

激光 Maxwell-Bloch 方程时空混沌网络的同步研究*

吕翎[†] 商锦玉 朱佳博 沈娜 柳爽 张新

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

(2011 年 11 月 30 日收到; 2011 年 12 月 18 日收到修改稿)

研究了激光 Maxwell-Bloch 方程时空混沌网络的同步问题. 对单模激光 Maxwell-Bloch 方程进行了修正. 以 N 个修正后具有时空混沌特性的单模激光 Maxwell-Bloch 方程作为网络节点构成复杂网络. 在考虑到网络连接过程中, 节点时空混沌系统中的参量可能受到某种干扰而与实际值产生微小偏差的情况下, 采用网络第一个节点的时空混沌系统同时并行驱动其余 $N - 1$ 个时空混沌系统达到同步. 进一步通过仿真模拟验证了同步方案的有效性.

关键词: 复杂网络, 时空混沌同步, Lyapunov 定理, 激光 Maxwell-Bloch 方程

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Pq

1 引言

自 Haken 建立了描述均匀加宽激光器的理论模型^[1], 并确定这类激光器产生混沌的条件以来, 光学混沌的研究逐步引起了人们的普遍关注^[2-5]. 进一步的研究发现, 由于混沌的这种非周期运动对初始状态极其敏感, 并且含有极其丰富的信息, 因此, 在利用激光混沌进行信息通信以及激光器之间信号的同步转换等方面有着独特的应用潜力, 从而使得激光混沌同步的理论和应用成为该领域十分活跃的一个研究方向, 一些有价值的理论和实验结果相继被报道^[6-12]. 例如, Roy 和 Thornburg^[13] 率先利用线性耦合反馈在实验上实现了两台 Nd:YAG 激光器的混沌同步; Vicente 等^[14] 研究了具有延迟效应的两台相互耦合半导体激光器的混沌同步特性; Aviad 等^[15] 进行了两台相互耦合半导体激光器的相同步研究; Kanter 等^[16] 对自反馈下的两台相互耦合半导体激光器的混沌同步进行了报道; 王小发等^[17] 针对光电负反馈下单向耦合注入垂直腔表面发射激光器的混沌同步特性进行了研究; Loose 等^[18] 完成了半导体激光器混沌同步的实验设计.

在这些富有成效的工作中, 其研究内容主要集中在一台激光器驱动另一台激光器这种两台激光

器之间的混沌同步问题. 而在实际应用中, 人们往往需要利用一台激光器同时驱动多台激光器进行远程通信和信号的同步传输, 这实际上相当于具有相互关联的多台激光器构成一个复杂网络的混沌同步问题. 由此可见, 研究激光系统构成复杂网络的混沌同步问题具有重要的理论意义和实用价值.

本文研究了激光 Maxwell-Bloch 方程时空混沌网络的同步问题. 首先对单模激光 Maxwell-Bloch 方程进行了修正. 进一步以 N 个修正后具有时空混沌特性的单模激光 Maxwell-Bloch 方程作为网络节点, 在考虑到网络连接过程中, 节点时空混沌系统中的参量可能受到某种干扰而与实际值产生微小偏差的情况下, 采用网络第一个节点的时空混沌系统同时并行驱动其余 $N - 1$ 个时空混沌系统同步的原理构成复杂网络. 基于 Lyapunov 定理, 确定了网络参量偏差调控增益的结构以及实现网络完全同步的条件. 进一步通过仿真模拟验证了同步方案的有效性.

2 单模激光 Maxwell-Bloch 方程的修正

单模均匀加宽激光器的动力学行为

* 辽宁省自然科学基金(批准号: 20082147) 和辽宁省教育厅创新团队计划(批准号: 2008T108) 资助的课题.

