

(2+1) 维破裂孤子方程的多 Solitoff 解及其演化*

曹晓霞¹⁾ 马松华^{2)†} 任清褒²⁾ 杨征²⁾

1) (丽水学院工学院, 丽水 323000)

2) (丽水学院理学院, 丽水 323000)

(2011 年 12 月 4 日收到; 2011 年 12 月 12 日收到修改稿)

借助计算机 Maple 软件系统, 利用拓展的 (G'/G) 方法和变量分离方法, 得到 (2+1) 维破裂孤子方程的精确解. 根据得到的孤立波解, 构造出多 Solitoff 局域结构, 研究了孤子随时间的演化.

关键词: 拓展的 (G'/G) 方法, 破裂孤子方程, 局域结构, 演化

PACS: 05.45.Yv, 03.65.Ge, 03.40.Kf

1 引言

探求非线性方程的精确解, 构建其局域激发结构一直是非线性理论工作者研究的重要课题. 近年来, 随着计算机应用的不断推广, 人们对非线性理论的研究不断深入, 许多求解非线性方程的新方法被相继提出, 如双线性法、齐次平衡法、标准的 Painlevé 截断分析法、波数合并法、同伦分析法、三角函数法和投射方程法^[1-20]等. 前不久, 基于齐次平衡原理和常微分方程理论, Wang 等^[21]提出了 (G'/G) 展开法, 成功求解了非线性方程的行波解. Li 等^[22-25]拓展了 (G'/G) 展开法, 得到了若干非线性方程包含任意函数的非行波解. 该方法简洁高效, 已经成为非线性数学物理方程的新一类求解方法. 本文的工作是将 (G'/G) 展开法扩展到 (2+1) 维破裂孤子方程

$$V_{xt} - 4V_{xy}V_x - 2V_{xx}V_y - V_{xxx}y = 0, \quad (1)$$

构造出多 Solitoff 局域结构, 研究了孤子随时间的演化. 在文献 [26] 中, Zhang 利用变量分离法得到了破裂孤子方程的变量分离解, 构造出系统的多线

孤子局域结构. 在文献 [27] 中, Ma 等利用 Riccati 方程映射法求解了 (2+1) 维破裂孤子方程, 得到了湮灭孤子解.

2 (2+1) 维破裂孤子方程的精确解

对于给定的一个非线性物理模型

$$P(u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, \dots) = 0, \quad (2)$$

设它有如下形式的解:

$$u = A(x) + \sum_{i=1}^n B_i(x) \left[\frac{G'(q(x))}{G(q(x))} \right]^i, \quad (3)$$

其中 $G = G(q(x))$ 满足二阶线性常微分方程

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0, \quad (4)$$

这里 $x = (x_0 = t, x_1, x_2, \dots, x_m)$, $A(x)$, $B_i(x)$ 和 $q(x)$ 为待定的 x 的任意函数. 将 (3) 和 (4) 式代入 (2) 式就可以得到一组 $A(x)$, $B_i(x)$ 和 $q(x)$ 的约束方程. 通过约束方程求得变量 $A(x)$, $B_i(x)$ 和 $q(x)$, 再根据辅助方程 (4) 的通解转化的如

* 浙江省自然科学基金 (批准号: Y6100257, Y6110140, Y6090545) 和浙江省教育厅科研基金 (批准号: Z201120169) 资助的课题.

† E-mail: msh6209@yahoo.com.cn

下 (G'/G) 表示式, 就可以确定所求方程的解.

$$\frac{G'}{G} = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2} + \Delta_1 \frac{C_1 \cosh(\Delta_1 q) + C_2 \sinh(\Delta_1 q)}{C_1 \sinh(\Delta_1 q) + C_2 \cosh(\Delta_1 q)} \\ \Delta_1 = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}, \lambda^2 - 4\mu > 0, \\ -\frac{\lambda}{2} + \Delta_2 \frac{-C_1 \sin(\Delta_2 q) + C_2 \cos(\Delta_2 q)}{C_1 \cos(\Delta_2 q) + C_2 \sin(\Delta_2 q)} \\ \Delta_2 = \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}, \lambda^2 - 4\mu < 0. \end{cases} \quad (5)$$

