

# 部分空间相干光束在非 Kolmogorov 湍流 大气中的有效曲率半径\*

黄永平<sup>1)2)†</sup> 赵光普<sup>1)</sup> 肖希<sup>1)</sup> 王藩侯<sup>1)</sup>

1) (计算物理四川省高校重点实验室, 宜宾 644000)

2) (宜宾学院物理与电子工程学院, 宜宾 644000)

(2011年6月26日收到; 2011年12月26日收到修改稿)

激光在湍流大气中的传输有重要的理论研究和实际应用意义. 以高斯-谢尔模型 (GSM) 光束作为部分空间相干光的典型例, 基于非 Kolmogorov 谱和广义惠更斯-菲涅耳原理, 推导出 GSM 光束在非 Kolmogorov 湍流中的有效曲率半径的解析表达式. 重点研究了湍流参数 (包括广义指数  $\alpha$ , 内尺度  $l_0$  和外尺度  $L_0$ ) 和传输距离  $z$  分别对 GSM 光束有效曲率半径的影响. 结果表明, 有效曲率半径  $R_x(z)$  随  $\alpha$  和  $z$  增加先减小然后再增大, 随  $L_0$  的减小而增大 ( $3.6 < \alpha < 4$ ), 随  $l_0$  的增加而增大. 并对结果做了物理解释.

**关键词:** 非 Kolmogorov 湍流, 有效曲率半径, 高斯-谢尔模型光束

**PACS:** 42.25.Bs, 42.68.Bz

## 1 引言

激光在湍流大气中的传输是一个有重要理论和实际应用的课题. 关于湍流对光强分布、光束扩展、光谱特性、相干特性以及光束质量因子等的影响已进行了许多研究<sup>[1-11]</sup>. 此外, 光束等相面的曲率半径是描述光束特性的一个重要参数, 文献[12—17]对光束在自由空间中的曲率半径和在大气湍流传输中有效曲率半径的变化已做了研究. 但已有工作大多针对理想大气湍流, 例如 Kolmogorov 湍流进行的. 实验测量结果与理想 Kolmogorov 模型有大的偏差<sup>[18-20]</sup>, 说明大气湍流并不总是遵守 Kolmogorov 模型<sup>[20-25]</sup>. 基于非 Kolmogorov 谱湍流模型, 文献[21—26]分别对到达角起伏、闪烁、信噪比和误码率、光束扩展和方向性以及  $M^2$  因子做了研究. 高斯-谢尔模 (GSM) 光束是部分空间相干光研究中的一个重要对象, 在一定条件下, 多模激光可用 GSM 光束来

表示<sup>[27]</sup>. Wu<sup>[1]</sup>, Dogariu 和 Amarande<sup>[2]</sup> 分别从理论上和实验上研究了 GSM 光束的大气传输特性, 并得出与完全相干光相比, 部分相干光对湍流效应更不敏感的重要结论. 一个有意义的研究问题是在非 Kolmogorov 湍流大气中激光有效曲率半径的变化. 本文以 GSM 光束为例, 利用非 Kolmogorov 谱和广义惠更斯-菲涅耳原理, 推导出 GSM 光束的有效曲率半径解析表达式, 对部分空间相干光在非 Kolmogorov 湍流中传输的有效曲率半径的变化规律做了详细的数值计算和分析, 所得结果对在非 Kolmogorov 湍流大气中的激光通信有潜在的应用意义.

## 2 GSM 光束在非 Kolmogorov 大气湍流中的有效曲率半径

设一准单色 GSM 光束沿  $z$  轴在  $z > 0$  的大气湍流中传输, 在 Cartesian 坐标系中源场处 ( $z = 0$ )

\* 四川省教育厅自然科学科研基金 (批准号: 12ZA203) 资助的课题.

† E-mail: yongph@163.com

的交叉谱密度<sup>[24]</sup>为

$$W(x'_1, x'_2; 0) = \exp\left(-\frac{x_1'^2 + x_2'^2}{w_0^2}\right) \times \exp\left(-\frac{(x'_1 - x'_2)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1)$$

$w_0, \sigma$  分别为在  $z = 0$  处对应的高斯光束束腰宽度和光束的空间相关长度;  $x'_1, x'_2$  分别为  $z = 0$  面上任意两点的位置.