[†] E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

由 Maxwell-Bloch 方程描述^[1]:

$$\begin{cases} \frac{dE'}{d\tau} = -\alpha P' - \gamma_c E', \\ \frac{dP'}{d\tau} = -\frac{\mu}{\hbar} E' D' - \gamma_{\perp} P', \\ \frac{dD'}{d\tau} = \frac{\mu}{\hbar} E' P' - \gamma_{\Sigma} (D' - D_0), \end{cases} \quad (1)$$

其中 E' , P' , D' 分别为激光的电场强度、宏观电极化强度和反转粒子数密度. 参量 γ_c 表示激光器腔内光场的衰减速率; γ_{\perp} 表示宏观极化强度的弛豫速率; γ_{Σ} 是原子能级上粒子数衰减速率; D_0 是激光器的激发源非相干激发产生原子能级上粒子数的稳定值. 参量 α 则由下列关系式表示:

$$\alpha = \frac{N' \mu \omega_c}{2 \varepsilon_0}, \quad (2)$$

这里 N' 为工作物质的原子数密度, μ 是工作物质原子跃迁电偶极矩的模数, ω_c 为谐振腔的共振频率, ε_0 为真空中的介电常数.

当 (1) 式中 E' , P' , D' 不随时间变化时, 可以确定其稳态解 E_s , P_s , D_s

$$\begin{cases} P_s = -\frac{\gamma_c}{\alpha} E_s, \\ E_s = \frac{\hbar}{\mu} \left[\gamma_{\Sigma} \gamma_{\perp} \left(\frac{D_0}{D_s} - 1 \right) \right]^{1/2}, \\ D_s = \frac{\gamma_{\perp} \gamma_c \hbar}{\mu \alpha}. \end{cases} \quad (3)$$

为计算方便, 做标度变换 $\delta = \frac{D_0}{D_s} - 1 = c - 1$, $c = \frac{D_0}{D_s}$, $\sigma = \frac{\gamma_c}{\gamma_{\perp}}$, $b = \frac{\gamma_{\Sigma}}{\gamma_{\perp}}$, $t = \gamma_{\perp} \tau$, $E = \sqrt{b\delta} \frac{E'}{E_s}$, $P = \sqrt{b\delta} \frac{P'}{P_s}$, $D = \frac{D_0 - D'}{D_s}$, 考虑到 (3) 式, (1) 式可以变换为

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = \sigma(P - E), \\ \frac{dP}{dt} = (c - D)E - P, \\ \frac{dD}{dt} = EP - bD, \end{cases} \quad (4)$$

取参量 $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $c > 24.74$, 系统进入混沌状态.

Maxwell-Bloch 方程 (4) 是在略去了光场的空间变化而得到的, 其中的状态变量仅随时间演化. 但光场随空间演化的效应是实际存在的, 即 Maxwell-Bloch 方程 (4) 中的所有状态变量应该是时间和空间的函数. 这里我们假设方程 (4) 中

的光场存在一维空间扩散项 $d\nabla^2 E(r, t)$, 则修正后的 Maxwell-Bloch 方程为

$$\begin{cases} \frac{dE(r, t)}{dt} = \sigma(P(r, t) - E(r, t)) + d\nabla^2 E(r, t), \\ \frac{dP(r, t)}{dt} = (c - D(r, t))E(r, t) - P(r, t), \\ \frac{dD(r, t)}{dt} = E(r, t)P(r, t) - bD(r, t), \end{cases} \quad (5)$$

其中 t 表示时间, r 表示空间坐标, d 为空间扩散系数, $\nabla^2 = \partial^2 / \partial r^2$.

我们通过计算修正后的 Maxwell-Bloch 方程 (5) 的最大 Lyapunov 指数来判定系统的动力学行为. 取参量 $b = 8/3$, 空间扩散系数 $d = 0.01$, 作出系统的最大 Lyapunov 指数随参量 σ 和 c 的演化关系如图 1 所示. 图 1 显示参量 $\sigma = 10$, $c = 28$ 处的最大 Lyapunov 指数为正值, 表明在该参量下系统处于时空混沌态. 此时系统状态变量的时空演化如图 2—4 所示.

