

# 含有不确定项的混沌系统自适应修正函数投影同步

邓玮<sup>†</sup> 方洁 吴振军 吴艳敏

(郑州轻工业学院电气信息工程学院, 河南省信息化电器重点实验室, 郑州 450002)

(2011年10月20日收到; 2011年12月21日收到修改稿)

针对一类含有不确定项的混沌系统修正函数投影同步问题, 提出了自适应修正函数投影同步方法. 根据 Lyapunov 稳定性理论, 给出了两种响应系统的设计方案, 并设计了控制器和自适应律. 研究表明, 所设计的控制策略对外界干扰有较强的鲁棒性, 且不需要事先已知不确定项的上界, 通过引入加速因子, 可任意配置同步响应速度, 具有较高的使用价值. 理论分析及仿真结果验证了该方法的有效性.

**关键词:** 混沌系统, 修正投影同步, 自适应控制, 加速因子

**PACS:** 05.45.Xt

## 1 引言

由于混沌同步在保密通信、图像处理、生态网络等领域的巨大应用潜力, 已成为非线性科学领域一个非常热门的研究课题, 并迅速发展起来<sup>[1]</sup>. 到目前为止, 来自各领域的多类混沌同步现象及其特性已经被揭示, 其中投影同步因其不可预料的比例因子可以增加保密通信的安全性和通信的传输速度<sup>[1-4]</sup>, 近期已被广泛研究<sup>[1]</sup>. 目前对于投影同步的研究大多是基于驱动系统与响应系统之间按某一常数比例因子进行同步, 而对于驱动系统和响应系统之间按某一函数比例因子同步的研究较少<sup>[1]</sup>. 理论上, 函数投影同步中的不可预料的比例函数可进一步增加保密通信的安全性, 因而该类同步的研究具有重要的意义<sup>[1]</sup>. 通过查阅大量的文献可知, 目前有关函数投影同步的研究较少<sup>[1]</sup>.

投影同步是指驱动和响应系统的同步向量之比为一个常数, 当该常数改为某一函数或常数矩阵时, 便构成函数投影同步或修正投影同步<sup>[5]</sup>. 最近, 有学者将修正投影同步的比例常数矩阵扩展为比例函数矩阵, 提出了新的混沌系统同步方法, 即修正函数投影同步<sup>[6-8]</sup>, 它是指驱动系统和响应系统之间按照任意给定的比例函数矩阵关系进行同步.

由于适当地选取比例函数能增加同步后混沌系统吸引子的结构复杂程度及混沌程度, 利用函数投影同步进行保密通信可增加保密通信中信息的安全性<sup>[4]</sup>, 对通信双方以外的第三方而言, 比例函数是不可预知的, 从而增加了混沌信号在传输过程中被截获破译的难度, 可以获得更好的安全性<sup>[5]</sup>. 因此混沌系统函数投影同步的研究具有重要的理论意义和应用价值. 文献[8—16]研究了含有未知参数的混沌系统的修正函数投影同步, 设计了自适应律来辨识未知参数. 文献[5]通过构造合适的响应系统, 利用单向耦合混沌同步原理, 提出一种修正函数投影同步方法. 然而, 上述文献大都是在假设系统不含不确定项和没有外界干扰的前提下给出的, 而且同步速度不可调. 在实际应用中, 限于测量条件和工具的限制, 外界很难精确知道系统的数学模型, 即系统对于外界往往是未知的, 或者系统受外界干扰是不可避免的<sup>[17]</sup>. 因此, 研究受扰且含有不确定项的混沌系统更具有实际意义, 但这类混沌系统的修正函数投影同步问题目前还未见报道.

本文针对一类受扰且含有不确定项的混沌系统, 构造了两种合适的响应系统, 提出了自适应修正函数投影同步方法. 根据 Lyapunov 稳定性理论, 设计了控制器和自适应率. 该控制策略不仅实现了驱动系统与所构造的响应系统的修正函数投影同

<sup>†</sup> E-mail: dengwei1973@126.com

步, 而且对外界干扰有较强的鲁棒性; 不仅不需要事先已知不确定项的上界, 而且通过引入加速因子, 可任意配置同步响应速度, 具有较高的使用价值. 因为没有强加在系统上的限制条件, 该控制策略具有一般性. 最后通过对超混沌 CYQY 系统的数值仿真验证了所提方案的有效性.

