一类广义 Birkhoff 系统的无限小正则变换与积分*

葛伟宽[1)†] 张毅[2)] 楼智美[3)]

1) (湖州师范学院物理系, 湖州 313000)

2) (苏州科技学院土木工程学院, 苏州 215011)

3) (绍兴文理学院物理系, 绍兴 312000)

(2011 年 10 月 20 日收到; 2011 年 11 月 27 日收到修改稿)

研究一类广义 Birkhoff 系统的无限小正则变换与积分, 建立这类广义 Birkhoff 系统的方程, 将 Birkhoff 系统的无限小正则变换与积分的有关结果推广到这类广义 Birkhoff 系统, 举例说明结果的应用.

关键词: Birkhoff 系统, 广义 Birkhoff 系统, 无限小正则变换, 积分

PACS: 02.30.Jr, 02.30.Ik, 02.30.Uu

1 引 言

动力学的变换理论是分析动力学的重要组成部分, 其中正则变换以及无限小正则变换尤为重要. 文献 [1] 研究了 Hamilton 系统的变换理论. 文献 [2—4] 研究了 Birkhoff 系统的变换理论. Birkhoff 系统是一类重要的动力学系统, 其理论与方法已经被广泛应用于量子力学、相对论力学、原子分子物理学、强子物理学、生物物理学、非线性动力学以及工程等许多领域. 广义 Birkhoff 系统是比 Birkhoff 系统更为广泛的一类系统. 对于实际的动力学系统, 往往不易化为 Birkhoff 系统, 但较易化为广义 Birkhoff 系统. 对广义 Birkhoff 系统的研究已取得一些进展 [5−14]. 文献 [4] 研究了 Birkhoff 系统的无限小正则变换与系统的运动常数. 本文研究一类特殊的广义 Birkhoff 系统的无限小正则变换与积分, 将文献 [4] 的结果推广并应用到这类广义 Birkhoff 系统.

2 系统的运动微分方程

广义 Birkhoff 方程的形式有 [5,6]

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}+\Lambda_{\mu}=0$$

$$(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n)\,, \tag{1}$$

其中 $B=B(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数, $R_{\mu}=R_{\mu}(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数组. $\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}$ 为 Birkhoff 张量

$$(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu})=\left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right), \tag{2}$$

而 $\Lambda_{\mu}=\Lambda_{\mu}(t,\boldsymbol{a})$ 为附加项. 当 $\Lambda_{\mu}=0$ $(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 时, 方程 (1) 成为 Birkhoff 方程

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}=0$$

$$(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n). \tag{3}$$

因此, 广义 Birkhoff 方程是 Birkhoff 方程的推广. 同时, 将微分方程表示为 (1) 式比表示为 (3) 式要容易得多.

下面研究一类特殊的广义 Birkhoff 系统. 假设存在函数 $W_{\mu}=W_{\mu}(t,\boldsymbol{a})$, 使得附加项 Λ_{μ} 可表示为

$$\Lambda_{\mu}=\frac{\partial W}{\partial a^{\mu}}\quad(\mu=1,2,\cdots,2n), \tag{4}$$

引入函数

$$\tilde{B}(t,\boldsymbol{a})=B(t,\boldsymbol{a})-W(t,\boldsymbol{a}), \tag{5}$$

则方程 (1) 可表示为

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial \tilde{B}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}=0$$

$$(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n). \tag{6}$$

∗ 国家自然科学基金 (批准号: 10772025, 10932002) 资助的课题.

† E-mail: gwk@hutc.zj.cn

这类广义 Birkhoff 系统的方程有 Birkhoff 方程的形式.

3 Birkhoff 系统的无限小正则变换与积分

Birkhoff 系统正则变换

$$t^* = t, \quad a^{\mu *} = a^{\mu}(t, \boldsymbol{a}) \tag{7}$$

的条件表示为

$$\begin{aligned} & R_{\mu}(t, \boldsymbol{a})\mathrm{d}a^{\mu} - B(t, \boldsymbol{a})\mathrm{d}t \\ & -R_{\mu}^{*}(t, \boldsymbol{a}^{*})\mathrm{d}a^{\mu *} + B^{*}(t, \boldsymbol{a}^{*}) \\ & = \mathrm{d}\varPhi. \end{aligned} \tag{8}$$

文献 [4] 证明, 对 Birkhoff 系统的无限小变换

$$t^* = t, a^{\mu *} = a^{\mu} + \varepsilon \xi_{\mu}(t, \boldsymbol{a}) \tag{9}$$

是完全接触变换 ($B^* = B$), 有形式

$$a^{\mu *} = a^{\mu} + \varepsilon \boldsymbol{\Omega}^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial a^{\nu}}, \tag{10}$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mu\nu} \Omega_{\nu\rho} = \delta_{\rho}^{\mu},$$