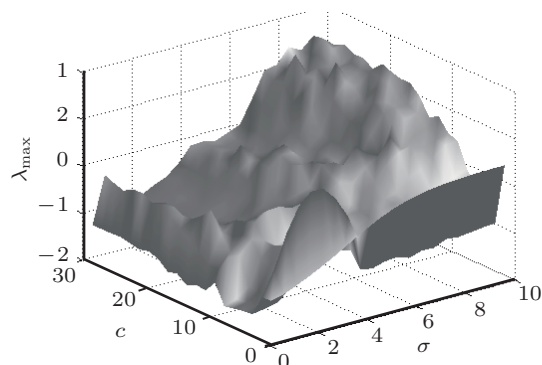


图 1 最大 Lyapunov 指数随参量 σ 和 c 的演化

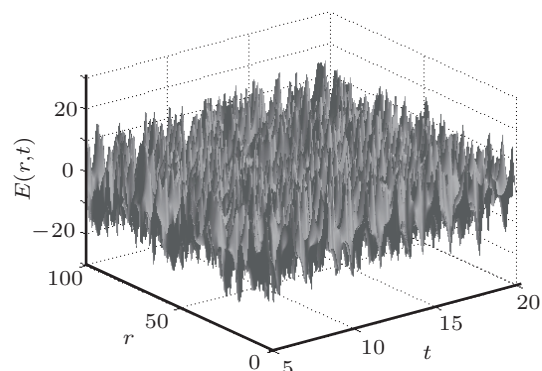


图 2 状态变量 $E(r, t)$ 的时空演化

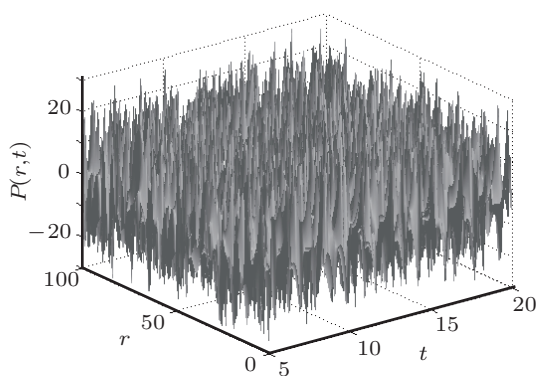


图3 状态变量 $P(r, t)$ 的时空演化

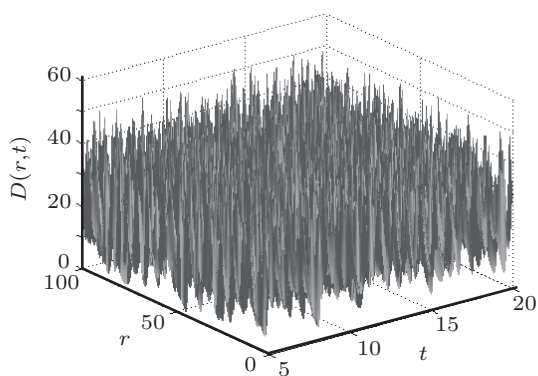


图4 状态变量 $D(r, t)$ 的时空演化

3 Maxwell-Bloch 方程时空混沌网络的同步研究

运用一台激光器驱动多台激光器进行光信号的同步传输和放大, 理论上等效于研究 N 个诸如单模激光 Maxwell-Bloch 方程 (5) 这样的时空混沌系统作为节点构成复杂网络的同步问题. 不失一般性地取网络的第一个节点的时空混沌系统为驱动系统, 其余的 $N - 1$ 个节点的时空混沌系统为响应系统, 第一个节点的时空混沌系统同时并行驱动 $N - 1$ 个时空混沌系统同步的原理图如图 5.