为了寻找破裂孤子方程的新解, 我们将 (G'/G) 展开法用于 (1) 式, 并根据 (3) 式, 设解为

$$V = f(x, y, t) + g(x, y, t) \frac{G'(q(x, y, t))}{G(q(x, y, t))}, \quad (6)$$

这里, f, g 和 q 是 (x, y, t) 的任意函数. 将 (6) 式和 (4) 式代入 (1) 式, 并按 (G'/G) 的同次幂合并, 提取 $(G'/G)^i$ ($i = 1, 2, \dots$) 前的系数, 令其等于零, 得到一系列方程:

$$\begin{aligned} & 2g_y q_x^3 \mu^2 + g q_{xxxy} \mu + g_y q_{xxx} \mu - g_t q_x \mu - g q_{xt} \mu \\ & + 6g q_x^2 q_{xy} \mu^2 - 4g^2 q_{xy} q_x \mu^2 + 4g q_{xy} f_x \mu \\ & - 2g^2 q_{xx} q_y \mu^2 + 2g q_y f_{xx} \mu - 4g_y q_x^2 g \mu^2 \\ & + 4g_y q_x f_x \mu + g_y q_x^3 \mu \lambda^2 - g q_y q_{xxx} \mu \lambda + g q_t q_x \mu \lambda \\ & - g q_y q_x^3 \mu \lambda^3 + 3g q_y q_x q_{xx} \mu \lambda^2 + 3g q_x^2 q_{xy} \mu \lambda^2 \\ & + 6g q_y q_x q_{xx} \mu^2 - 3g q_x^2 q_{xxy} \mu \lambda - 3g q_{xy} q_{xx} \mu \lambda \\ & - 3g_y q_x q_{xx} \mu \lambda - 4g q_y q_x f_x \mu \lambda \\ & + 6g^2 q_y q_x^2 \mu^2 \lambda - 8g q_x^3 q_y \mu^2 \lambda \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & = 0, \\ & -2g_y f_{xx} - g q_{xt} \lambda + g_y q_x^3 \lambda^3 - g_t q_x \lambda \\ & + g q_{xxxy} \lambda + g_y q_{xxx} \lambda - g q_y q_{xxx} \lambda^2 + g q_t q_x \lambda^2 \\ & - g q_y q_x^3 \lambda^4 - 2g q_y q_{xxx} \mu + 3g q_x^2 q_{xy} \lambda^3 \\ & + 4g q_{xy} f_x \lambda + 2g_y g q_{xx} \mu - 6g q_{xxy} q_x \mu \\ & - 6g_y q_{xx} q_x \mu + 2g q_y f_{xx} \lambda - 3g q_x q_{xxy} \lambda^2 \\ & - 3g_y q_x q_{xx} \lambda^2 - 6g q_{xx} q_{xy} \mu + 12g^2 q_y q_x^2 \mu^2 \\ & + 4g_y q_x f_x \lambda + 8g_y q_x^3 \mu \lambda - 16g q_y q_x^3 \mu^2 \\ & + 2g q_t q_x \mu - 3g q_{xy} q_{xx} \lambda^2 - 16g q_y q_x^3 \mu \lambda^2 \\ & - 8g^2 q_{xy} q_x \lambda - 4g q_y q_x f_x \lambda^2 + 3g q_y q_x q_{xx} \lambda^3 \\ & + 24g q_x^2 q_{xy} \mu \lambda + 24g q_x q_{xx} q_y \mu \lambda \end{aligned} \quad (8)$$