## 2 修正函数投影同步方案描述

考虑混沌系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) \\ &= \mathbf{A}x + F(x, t) + \Delta f(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{y} = g(y, t), \quad (2)$$

这里  $x, y \in R^n$  为系统状态变量,  $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$  为系统矩阵,  $\Delta f(x, t)$  是系统未建模部分、模型扰动及外部干扰的综合,  $F(x, t) \in R^n$  为连续光滑非线性函数, 且满足 Lipschitz 条件  $F(x, t) - F(y, t) \leq r(x - y)$ , 式中  $r > 0$ , 为 Lipschitz 常数. 此条件并不苛刻, 有一大类混沌系统满足此条件. 例如 Rossler, Duffing Holmes 系统, Lorenz 系统, Chen 系统及 CYCQ 超混沌系统等.

对于驱动系统 (1) 和响应系统 (2) 任取初始值, 若存在函数矩阵

$$\mathbf{M}(t) = \text{diag}[m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t)],$$

使得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|e\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \|x - \mathbf{M}y\| = 0, \quad (3)$$

或

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|e\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \|y - \mathbf{M}x\| = 0, \quad (4)$$

则称系统 (1) 和系统 (2) 获得修正函数投影同步. 对于  $\forall t$ , 假设  $m_i(t) \neq 0$ , 我们称  $\mathbf{M}(t)$  为比例函数矩阵,  $m_i(t)$  为比例函数且为连续可微的有界函数, 显然当  $m_1(t) = m_2(t) = \dots = m_n(t)$  时, 修正函数投影同步退化为函数投影同步 [5].

### 2.1 实现误差系统为 (3) 式的修正函数投影同步方案

将 (1) 式作为驱动系统, 构造其如下响应系统:

$$\dot{y} = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{A}(\mathbf{M}y) + F(\mathbf{M}y, t) - \dot{\mathbf{M}}y + \mathbf{U}], \quad (5)$$

这里  $\mathbf{M}(t) = \text{diag}[m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t)]$  为所选的比例函数矩阵, 定义系统 (1) 和系统 (5) 的同步

误差为

$$\begin{aligned} e &= x - \mathbf{M}y \\ &= [x_1 - m_1(t)y_1, x_2 - m_2(t)y_2, \\ &\quad \dots, x_n - m_n(t)y_n], \end{aligned} \quad (6)$$

则误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \mathbf{M}\dot{y} - \dot{\mathbf{M}}y \\ &= \mathbf{A}x + F(x, t) + \Delta f(x, t) - \mathbf{A}(\mathbf{M}y) \\ &\quad - F(\mathbf{M}y, t) + \dot{\mathbf{M}}y - \mathbf{U} - \dot{\mathbf{M}}y \\ &= \mathbf{A}(x - \mathbf{M}y) + F(x, t) - F(\mathbf{M}y, t) \\ &\quad + \Delta f(x, t) - \mathbf{U} \\ &= \mathbf{A}e + F(x, t) - F(\mathbf{M}y, t) \\ &\quad + \Delta f(x, t) - \mathbf{U}. \end{aligned} \quad (7)$$

设计自适应控制器

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{K}e + q\hat{\rho}\text{sgn}(e), \\ \dot{\hat{\rho}} &= q\|e\|, \\ \mathbf{A} - \mathbf{K} &= -\mathbf{C}, \end{aligned} \quad (8)$$

这里  $\hat{\rho}(0) \in R^+$ ,  $q \geq \max[r, 1]$ ,  $\mathbf{K} \in R^{n \times n}$ ,  $\mathbf{C}$  为正定矩阵.

**定理 1** 考虑受扰混沌系统 (1) 及构造的响应系统 (5), 若采用式 (8) 的控制策略及自适应律, 则系统 (1) 和系统 (5) 实现修正函数投影同步.

**证明** 定义 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}(\hat{\rho} - \rho)^2,$$

$V$  是正定函数, 沿误差方程 (7) 对  $V$  求一阶导数得:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^T e + (\hat{\rho} - \rho)\dot{\hat{\rho}} \\ &= [\mathbf{A}e + F(x, t) - F(\mathbf{M}y, t) \\ &\quad + \Delta f(x, t) - \mathbf{U}]^T e + (\hat{\rho} - \rho)q\|e\| \\ &= e^T \mathbf{A}^T e + [F(x, t) - F(\mathbf{M}y, t) \\ &\quad + \Delta f(x, t)]^T e - \mathbf{U}^T e + q\hat{\rho}\|e\| - q\rho\|e\| \\ &\leq e^T \mathbf{A}^T e + r\|e\|^2 + \|\Delta f(x, t)\|\|e\| \\ &\quad - e^T \mathbf{K}^T e - q\hat{\rho}\|e\| + q\hat{\rho}\|e\| - q\rho\|e\| \\ &\leq e^T (\mathbf{A} - \mathbf{K})^T e + q(\|e\| + \|\Delta f(x, t)\|)\|e\| \\ &\quad - q\rho\|e\|, \end{aligned} \quad (9)$$