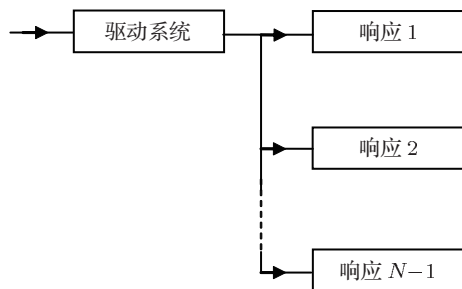


图5 并行驱动原理图

为了使同步方案具有普适性, 首先将单模激光 Maxwell-Bloch 方程 (5) 写成下列时空混沌系统的一般形式

$$\frac{\partial x(r, t)}{\partial t} = F(x(r, t), t), \quad (6)$$

其中 $x(r, t) \in R^n$ 是系统的状态变量, $F : R^n \rightarrow R^n$.

将 N 个时空混沌系统 (6) 作为节点按照图 5 的原理构成复杂网络, 考虑到在网络连接过程中, 节点时空混沌系统中的参量可能受到某种干扰而与实际值产生微小的偏差 ΔA , 故首先将时空混沌系统 (6) 改写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(r, t)}{\partial t} &= F(x(r, t), t) \\ &= (A + \Delta A - \delta)x(r, t) \\ &\quad + D(x(r, t), t), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 A 为经过特殊配置的线性项系数的实际值, δ 为其偏差 ΔA 的调控增益. 显然, $D(x(r, t), t) = F(x(r, t), t) - (A + \Delta A - \delta)x(r, t)$.

这样, 网络第 i 个节点所满足的状态方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i(r, t)}{\partial t} &= (A + \Delta A_i - \delta_i)x_i(r, t) \\ &\quad + D(x_i(r, t)) + \eta \sum_{j=1}^N G_{ij} D(x_j(r, t)) \end{aligned} \quad (8)$$

$(i = 1, 2, \dots, N),$

其中 η 是节点之间的耦合强度, G_{ij} 表示耦合矩阵 G 的矩阵元, 它的具体表示因网络的连接类型而异. 本文采用图 5 的连接方式, 耦合矩阵为

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

定义网络各节点时空混沌系统中的状态变量之间的误差

$$e_i(r, t) = x_{i+1}(r, t) - x_i(r, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N - 1), \quad (10)$$

可以进一步得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_i(r, t)}{\partial t} &= \frac{\partial x_{i+1}(r, t)}{\partial t} - \frac{\partial x_i(r, t)}{\partial t} \\ &= (A + \Delta A_i - \delta_i)e_i(r, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+[(\Delta A_{i+1} - \delta_{i+1}) \\
 &-(\Delta A_i - \delta_i)] x_{i+1}(r, t) \\
 &+(1 - \eta) [D(x_{i+1}(r, t)) \\
 &-D(x_i(r, t))]. \quad (11)
 \end{aligned}$$

对于无权网络, 耦合强度取 $\eta = 1$, (11) 式简化为

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial e_i(r, t)}{\partial t} &= (A + \Delta A_i - \delta_i) e_i(r, t) \\
 &+[(\Delta A_{i+1} - \delta_{i+1}) \\
 &-(\Delta A_i - \delta_i)] x_{i+1}(r, t). \quad (12)
 \end{aligned}$$

上式中若存在关系 $(\Delta A_{i+1} - \delta_{i+1}) - (\Delta A_i - \delta_i) = 0$, 即

$$\begin{aligned}
 \delta_k &= \Delta A_k - \Delta A_{k-1} + \delta_{k-1} \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} (\Delta A_{i+1} - \Delta A_i) + \delta_1. \quad (13)
 \end{aligned}$$

(12) 式可进一步表示为

$$\frac{\partial e_i(r, t)}{\partial t} = (A + \Delta A_i - \delta_i) e_i(r, t). \quad (14)$$

构造网络的 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} e_i^2(r, t), \quad (15)$$

显然,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N-1} (A + \Delta A_i - \delta_i) e_i^2(r, t). \quad (16)$$