$$= 0, \quad g q_{xxxy} - g_t q_x + g_y q_{xxx} - g q_{xt}$$

$$\begin{aligned} & + 2g_y g q_{xx} \lambda - 9g q_{xxy} q_x \lambda - 9g_y q_{xx} q_x \lambda \\ & - 4g_y q_{xx} \mu - 2g^2 q_y q_{xx} \lambda^2 - 8g^2 q_{xy} q_x \mu \\ & + 21g q_y q_{xy} \lambda^2 - 3g q_y q_{xxx} \lambda - 4g^2 q_{xy} q_x \lambda^2 \\ & + 24g q_x^2 q_{xy} \mu - 9g q_{xx} q_{xy} \lambda - 6g_y g q_x^2 \lambda^2 \\ & + 3g q_x q_t \lambda + 6g^2 q_y q_x^2 \lambda^3 - 15g q_x^3 q_y \lambda^3 \\ & - 12g_y g q_x^2 \mu + 2g q_y f_{xx} + 4g_y q_x f_x \\ & + 8g_y q_x^3 \mu - 12g q_x q_y f_x \lambda - 60g q_y q_x^3 \mu \lambda \\ & + 36g^2 q_y q_x^2 \mu \lambda + 21g q_x q_{xx} q_y \lambda^2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & = 0, \\ & 24g^2 q_y q_x^2 \mu - 4g^2 q_y q_{xx} \lambda - 6g_y q_x q_{xx} \\ & - 8g q_x q_y f_x - 8g^2 q_{xy} q_x \lambda + 36g q_{xx} q_x q_y \lambda \\ & - 40g q_x^3 q_y \mu - 6g q_{xy} q_{xx} + 2g_y g q_{xx} \\ & - 6q_x g q_{xxy} + 2g q_x q_t + 12g_y q_x^3 \lambda \\ & - 50g q_y q_x^3 \lambda^2 + 24g^2 q_y q_x^2 \lambda^2 + 36g q_x^2 q_{xy} \lambda \\ & - 2g q_{xxx} q_y - 14g_y g q_x^2 \lambda \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & = 0, \\ & 18g q_x q_{xx} q_y + 6g_y q_x^3 - 2g^2 q_y q_{xx} \\ & - 8g_y g q_x^2 - 60g q_x^3 q_y \lambda - 4g^2 q_{xy} q_x \\ & + 18g q_x^2 q_{xy} + 30g^2 q_y q_x^2 \lambda \end{aligned} \quad (11)$$

$$= 0, \quad 12g^2 q_y q_x^2 - 24g q_x^3 q_y = 0, \quad (12)$$

由这些方程可求得:

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{4} \int [(-4q_x^3 q_y \mu - 14q_x q_y q_{xx} \lambda + 4q_{xx} q_{xy} \\ & - q_x q_t - 2q_x^2 q_{xy} \lambda + 3q_x q_{xxy} \\ & + q_x^3 q_y \lambda^2 + q_{xxx} q_y) / q_x q_y] \cdot dx, \\ g &= 2q_x. \end{aligned} \quad (13)$$

从所得到的方程中, 发现有如下变量分离形式的特解:

$$q = kx + \varphi(y) + \tau(t), \quad (14)$$

$\varphi(y), \tau(t)$ 是所示变量的任意函数, k 是任意常数.

设 $\Delta_1 = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}/2, \lambda^2 - 4\mu > 0$, 可以得到破裂孤子方程的孤波解:

$$V = -\frac{1}{4} \int \frac{-4q_x^3 q_y \mu - q_x q_t + q_x^3 q_y \lambda^2}{q_x q_y} dx + 2q_x$$

$$\left\{ -\frac{\lambda}{2} + \Delta_1 \frac{C_1 \cosh(\Delta_1 q) + C_2 \sinh(\Delta_1 q)}{C_1 \sinh(\Delta_1 q) + C_2 \cosh(\Delta_1 q)} \right\}, \quad (15)$$

设 $\Delta_2 = \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}$, $\lambda^2 - 4\mu < 0$, 可以得到破裂孤子方程的周期波解:

$$V = -\frac{1}{4} \int \frac{-4q_x^3 q_y \mu - q_x q_t + q_x^3 q_y \lambda^2}{q_x q_y} dx + 2q_x \left\{ -\frac{\lambda}{2} + \Delta_2 \frac{-C_1 \sin(\Delta_2 q) + C_2 \cos(\Delta_2 q)}{C_1 \cos(\Delta_2 q) + C_2 \sin(\Delta_2 q)} \right\}, \quad (16)$$

其中 $q = kx + \varphi(y) + \tau(t)$.

3 (2+1) 维破裂孤子方程的局域结构

由于 (15) 和 (16) 式中都包含有任意函数 $\varphi(y)$,

$\tau(t)$, 使得系统的解变的相当丰富. 本文以下部分以孤波解 (15) 式为例, 研究破裂孤子方程的局域激发.

在 (15) 式中, $q = kx + \varphi(y) + \tau(t)$. 取 $\varphi(y)$, $\tau(t)$ 为如下形式:

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= 0.5 + 0.5 \sinh(y), \\ \tau(t) &= 0.5 + 0.5 \cosh(t), \end{aligned} \quad (17)$$

可以得到一个多 Solitoff 孤子结构, 如图 1(a) 所示 (取 $k = 1, t = 10, \lambda = 3, \mu = 1, C_1 = 1, C_2 = 1$).