定义一个未知但总是存在的常数  $\rho$  满足对所有  $0 \leq t < \infty$ , 均有 [18]

$$\|e\| + \|\Delta f(x, t)\| \leq \rho < \infty. \quad (10)$$

将 (10) 式代入 (9) 式得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq e^T(\mathbf{A} - \mathbf{K})^T e + q\rho \|e\| - q\rho \|e\| \\ &= e^T(\mathbf{A} - \mathbf{K})^T e \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{C}) \|e\|^2 \end{aligned}$$

式中  $\lambda_{\min}(\mathbf{C})$  为正定矩阵  $\mathbf{C}$  的最小特征值, 所以  $\dot{V}(t) \leq 0$ . 即选择一个合适的矩阵  $\mathbf{K}$ , 使得矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{K}$  的所有特征值具有负实部, 则系统 (1) 和 (5) 在控制策略 (8) 的作用下, 实现修正函数投影同步.

注 1 根据文献 [5] 的定理, 若选取合适的反馈增益  $\mathbf{K}$ , 满足  $k > L$ , 则有  $\dot{V}(t) \leq 0$ , 便可实现驱动系统与所设计的响应系统的修正函数投影同步. 然而如果驱动系统受到未知干扰, 仅考虑  $k > L$ , 则不能完全保证  $\dot{V}(t) \leq 0$ , 也即, 不能完全保证驱动系统与所设计的响应系统的修正函数投影同步. 而本文定理, 由于在控制器中引入了自适应环节, 在一定的条件下, 控制强度  $\rho(t)$  可以跟踪干扰变化, 增加  $\rho(t)$  来抑制干扰, 且不需要事先已知不确定项的上界. 在实际应用中, 只要选取的矩阵  $\mathbf{K}$  使  $\mathbf{C}$  为正定矩阵即可. 也就是说, 由 (8) 式确定的控制策略有一定的鲁棒性.

注 2 可取正定矩阵  $\mathbf{C} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]^T$ ,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  为加速因子,  $\beta_i$  取值越大,  $\mathbf{A} - \mathbf{K}$  越负, 同步过度时间越短, 因此通过选择加速因子  $\beta_i$  可以灵活配置同步速度.

## 2.2 实现误差系统为 (4) 式的修正函数投影同步方案

将 (1) 式作为驱动系统, 构造其如下响应系统:

$$\dot{y} = \mathbf{M} \left[ \mathbf{A}(\mathbf{M}^{-1}y) + F(\mathbf{M}^{-1}y, t) - \frac{d}{dt}(\mathbf{M}^{-1}y) + \mathbf{U} \right], \quad (11)$$

这里  $\mathbf{M}(t) = \text{diag}[m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t)]$  为所选的比例函数矩阵, 定义系统 (1) 和系统 (11) 的同步误差为

$$\begin{aligned} e &= x - \mathbf{M}^{-1}y \\ &= \left[ x_1 - \frac{1}{m_1(t)}y_1, x_2 - \frac{1}{m_2(t)}y_2, \dots, x_n - \frac{1}{m_n(t)}y_n \right], \end{aligned} \quad (12)$$

则误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \mathbf{M}^{-1}\dot{y} - \frac{d}{dt}(\mathbf{M}^{-1}y) \\ &= \mathbf{A}x + F(x, t) + \Delta f(x, t) - \mathbf{A}(\mathbf{M}^{-1}y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-F(\mathbf{M}^{-1}y, t) + \frac{d}{dt}(\mathbf{M}^{-1}y) \\ &- \mathbf{U} - \frac{d}{dt}(\mathbf{M}^{-1}y) \\ &= \mathbf{A}(x - \mathbf{M}^{-1}y) + F(x, t) \\ &-F(\mathbf{M}^{-1}y, t) + \Delta f(x, t) - \mathbf{U} \\ &= \mathbf{A}e + F(x, t) - F(\mathbf{M}^{-1}y, t) \\ &+ \Delta f(x, t) - \mathbf{U} \end{aligned} \quad (13)$$

与方案 2.1 类似可得到以下定理.

