = -12\lambda Ck'(x)^2,\\&a_1 = 0,\\&a_2 = -12Ck'(x)^2\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}c(t) = {}& C_3 - k'(x)\int_0^t \sigma(\tau)\mathrm{d}\tau\\&- xk'(x)\int_0^t \mu(\tau)\mathrm{d}\tau\\&+ 4\lambda Ck'(x)^3\int_0^t \alpha(\tau)\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{29}$$

其中 C_1, C_2, C_3 均为积分常数, C 为常数.

因此再将 (4) 式的解代入 (6) 即得方程 (2) 的如下精确解:

$$u_3 = -12\lambda Ck'(x)^2 + 12\lambda Ck'(x)^2$$

$$\times \frac{\left[A_2 \cosh\left(\sqrt{\lambda}\xi\right) + A_1 \sinh\left(\sqrt{\lambda}\xi\right)\right]^2}{\left[A_1 \cosh\left(\sqrt{\lambda}\xi\right) + A_2 \sinh\left(\sqrt{\lambda}\xi\right)\right]^2}$$

$$(\lambda < 0),$$

$$u_4 = -12\lambda C k'(x)^2 \times \frac{A_1^2 + A_2^2}{\left[A_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\xi\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\xi\right)\right]^2}$$

$$(\lambda > 0),$$

其中 $\xi = -x^2 + C_1 x + C_2 + c(t) + l$.

至此, 可以看出解 u_1—u_4 是本文首次给出. 变系数非线性发展方程的求解是非常困难的, 求解过程也更为复杂. 与其他文献中求解的方法相比较, 本文用 (G'/G) 展开法其优势还是明显的. 由于 (4) 式是一个普通的常系数二阶微分方程 (还可以用文献 [10] 中的形式), 所以它的通解很容易求得, 这里由于篇幅所限不再赘述.

4 结 论

本文应用新近提到的 (G'/G) 展开法以两类经典的变系数 KdV 方程为例, 首次尝试对变系数非线性方程求解, 并最终成功得到了新的精确解. 因此可以得出结论: (G'/G) 展开法不仅广泛适用于常系数非线性发展方程, 而且仍很好地适用于变系数非线性发展方程, 还可以进一步推广应用.

[1] Liu S S, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1923 (in Chinese) [刘式适, 付遵涛, 刘式达, 赵强 2002 物理学报 **51** 1923]

[2] Liu C S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4506 (in Chinese) [刘成仕 2005 物理学报 **54** 4506]

[3] Yang X L, Tang J S 2007 *J. Hunan Univ.* **34** 72 (in Chinese) [杨先林, 唐驾时 2007 湖南大学学报 **34** 72]

[4] Li D S, Zhang H Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1569 (in Chinese) [李德生, 张鸿庆 2003 物理学报 **52** 1569]

[5] Zhang J F, Chen F Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1648 (in Chinese) [张解放, 陈芳跃 2001 物理学报 **50** 1648]

[6] Cai G L, Ling X D, Wang Q C 2008 *J. College Math.* **24** 26 (in Chinese) [蔡国梁, 凌旭东, 王庆超 2008 大学数学 **24** 26]

[7] Mao J J, Yang J R 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5049 (in Chinese) [毛杰健, 杨建荣 2007 物理学报 **56** 5049]

[8] Zhou Y B, Wang M L, Wang F, Miao T D 2004 *J. Lanzhou Univ.* **40** 1

[9] Ao T G 2007 *J. Inner Monglia Univ.* **38** 597 (in Chinese) [敖特根 2007 内蒙古大学学报 **38** 597]

[10] Wang M L, Li X Z, Zhang J L 2008 *J. Phys. Lett.* A **372** 417

[11] Feng Q H, Meng F W, Zhang Y M 2011 *Chin. Phys.* B **20** 120201

[12] Zhang J, Wei X L, Lu Y J 2008 *J. Phys. Lett.* A **372** 3653

[13] Filiz T, Ahmet B 2010 *Chin. Phys.* B **20** 040203

[14] Li E Q, Wang M L 2008 *J. Henan Sci. Technol. Univ.* **29** 80 (in Chinese) [李二强, 王明亮 2008 河南科技大学学报 **29** 80]

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 61, No. 14 (2012) 140201

Nonlinear evolution equation with variable coefficient G'/G expansion solution*

Pang Jing† Jin Ling-Hua Zhao Qiang

(*College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot* 010051, *China*)

(Received 17 October 2011; revised manuscript received 23 December 2011)

Abstract

In this paper, the (G'/G)-expansion method is used to solve the two kinds of nonlinear KdV equations with variable coefficients for the first time. And some new exact solutions are obtained successfully. It is proved that the (G'/G)-expansion method is not only appropriate for solving nonlinear evolution equations with constant coefficients but also excellently applicable to the nonlinear evolution equations with variable coefficients, and it also has a broad application prospect.

Keywords: the (G'/G)-expansion method, nonlinear KdV equation with variable coefficients, exact solutions

PACS: 02.30.IK, 02.30.Jr

* Project supported by the Doctoral Unit Foundation of Ministry of Education of China (Grant No. 20070128001), the Natural Science Foundation of Inner Mongolia, China (Grant No. 2010MS0115), and the Natural Science Foundation of Inner Mongolia University of Technology, China (Grant No. ZS201035).

† E-mail: pang_j@imut.edu.cn