由上式容易看出, 当满足 $A + \Delta A_i - \delta_i < 0$ 时,

$$\frac{\partial V}{\partial t} < 0. \quad (17)$$

基于 Lyapunov 定理^[19], 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e_i(r, t) \rightarrow 0$, 网络第一个节点的时空混沌系统同时并行驱动 $N - 1$ 个时空混沌系统达到完全同步。

4 时空混沌网络的同步仿真

取网络节点数 $N = 4$ 来仿真网络的同步效果. 单个节点的状态方程为 (5) 式所描述的单模激光时空混沌系统, 四个节点处的单模激光时空混沌系统状态变量分别为 $(E_1(r, t), P_1(r, t), D_1(r, t))$, $(E_2(r, t), P_2(r, t), D_2(r, t))$, $(E_3(r, t), P_3(r, t), D_3(r, t))$, $(E_4(r, t), P_4(r, t), D_4(r, t))$. 按照 (8) 式的连接构成复杂网络, 并假定网络第一个节点单模激光 Maxwell-Bloch 方程的时空形式 (5),

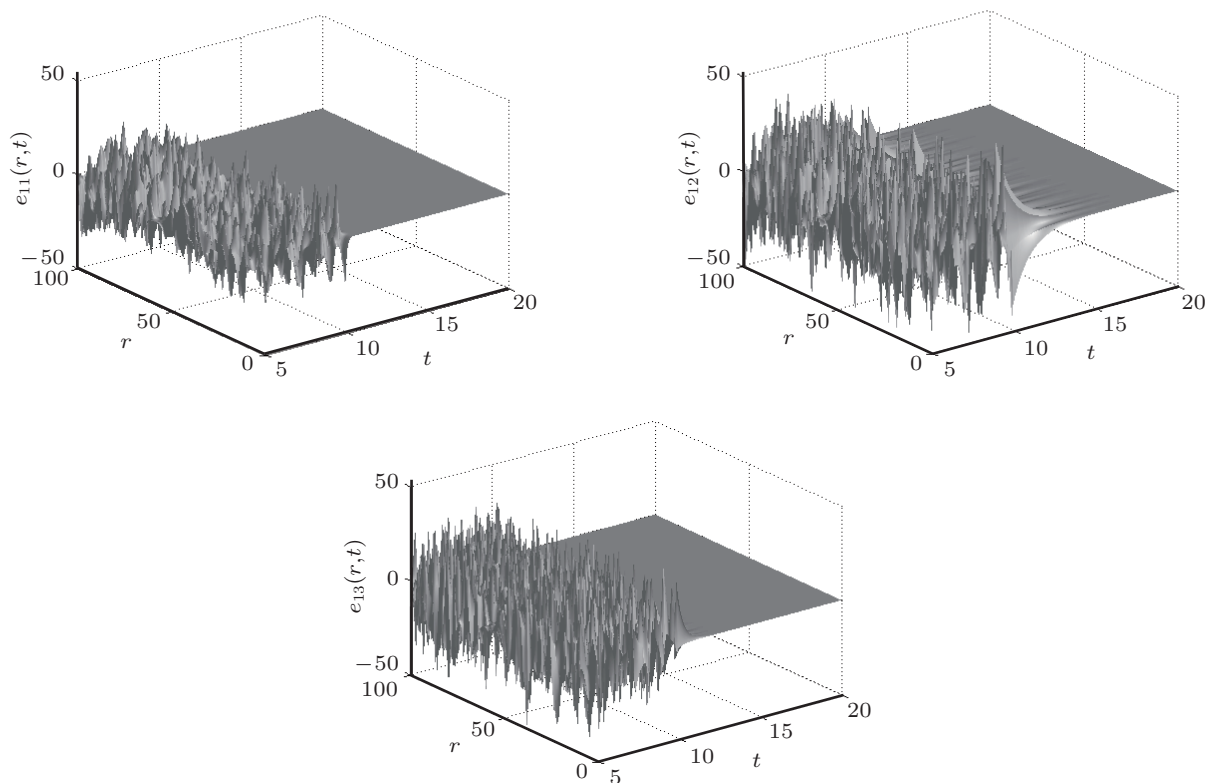


图6 节点1和2误差变量的时空演化

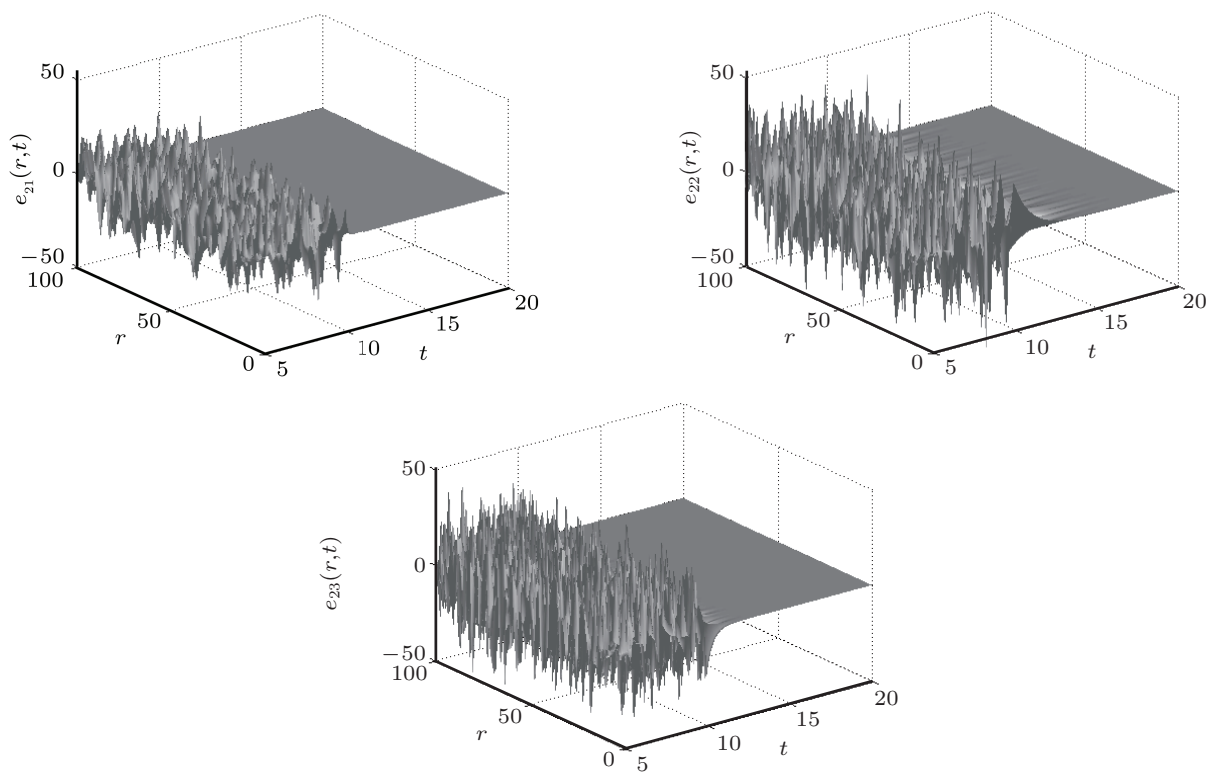


图7 节点2和3误差变量的时空演化

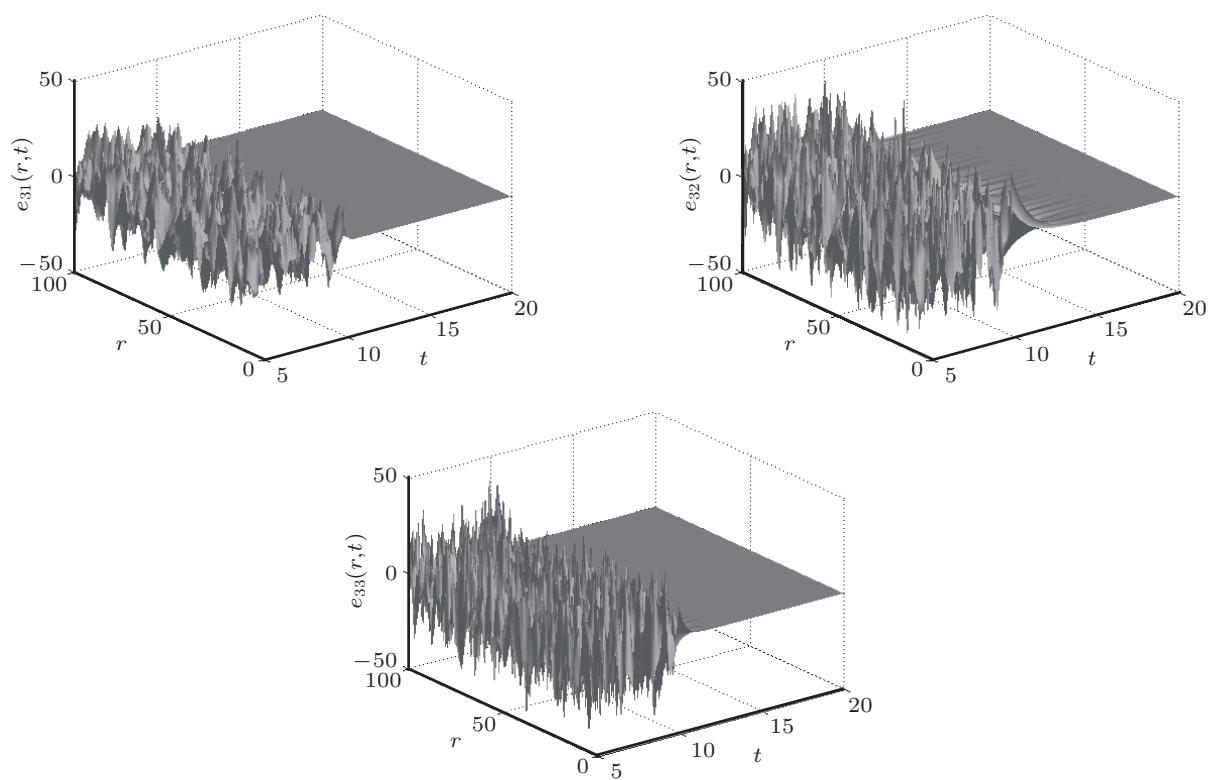


图8 节点3和4误差变量的时空演化

即驱动系统中的所有参量值均为实际值. 第一个节点经过特殊配置的线性项系数的实际值为

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}, \quad (18)$$

偏差 ΔA_1 和与之对应的调控增益 δ_1 均为零. 并假设

$$\Delta A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta b_2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\Delta A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta b_3 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\Delta A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta b_4 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$\Delta b_2 = 0.01$, $\Delta b_3 = -0.01$, $\Delta b_4 = 0.03$, 相应的调控增益 $\delta_i (i = 2, 3, 4)$ 的选取满足 (13) 式. 在任意时刻, 比如第 10 s 时进行网络的耦合连接, 仿真模拟网络误差变量随时空的演化规律如图 6—8 所示. 图 6—8 显示, 网络耦合连接后, 与四个节点的单模激光时空混沌系统状态变量相关的误差信

号 $e_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 均迅速地趋于零, 说明网络中的所有节点实现了完全同步.

另外, 当网络参量偏差 Δb_i 以及网络节点数 N 取其他值时, 重复上述仿真过程, 发现整个网络的同步效果仍十分理想.