**定理 2** 考虑受扰混沌系统 (1) 及构造的响应系统 (11), 若采用 (8) 式的控制策略及自适应律, 则系统 (1) 和系统 (11) 实现修正函数投影同步.

## 3 数值仿真

例: 考虑超混沌 CYQY 系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + bx_2x_3, \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - dx_1x_3 + x_2 + x_4, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - vx_3, \\ \dot{x}_4 &= -fx_2, \end{aligned} \quad (14)$$

当参数  $a = 35, b = 35, c = 25, d = 5, v = 4.9, f = 100$  时, 系统呈超混沌状态.

以系统 (14) 为驱动系统, 按照方案 2.1 构造响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{1}{m_1(t)} [a(m_2y_2 - m_1y_1) \\ &+ bm_2y_2m_3y_3 - \dot{m}_1y_1 + u_1], \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{m_2(t)} [cm_1y_1 - dm_1y_1m_3y_3 \\ &+ m_2y_2 + m_4y_4 - \dot{m}_2y_2 + u_2], \\ \dot{y}_3 &= \frac{1}{m_3(t)} [m_1y_1m_2y_2 - vm_3y_3 - \dot{m}_3y_3 + u_3], \\ \dot{y}_4 &= \frac{1}{m_4(t)} [-fm_2y_2 - \dot{m}_4y_4 + u_4]. \end{aligned} \quad (15)$$

选择函数矩阵时, 注意使比例函数不能为零. 令

$$\mathbf{M} = \text{diag}[m_1(t), m_2(t), m_3(t), m_4(t)]$$

有  $\dot{\mathbf{M}} = \text{diag}[\dot{m}_1(t), \dot{m}_2(t), \dot{m}_3(t), \dot{m}_4(t)]$ , 其中

$$\begin{aligned} m_1(t) &= 6.1 + \sin t + 2 \sin(2t) + 3 \sin(3t), \\ m_2(t) &= 0.1 + 2 \sin^2(2t), \\ m_3(t) &= 0.1 + 2 \sin^2(2t) + 3 \sin^2(3t), \\ m_4(t) &= 10.1 + \sin t + 2 \sin(2t) \end{aligned}$$

$$+3 \sin(3t) + 4 \sin(4t).$$

系统矩阵  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -v & 0 \\ 0 & -f & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 选取与文

献 [5] 相同的矩阵  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 则  $\mathbf{C} =$

$$\begin{bmatrix} a & -a & 0 & 0 \\ -c & 29 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{容易验证 } \mathbf{C} \text{ 为正定矩阵.}$$

控制器取为

$$\begin{aligned} u_1 &= q\hat{\rho}_1 \text{sgn}(e_1), \\ u_2 &= 30e_2 + q\hat{\rho}_2 \text{sgn}(e_2), \\ u_3 &= q\hat{\rho}_3 \text{sgn}(e_3), \\ u_4 &= q\hat{\rho}_4 \text{sgn}(e_4). \end{aligned} \quad (16)$$

自适应律为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}_1 &= q \|e_1\|, \\ \dot{\hat{\rho}}_2 &= q \|e_2\|, \\ \dot{\hat{\rho}}_3 &= q \|e_3\|, \\ \dot{\hat{\rho}}_4 &= q \|e_4\|. \end{aligned} \quad (17)$$

选取  $q = 40$ , 系统初值分别为  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (-1, 2, 0, 0.5)$ ,  $(y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0)) = (1, -3, 0, 0)$ . 则系统 (14) 与系统 (15) 的修正投影同步误差  $e_i = y_i - m_i x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 的时域波形如图 1 所示.