这里 $\boldsymbol{\Omega}^{\mu\nu}$ 为 Birkhoff 逆变张量. 而 φ 满足

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu} \xi_{\nu} \delta a^{\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial a^{\mu}} \delta a^{\mu}, \tag{11}$$

由此得到无限小生成元

$$\xi_{\mu} = \boldsymbol{\Omega}^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial a^{\nu}}. \tag{12}$$

文献 [4] 给出如下定理:

如果无限小正则变换 (10) 是 Birkhoff 系统的 Lie 对称变换, 则表达式

$$\varphi - \int c(\tau)\mathrm{d}\tau = \mathrm{const.} \tag{13}$$

是系统的第一积分, 这里

$$c(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}. \tag{14}$$

4 广义 Birkhoff 系统的无限小正则变换与积分

对于广义 Birkhoff 系统 (6), (8) 式中的 B 应该表示为 $\tilde{B}$. 这样, 文献 [4] 的结果可推广并应用于广义 Birkhoff 系统 (6), 有如下结果.

如果无限小正则变换 (9) 的生成元 ξ_{μ} 是广义 Birkhoff 系统 (6) 的 Lie 对称性生成元, 则系统有积分

$$\varphi - \int c(\tau)\mathrm{d}\tau = \mathrm{const.}, \tag{15}$$

其中

$$c(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \tag{16}$$

而

$$\xi_{\mu} = \boldsymbol{\Omega}^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial a^{\nu}}. \tag{17}$$

为按上述结果研究广义 Birkhoff 系统的无限小正则变换与积分, 首先需将方程 (6) 表示为显式

$$\dot{a}^{\mu} = \sigma_{\mu}(t, \boldsymbol{a}) \quad (\mu = 1, 2, \cdots, 2n), \tag{18}$$

其中

$$\sigma_{\mu} = \boldsymbol{\Omega}^{\mu\nu} \left(\frac{\partial \tilde{B}}{\partial a^{\nu}} + \frac{\partial R_{\nu}}{\partial t} \right). \tag{19}$$

方程 (18) 的 Lie 对称性确定方程为

$$\dot{\xi}_{\mu} = \frac{\partial \sigma_{\mu}}{\partial a^{\nu}} \xi_{\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, 2n). \tag{20}$$

由方程 (20) 可求得生成元 ξ_{μ}. 其次, 将 ξ_{μ} 代入 (17) 式可求得 φ. 最后按 (15), (16) 式来求得积分.

5 非完整系统的一个算例

非完整系统的动能, 势能和约束方程分别为 [15]

$$\begin{aligned} & T = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right), V = 0, \\ & f = \dot{q}_1 + bt\dot{q}_2 - bq_2 + t = 0 \\ & (b = \mathrm{const.}). \end{aligned} \tag{21}$$

将其化为广义 Birkhoff 系统, 并研究无限小正则变换与积分.

与非完整系统 (21) 相对应的完整系统的方程的形式有 [16]

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -\frac{1}{1 + b^2 t^2}, \\ \ddot{q}_2 &= -\frac{bt}{1 + b^2 t^2}. \end{aligned} \tag{22}$$

令

$$\begin{aligned} & a^1 = q_1, a^2 = q_2, \\ & a^3 = \dot{q}_1 + \frac{1}{b}\mathrm{arctan}bt, \\ & a^4 = \dot{q}_2 + \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2 t^2), \end{aligned} \tag{23}$$

则方程 (22) 表示为

$$\begin{aligned}\dot{a}^1 &= a^3 - \frac{1}{b}\mathrm{arctan}bt,\\ \dot{a}^2 &= a^4 - \frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2),\\ \dot{a}^3 &= 0, \dot{a}^4 = 0.\end{aligned} \tag{24}$$

将方程 (24) 表示为广义 Birkhoff 方程, 有

$$\begin{aligned}&R_1 = a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0,\\ &B = \frac{1}{2}(a^3)^2 + \frac{1}{2}(a^4)^2,\\ &\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = \frac{1}{b}\mathrm{arctan}bt,\\ &\Lambda_4 = \frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2),\end{aligned} \tag{25}$$

进而有

$$\begin{aligned}\tilde{B} = &\frac{1}{2}(a^3)^2 + \frac{1}{2}(a^4)^2\\ &-a^3\frac{1}{b}\mathrm{arctan}bt - a^4\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2).\end{aligned} \tag{26}$$

方程 (6) 给出

$$\begin{aligned}&-\dot{a}^3 = 0, -\dot{a}^4 = 0,\\ &\dot{a}^1 - a^3 + \frac{1}{b}\mathrm{arctan}bt = 0,\\ &\dot{a}^2 - a^4 + \frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2) = 0,\end{aligned} \tag{27}$$

因此有

$$(\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{\Omega}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

方程 (20) 给出

$$\dot{\xi}_1 = \xi_3, \dot{\xi}_2 = \xi_4, \dot{\xi}_3 = 0, \dot{\xi}_4 = 0, \tag{28}$$