另外, 如果取 $\varphi(y)$ 和 $\tau(t)$ 为如下形式:

$$\varphi(y) = \sinh(y^2), \tau(t) = \cosh(t^2), \quad (18)$$

于是可以得到如图 1(b) 所示的另一种类型的多 Solitoff 孤子解 (取 $k = 1, t = 10, \lambda = 3, \mu = 1, C_1 = 1, C_2 = 1$).

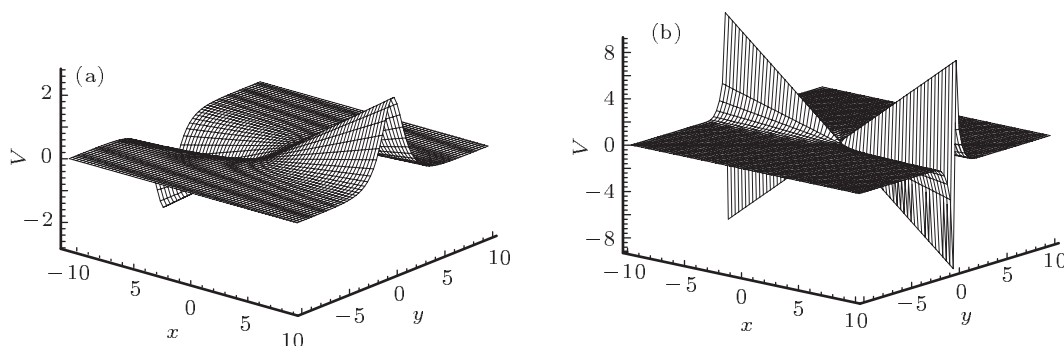


图 1 (15) 式利用 (17) 式和 (18) 式得到的两种不同类型的多 Solitoff 孤子解

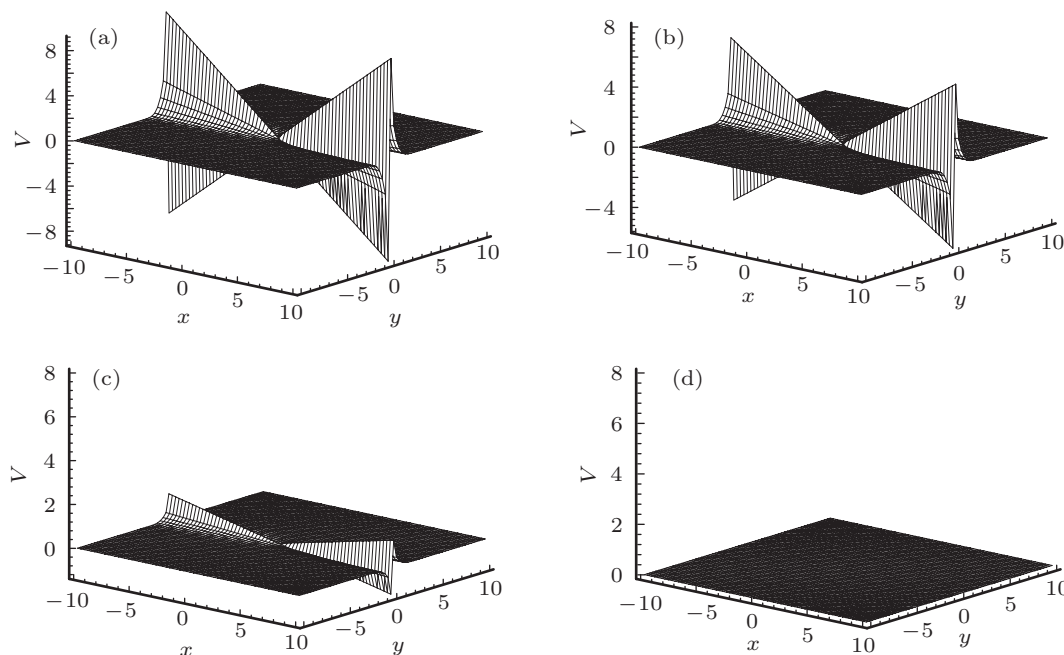


图 2 (15) 式利用 (18) 式得到的孤子时间演化图

上面我们得到了维破裂孤子方程的多 Solitoff 局域结构, 接下来研究多 Solitoff 孤子随时间的演化. 在 (15) 中, 取 $\varphi(y)$ 和 $\tau(t)$ 与 (18) 式相同, 取参数 $k = 1, \lambda = 3, \mu = 1, C_1 = 1, C_2 = 1$, 时间分别取 $t = 10, t = 12, t = 16, t = 20$, 得到如图 2 所示的孤子演化图. 从图中可以看到, 随着时间的增加, 孤子的波幅减小, 最后波幅变为零.