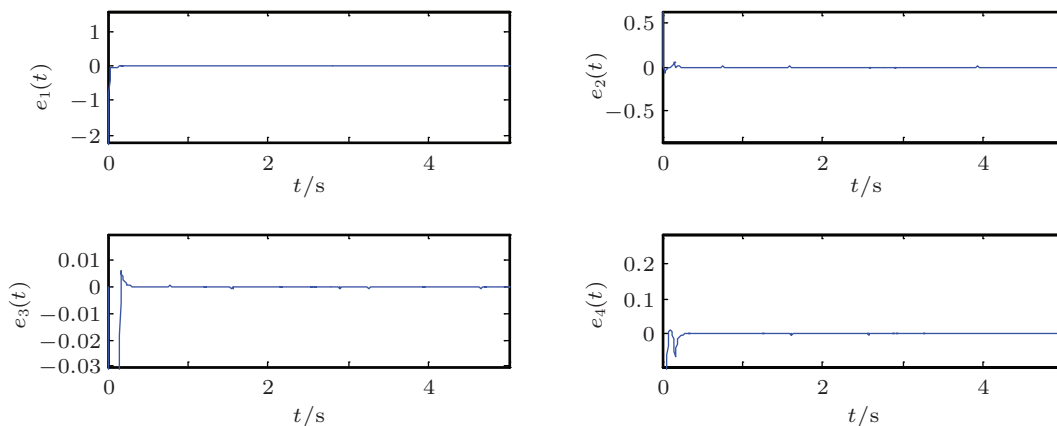


图 1 系统 (14) 与系统 (15) 的修正函数投影同步误差的时域波形

为了验证所设计控制器的鲁棒性, 将系统 (15) 加入干扰信号, 即

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + bx_2x_3 + d_1, \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - dx_1x_3 + x_2 + x_4 + d_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - vx_3 + d_3, \\ \dot{x}_4 &= -fx_2 + d_4, \end{aligned} \quad (18)$$

$d(t) = (d_1(t), d_2(t), d_3(t), d_4(t))^T$  为外界干扰, 数值仿真时不失一般性选取随机干扰  $d_i(t) = 3\text{rand}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), 其他参数不变, 仿真结果如图 2 所示.

为了说明本文修正投影同步方案的鲁棒性

较强于文献 [5], 利用文献 [5] 的方案仿真 (18) 式加入外界干扰后的 CYQY 系统, 仿真结果如图 3 所示.

从图 1, 2 可以看出, 利用方案 2.1, 所设计的响应系统与驱动系统在控制器的作用下均实现了系统在受扰前后的修正函数投影同步. 对比图 2, 3 可以看出, 在选取相同的反馈增益矩阵  $\mathbf{K}$  的情况下, 由于本文在控制器中引入了自适应环节, 所设计的控制器较文献 [5] 对外界干扰具有更强的鲁棒性, 且同步开始阶段误差振荡减小, 而加速因子的引入又使同步时间可控.