5 结论

研究了激光 Maxwell-Bloch 方程时空混沌网络的同步问题. 首先考虑到光场的空间变化, 对单模激光 Maxwell-Bloch 方程进行了修正. 进一步以 N 个修正后具有时空混沌特性的单模激光 Maxwell-Bloch 方程作为网络节点, 在考虑到网络连接过程中, 节点时空混沌系统中的参量可能受到某种干扰而与实际值产生微小偏差的情况下, 采用网络第一个节点时空混沌系统同时并行驱动其余 $N - 1$ 个时空混沌系统同步的原理构成复杂网络. 基于 Lyapunov 定理, 确定了网络参量偏差调控增益的结构以及实现网络完全同步的条件. 进一步通过仿真模拟验证了这种同步方案的有效性. 理论分析和仿真结果表明, 在任意时刻进行网络的连接, 网络所有节点时空混沌系统中的状态变量之间的误差信号经过一个暂态过程后均趋于零, 各节点所对应的状态变量随时空的演化轨迹完全一致, 整个网络的完全同步得以实现. 并且网络参量偏差的正负以及网络节点数目对网络同步结果的稳定性没有影响.

- [1] Haken H 1975 *Phys. Lett. A* **53** 77
 [2] Yamada T, Graham R 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 1322
 [3] Gibbs H M, Hopf F A, Kaplan D L, Shoemaker R L 1981 *Phys. Rev. Lett.* **46** 474
 [4] Weiss C O, Godone A, Olafsson A 1983 *Phys. Lett. A* **28** 892
 [5] Weiss C O, Klische W, Ering P C, Cooper M 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 405
 [6] Sugawara T, Tachikawa M, Tsukamoto T, Shimizu T 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3502
 [7] Wedekind I, Parlitz U 2002 *Phys. Rev. E* **66** 026218
 [8] Kusumoto K, Ohtsubo J 2002 *Opt. Lett.* **27** 989
 [9] Wu L, Zhu S Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 300
 [10] Zhang F, Chu P 2004 *Opt. Commun.* **237** 213
 [11] Sun J, Zhu S Q 2005 *Commun. Theor. Phys.* **43** 233
 [12] Rogister F, Roy R 2005 *Laser Phys.* **15** 313
 [13] Roy R, Thornburg Jr K S 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2009
 [14] Vicente R, Tang S, Mulet J, Mirasso C R, Liu J M 2006 *Phys. Rev. E* **73** 047201
 [15] Aviad Y, Reidler I, Kinze W, Kanter I, Rosenbluh M 2008 *Phys. Rev. E* **78** 025204
 [16] Kanter I, Gross N, Klein E, Kopelowitz E, Yoskovits P, Khaykovich L, Kinzel W, Rosenbluh M 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 154101
 [17] Wang X F, Xia G Q, Wu Z M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4669 (in Chinese) [王小发, 夏光琼, 吴正茂 2009 物理学报 **58** 4669]
 [18] Loose A, Wünsche H J, Henneberger F 2010 *Phys. Rev. E* **82** 035201
 [19] Nicolis G, Prigogine I 1977 *Self-Organization in Nonequilibrium System* (New York: Wiley)

Study on spatiotemporal chaos network synchronization of the laser Maxwell-Bloch equation*

Lü Ling[†] Shang Jin-Yu Zhu Jia-Bo Shen Na Liu Shuang Zhang Xin

(College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

(Received 30 November 2011; revised manuscript received 18 December 2011)

Abstract

Spatiotemporal chaos network synchronization of the laser Maxwell-Bloch equation is studied. The single-mode laser Maxwell-Bloch equation is amended. Then N single-mode laser Maxwell-Bloch equations amended are taken as nodes to constitute a complex network. Considering the fact that the parameters of the spatiotemporal chaos systems taken as nodes may have small deviations from the actual values because of some interference in the network connecting process, the system at the first node is take as a driven system to drive the rest of the $N - 1$ systems in parallel to achieve synchronization. Furthermore, simulation is performed to verify the effectiveness of the method.

Keywords: complex network, spatiotemporal chaos synchronization, Lyapunov theorem, laser Maxwell-Bloch equation

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Pq

* Project supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20082147) and the Innovative Team Program of Liaoning Educational Committee, China (Grant No. 2008T108).

[†] E-mail: luling1960@yahoo.com.cn