它有如下解

$$\xi_1 = 1, \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0, \tag{29}$$

$$\xi_2 = 1, \xi_1 = \xi_3 = \xi_4 = 0, \tag{30}$$

$$\xi_1 = -t, \xi_2 = 0, \xi_3 = -1, \xi_4 = 0, \tag{31}$$

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = -t, \xi_3 = 0, \xi_4 = -1. \tag{32}$$

将 (29) 式代入 (17) 式, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial a^3} = 1, \frac{\partial\varphi}{\partial a^1} = 0,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial a^2} = 0, \frac{\partial\varphi}{\partial a^4} = 0.\end{aligned}$$

由此得

$$\varphi = a^3 + f(t),$$

将其代入 (15) 式, 得到积分

$$a^3 = \mathrm{const}. \tag{33}$$

类似地, 由 (30) 式得到积分

$$a^4 = \mathrm{const}. \tag{34}$$

将 (31) 式代入 (17) 式, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial a^1} = 1, \frac{\partial\varphi}{\partial a^2} = 0,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial a^3} = -t, \frac{\partial\varphi}{\partial a^4} = 0,\end{aligned}$$

由此得

$$\varphi = a^1 - a^3t + f(t).$$

将其代入 (15) 式, 得到积分

$$a^1 - a^3t + \frac{1}{b}\int \mathrm{arctan}bt\mathrm{d}t = \mathrm{const}. \tag{35}$$

类似地, 由 (32) 式得到积分

$$a^2 - a^4t + \frac{1}{2b}\int \ln(1+b^2t^2)\mathrm{d}t = \mathrm{const}. \tag{36}$$

由以上四个积分可得到相应完整系统的解, 再施加非完整约束对初始条件的限制, 便可得到非完整系统的运动.

6 结 论

文献 [4] 有关 Birkhoff 系统无限小正则变换与运动常数的结果可以推广并应用于一类广义 Birkhoff 系统.

[1] Wittaker E T 1937 *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies* (4th Ed.) (Cambridge: Cambridge Univ. Press)

[2] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* II (New York: Springer-Verlag)

[3] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhof-*

fian System (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学 (北京: 北京理工大学出版社)]

[4] Galiullin A S, Gafarov G G, Malaishka R P, Khwan A M 1997 *Analytical Dynamics of Helmholtz, Birkhoff and Nambu Systems* (Moscow: RZUFN) (in Russian)

[5] Mei F X 1993 *Sience in China* Ser A **36** 1456

[6] Mei F X, Zhang Y F, He G, Gang T Q, Xie J F 2007 *J. Beijing Institute of Technology* **27** 1035 (in Chinese) [梅凤翔, 张永发, 何光, 江铁强, 解加芳 2007 北京理工大学学报 **27** 1035]

[7] Mei F X, Xie J F, Gang T Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4649 (in Chinese) [梅凤翔, 解加芳, 江铁强 2008 物理学报 **57** 4649]

[8] Mei F X, Cai J L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4657 (in Chinese) [梅凤翔, 蔡建乐 2008 物理学报 **57** 4657]

[9] Mei F X, Xie J F, Gang T Q 2008 *Acta Mech. Sin.* **24** 583

[10] Ge W K, Mei F X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 699 (in Chinese) [葛伟宽, 梅凤翔 2009 物理学报 **58** 699]

[11] Shang M, Mei F X 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3155

[12] Li Y M, Mei F X 2010 *Chin. Phys.* B **19** 080302

[13] Ge W K, Zhang Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050202 (in Chinese) [葛伟宽, 张毅 2011 物理学报 **60** 050202]

[14] Mei F X, Chui J C 2011 *J. Beijing Institute of Technology* **20** 285

[15] Novoselov V S 1966 *Variational Methods in Mechanics* (Leningrad: L G V) (in Russian)

[16] Mei F X, Wu H B 2009 *Dynamics of Constrained Mechanical System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press)

Infinitesimal canonical transformation and integral for a generalized Birkhoff system*

Ge Wei-Kuan[1)†] Zhang Yi[2)] Lou Zhi-Mei[3)]

1) (*Department of Physics, Huzhou Teachers College, Huzhou* 313000, *China*)

2) (*College of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou* 215011, *China*)

3) (*Department of Physics, Shaoxing University, Shaoxing* 312000, *China*)

(Received 20 October 2011; revised manuscript received 27 November 2011)

Abstract

An infinitesimal canonical transformation and an integral for a generalized Birkhoff system are studied. The equations of the generalized Birkhoff system are established. The results of the infinitesimal canonical transformation and the integral for the Birkhoff system are generalized to the generalized Birkhoff system. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: Birkhoff system, generalized Birkhoff system, infinitesimal canonical transformation, integral

PACS: 02.30.Jr, 02.30.Ik, 02.30.Uu

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10772025, 10932002).

† E-mail: gwk@hutc.zj.cn