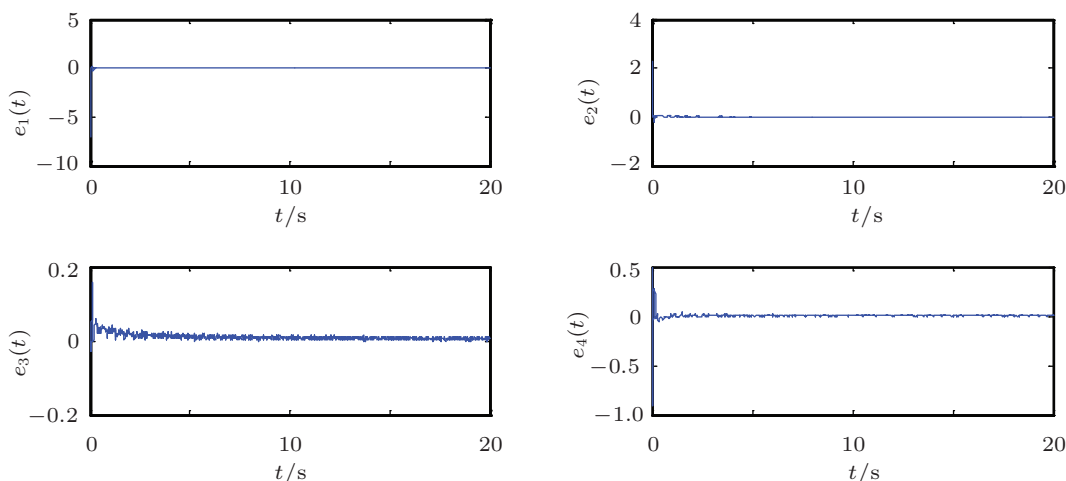


图2 受扰系统 (18) 与响应系统 (15) 的修正函数投影同步误差的时域波形

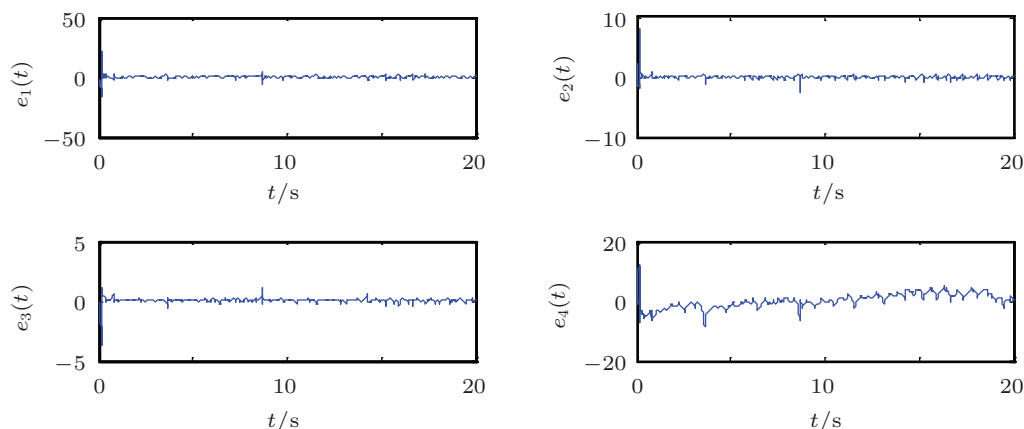


图3 受扰系统 (18) 与文献 [5] 所构造响应系统的修正函数投影同步误差的时域波形

以系统 (14) 为驱动系统, 按照方案 2.2 构造响应系统为

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= m_1(t) \left[ a \left( \frac{1}{m_2} y_2 - \frac{1}{m_1} y_1 \right) + b \frac{1}{m_2} y_2 \frac{1}{m_3} y_3 - \frac{\dot{m}_1}{m_1} y_1 + u_1 \right], \\
 \dot{y}_2 &= m_2(t) \left[ c \frac{1}{m_1} y_1 - d \frac{1}{m_1} y_1 \frac{1}{m_3} y_3 + \frac{1}{m_2} y_2 + \frac{1}{m_4} y_4 - \frac{\dot{m}_2}{m_2} y_2 + u_2 \right], \\
 \dot{y}_3 &= m_3(t) \left[ \frac{1}{m_1} y_1 \frac{1}{m_2} y_2 - v \frac{1}{m_3} y_3 - \frac{\dot{m}_3}{m_3} y_3 + u_3 \right], \\
 \dot{y}_4 &= m_4(t) \left[ -f \frac{1}{m_2} y_2 - \frac{\dot{m}_4}{m_4} y_4 + u_4 \right].
 \end{aligned} \tag{19}$$

比例函数矩阵  $M$ , 系统状态变量的初值及  $q$  的

值同上. 控制器及自适应律分别同 (16), (17) 式. 图 4 为系统 (14) 和系统 (19) 之间的同步误差  $e_i = y_i - m_i x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 的时域波形.

为了验证所设计控制器的鲁棒性, 利用方案 2.2 仿真受扰系统式 (18), 其他参数不变, 仿真结果如图 5 所示.

为了说明方案 2.2 修正投影同步方案的鲁棒性较强于文献 [5], 利用文献 [5] 的方案仿真式 (18) 加入外界干扰后的 CYQY 系统, 仿真结果如图 6 所示.

从图 4, 5 可以看出, 利用方案 2.2, 所设计的响应系统与驱动系统在控制器的作用下均实现了系统在受扰前后的修正投影同步. 对比图 5, 6 可以看出, 在选取相同的反馈增益矩阵  $K$  的情况下, 由于

本文在控制器中引入了自适应环节, 所设计的控制器较文献 [5] 对外界干扰具有更强的鲁棒性, 且同

步开始阶段误差振荡减小, 而加速因子的引入又使同步时间可控.