4 结论

本文利用拓展的 (G'/G) 展开法和变量分离法,

得到了 (2+1) 破裂孤子方程的孤立波解和周期波解. 根据得到的孤立波解, 构造出多 Solitoff 孤子局域结构, 研究了多 Solitoff 孤子随时间的演化. 实践证明, (G'/G) 展开法是求解非线性方程非常简便和实用的方法. 该方法对其他高维非线性物理模型的应用值得进一步研究.

作者对张解放教授和李帮庆教授的建议和指导表示感谢.

-
- [1] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵, 张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]
- [2] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 695 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 695]
- [3] Mo J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090203 (in Chinese) [莫嘉琪 2011 物理学报 **60** 090203]
- [4] Lou S Y 1996 *Commun. Theor. Phys.* **26** 487
- [5] Zhang J F, Huang W H, Zheng C L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2676 (in Chinese) [张解放, 黄文华, 郑春龙 2002 物理学报 **51** 2676]
- [6] Zhang D J 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **23** 1333
- [7] Zhang S L, Zhu X N, Wang Y M, Lou S Y 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 829
- [8] Zhang S L, Lou S Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 385
- [9] Taogetusang, Sirendaerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2121 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 2121]
- [10] Taogetusang, Sirendaerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5887 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 5887]
- [11] Yang Z, Ma S H, Fang J P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040508 (in Chinese) [杨征, 马松华, 方建平 2011 物理学报 **60** 040508]
- [12] Zheng C L, Fang J P, Chen L Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1468 (in Chinese) [郑春龙, 方建平, 陈立群 2005 物理学报 **54** 1468]
- [13] Fang J P, Zheng C L, Chen L Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 175
- [14] Dai C Q, Zhou G Q 2007 *Chin. Phys.* **16** 1201
- [15] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 620 (in Chinese) [马松华, 强继业, 方建平 2007 物理学报 **56** 620]
- [16] Ma S H, Fang J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5611 (in Chinese) [马松华, 方建平 2006 物理学报 **55** 5611]
- [17] Ma S H, Fang J P, Hong B H, Zheng C L 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **40** 1352
- [18] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Z. Naturforsch.* **63a** 121
- [19] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2767
- [20] Ma Y L, Li B Q 2010 *Appl. Math. Comput.* **216** 2137
- [21] Wang M L, Li X Z, Zhang J L 2008 *Phys. Lett. A* **372** 417
- [22] Li B Q, Ma Y L 2010 *Z. Naturforsch.* **65a** 518
- [23] Ma Y L, Li B Q 2010 *J. Math. Phys.* **51** 063512
- [24] Ma Y L, Li B Q, Sun J Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7402 (in Chinese) [马玉兰, 李帮庆, 孙践知 2009 物理学报 **58** 7402]
- [25] Li B Q, Ma Y L, Xu M P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1409 (in Chinese) [李帮庆, 马玉兰, 徐美萍 2010 物理学报 **59** 1409]
- [26] Zhang J F 20073 *Inter. J. Mod. Phys. B* **17** 4376
- [27] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 662

Multiple solitoff solutions and the evolution of (2+1)-dimensional breaking soliton equation*

Cao Xiao-Xia¹⁾ Ma Song-Hua^{2)†} Ren Qing-Bao²⁾ Yang Zheng²⁾

1) (College of Technology, Lishui University, Lishui 323000, China)

2) (College of Science, Lishui University, Lishui 323000, China)

(Received 4 December 2011; revised manuscript received 12 December 2011)

Abstract

With the help of the symbolic computation system Maple, an extended G'/G method and a variable separation method, new exact solutions of the (2+1)-dimensional breaking soliton equation are derived. With the derived solitary wave solutions, we obtain multi Solitoff localized structures and study the soliton evolution with time.

Keywords: extended G'/G method, breaking soliton equation, localized structures, evolution

PACS: 05.45.Yv, 03.65.Ge, 03.40.Kf

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant Nos. Y6100257, Y6110140 and Y6090545), and the Scientific Research Fund of Zhejiang Provincial Education Department of China (Grant No. Z201120169).

† E-mail: msh6209@yahoo.com.cn