根据广义惠更斯-菲涅尔衍射积分公式, 可将 GSM 光束通过大气湍流在  $z = \text{const}$  处的交叉谱密度表示为<sup>[5,26]</sup>

$$W(x, x_d; z) = \frac{k}{2\pi z} \iint W(x', x'_d; 0) \times \exp\left\{\frac{ik}{z}[(x - x') \cdot (x_d - x'_d)] - H(x_d, x'_d; z)\right\} dx' dx'_d, \quad (2)$$

式中  $x' = \frac{x_1' + x_2'}{2}$ ,  $x'_d = x_1' - x_2'$ ,  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,  $x_d = x_1 - x_2$ ; 波数  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  为波长,  $z$  为传播距离;  $x_1, x_2$  分别为  $z$  平面上任两点的位置.  $H(x_d, x'_d; z)$  为湍流介质扰动而引起的相位起伏<sup>[5,7,8]</sup>, 其表达式为

$$H(x_d, x'_d; z) = 4\pi^2 k^2 z \int_0^1 d\xi \int_0^\infty [1 - J_0(\kappa |x'_d \xi + (1 - \xi)x_d|)] \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa, \quad (3)$$

其中  $J_0$  是零阶贝塞尔函数,  $\Phi_n(\kappa)$  为大气湍流的折射率起伏空间功率谱.

对于非 Kolmogorov 谱来说,  $\Phi_n(\kappa)$  可表示为<sup>[21,24]</sup>

$$\Phi_n(\kappa, \alpha) = A(\alpha) \tilde{C}_n^2 \frac{\exp[-(\kappa^2/\kappa_m^2)]}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{\alpha/2}}, \quad 0 \leq \kappa \leq \infty, 3 < \alpha < 4, \quad (4)$$

式中,  $\kappa_0 = 2\pi/L_0$ , ( $L_0$  为湍流的外尺度),  $\kappa_m = c(\alpha)/l_0$ , ( $l_0$  为湍流的内尺度),  $c(\alpha) = \left[\frac{2}{3\pi} \Gamma(5 - \alpha/2) A(\alpha)\right]^{1/\alpha-5}$ , ( $\Gamma(5 - \alpha/2)$  为伽马函数),  $A(\alpha) = \Gamma(\alpha - 1) \cos(\alpha\pi/2)/4\pi^2$ ,  $\alpha$  为广义指数参数,  $\tilde{C}_n^2$  是广义的湍流折射率起伏结构常数, 单位是  $m^{3-\alpha}$ . 当  $\alpha = 11/3$ ,  $L_0 = \infty$  和  $l_0 = 0$  时,  $A(11/3) = 0.033$ ,  $\tilde{C}_n^2 = C_n^2$ , 即为常规的 Kolmogorov 谱.

引入一个表征湍流的影响的参量

$$T = \pi^2 \int_0^\infty \Phi_n(\kappa) \kappa^3 d\kappa, \quad (5)$$

其大小由大气湍流的折射率起伏谱密度函数  $\Phi_n(\kappa)$  决定.

将 (4) 式代人 (5) 式积分得到:

$$T(\alpha, l_0, L_0) = \frac{A(\alpha)\pi^2 \tilde{C}_n^2}{2(\alpha - 2)} \left\{ [c(\alpha)/l_0]^{2-\alpha} \times \left[ \frac{8\pi^2}{L_0^2} + (\alpha - 2) \frac{c^2(\alpha)}{l_0^2} \right] \times \exp\left(\frac{4\pi^2}{c^2(\alpha)} \frac{l_0^2}{L_0^2}\right) \times \Gamma\left[2 - \frac{\alpha}{2}, \frac{4\pi^2 l_0^2}{c^2(\alpha) L_0^2}\right] - 2 \left(\frac{2\pi}{L_0}\right)^{4-\alpha} \right\}. \quad (6)$$

(6) 式表明大气湍流量  $T(\alpha, l_0, L_0)$  与广义指数参数  $\alpha$ , 内尺度  $l_0$  和外尺度  $L_0$  有关,  $T(\alpha, l_0, L_0)$  值越大表明湍流越强.