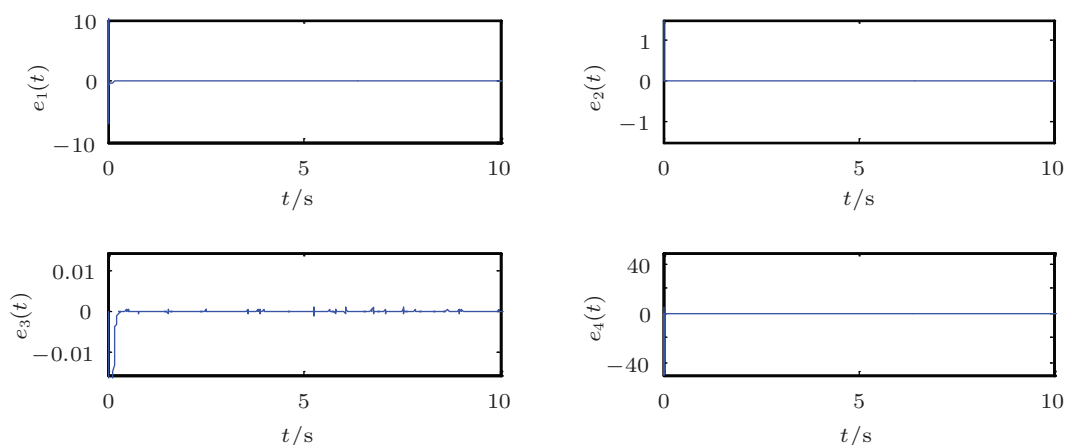


图4 系统 (14) 与系统 (19) 的修正函数投影同步误差的时域波形

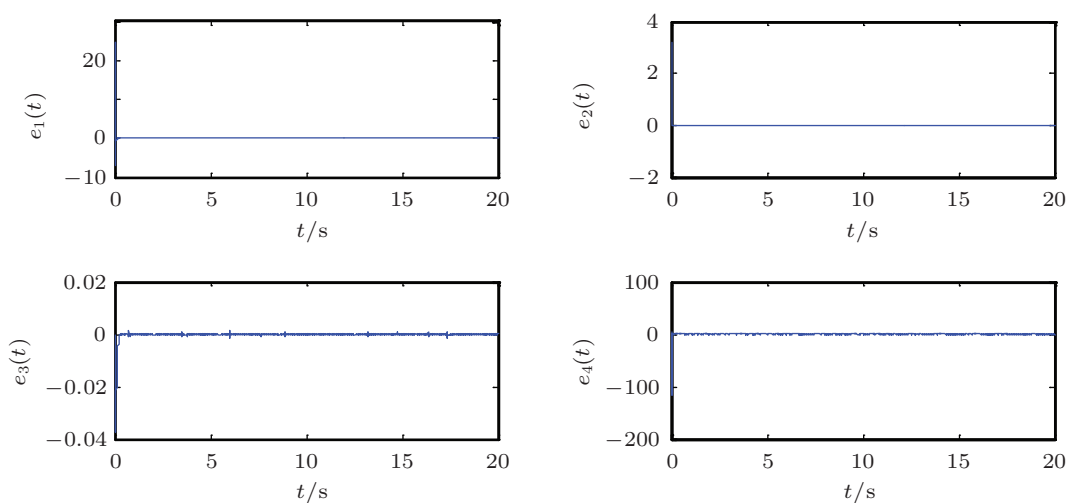


图5 受扰系统 (18) 与响应系统 (19) 的修正函数投影同步误差的时域波形

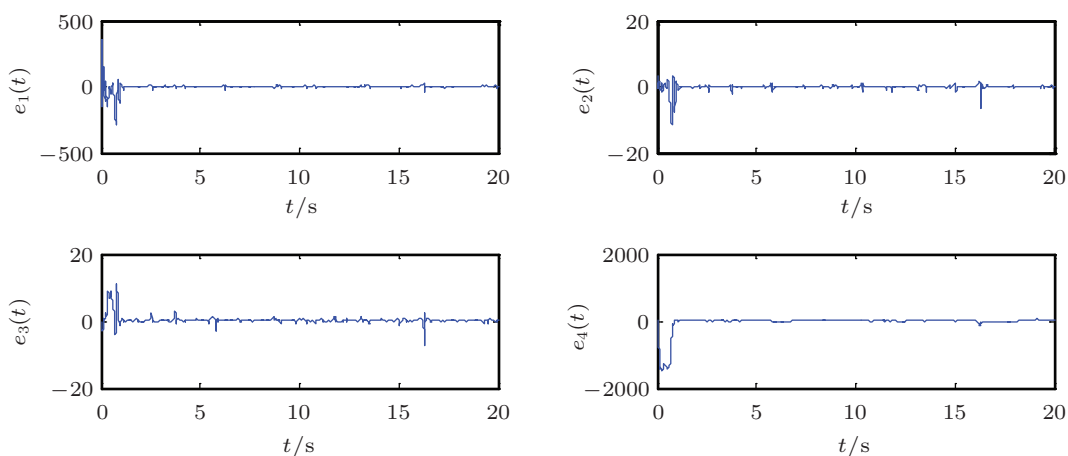


图6 受扰系统 (18) 与文献 [5] 所构造响应系统的修正函数投影同步误差的时域波形

## 4 结论

本文针对一类受扰且含有不确定项的混沌系统, 设计了两种合适的响应系统, 提出了自适应修正函数投影同步方法. 根据 Lyapunov 稳定性理论, 设计了控制策略和自适应律. 在控制器的作用下, 所构造的响应系统和驱动系统可以实现修正函数

投影同步. 所设计的控制策略对外界干扰有较强的鲁棒性, 且不需要事先已知不确定项的上界. 通过引入加速因子, 可任意配置同步响应速度, 具有较高的使用价值. 最后, 通过对超混沌 CYQY 系统及其在外界随机干扰存在的情况下的仿真研究, 进一步验证了本文所提出方法的有效性.

- 
- [1] Du H Y 2009 *Ph. D. Dissertation* (Harbin: Harbin Institute of Technology) (in Chinese) [杜洪越 2009 博士学位论文 (哈尔滨: 哈尔滨工业大学)]
- [2] Li Z, Xu D 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 477
- [3] Chee C Y, Xu D 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **23** 1063
- [4] Hu M F, Xu Z Y 2008 *Nonlinear Analysis RWA*. **9** 1253
- [5] Li J F, Li N, Liu Y P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080507 (in Chinese) [李建芬, 李农, 刘宇平 2011 物理学报 **60** 080507]
- [6] Du H, Zeng Q, Wong C 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **42** 2399
- [7] Sudheer K S, Sabir M 2009 *Phys. Lett. A* **373** 1847
- [8] Wang J A, Liu H P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2264 (in Chinese) [王建安, 刘贺平 2010 物理学报 **59** 2264]
- [9] Sun K H, Qiu S S, Yin L Z 2010 *Information and Control* **39** 326 (in Chinese) [孙克辉, 丘水生, 尹林子 2010 信息与控制 **39** 326]
- [10] Wang J A, Li Z J, Liu H P 2010 *Systems Engineering and Electronics* **32** 1745 (in Chinese) [王健安, 李壮举, 刘贺平 2010 系统工程与电子技术 **32** 1745]
- [11] Sudheer K S, Sabir M 2009 *Phys. Lett. A* **373** 1847
- [12] Luo R Z, Wei Z M 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **42** 1266
- [13] Yu Y G, Li H X 2010 *Nonlinear Analysis: Real World Applications* **11** 2456
- [14] Sudheer K S, Sabir M 2009 *Phys. Lett. A* **373** 3743
- [15] Zheng S, Dong G G, Bi Q S 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **15** 3547
- [16] Yang X K, Cai L, Zhao X H, Feng C W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3740 (in Chinese) [杨晓阔, 蔡理, 赵晓辉, 冯朝文 2010 物理学报 **59** 3740]
- [17] Li H Q, Liao X F, Huang H Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020512 (in Chinese) [李华青, 廖晓峰, 黄宏宇 2011 物理学报 **60** 020512]
- [18] Lin J S, Yan J J, Liao T L 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **24** 371

# Adaptive modified function projective synchronization of a class of chaotic systems with uncertainties

Deng Wei<sup>†</sup> Fang Jie Wu Zhen-Jun Wu Yan-Min

(Henan Key Laboratory of Information-Based Electrical Appliances, School of Electrical Information Engineering,

Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China)

(Received 20 October 2011; revised manuscript received 21 December 2011)

## Abstract

In this paper, we primarily investigate the adaptive modifying function projective synchronization of a class of chaotic systems with uncertainties. According to the Lyapunov stability theory, the two schemes of obtaining the response system from chaotic system are established, and the controller and the adaptive law are designed. The approach is more robust to noise and external interference, and does not need the upper bound of uncertainties in advance. In addition, it can adjust the system response rapidly by adjusting the accelerated factor. This method is more practical. Numerical simulations of a hyper-chaotic system verify the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** chaotic systems, modified function projective synchronization, adaptive control, accelerated factor

**PACS:** 05.45.Xt

---

<sup>†</sup> E-mail: dengwei1973@126.com