部分相干光束在大气湍流中传输到  $z$  处的交叉谱密度可用 Wigner 分布函数 (WDF) 表示为<sup>[26]</sup>

$$h(x, \theta_x; z) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(x, x_d; z) \times \exp(-ik\theta_x x_d) dx_d. \quad (7)$$

基于 WDF 矩定义<sup>[5,28]</sup>, 在湍流中的 GSM 光束沿  $x$  方向的 WDF 的  $n + m = 2$  阶矩可表示为

$$\langle x^n \theta_x^m \rangle = \frac{1}{P} \iint x^n \theta_x^m h(x, \theta_x; z) dx d\theta_x, \quad (8)$$

其中  $P = \iint h(x, \theta_x; z) dx d\theta_x$  是光束总功率. 将 (2) 和 (7) 式代人 (8) 式, 经烦琐的计算可以得出 GSM 光束在湍流大气中沿  $x$  方向的空间二阶矩  $\langle x^2 \rangle$ 、空间频率域二阶矩  $\langle \theta_x^2 \rangle$  以及混合矩  $\langle x\theta_x \rangle$  分别为

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{4} w_0^2 + \frac{2z^2}{k^2 w_0} \left( \frac{w_0}{\sigma^2} + \frac{1}{2w_0} \right) + \frac{2}{3} T(\alpha, l_0, L_0) z^3, \quad (9)$$

$$\langle \theta_x^2 \rangle = \frac{2}{k^2 w_0} \left( \frac{w_0}{\sigma^2} + \frac{1}{2w_0} \right) + 2T(\alpha, l_0, L_0) z, \quad (10)$$

$$\langle x\theta_x \rangle = \frac{2z}{k^2 w_0} \left( \frac{w_0}{\sigma^2} + \frac{1}{2w_0} \right) + T(\alpha, l_0, L_0) z^2. \quad (11)$$

为了方便讨论, 引入光束的相干度参数<sup>[16]</sup>

$$\beta = \sigma/w_0, \quad (12)$$

$\beta$  越大, 表明光束的相干性越强.

根据文献 [14—17] 的定义, GSM 光束在非 Kolmogorov 湍流中的有效曲率半径可以表示为

$$R_x(z, \alpha, l_0, L_0) = \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle x \theta_x \rangle} = \frac{3\pi^2 w_0^4 \beta^2 + 3\lambda^2 z^2 (2 + \beta^2) + 8\pi^2 \beta^2 w_0^2 T(\alpha, l_0, L_0) z^3}{3(2 + \beta^2) \lambda^2 z + 12\pi^2 w_0^2 \beta^2 T(\alpha, l_0, L_0) z^2}. \quad (13)$$

从 (6) 和 (13) 式可看出, 在非 Kolmogorov 湍流中的 GSM 光束的有效曲率半径除了与光束参数 (束腰宽度  $w_0$ , 波长  $\lambda$ , 相干度  $\beta$ ) 有关外, 还与传输距离  $z$  和湍流的广义指数  $\alpha$ , 内尺度  $l_0$  和外尺度  $L_0$  有关.

### 3 数值计算与结果分析

根据 (6) 和 (13) 式对 GSM 光束通过非 Kol-

mogorov 湍流大气传输的有效曲率半径随各参数的变化做数值计算和分析, 典型结果如图 1—4 所示.

图 1 描述了湍流量  $T(\alpha, l_0, L_0)$  随广义指数  $\alpha$  的变化关系, 计算参数分别为  $\tilde{C}_n^2 = 2 \times 10^{-15} m^3 - \alpha$ , 图 (a)  $L_0 = 20$  m, (b)  $l_0 = 0.01$  m. 从图 1(a) 和 (b) 可看出,  $T(\alpha, l_0, L_0)$  随广义指数  $\alpha$  增加非单调变化, 当  $\alpha = 3.11$  时 (这由  $\frac{\partial T(\alpha, l_0, L_0)}{\partial \alpha} = 0$  来决定),  $T(\alpha, l_0, L_0)$  出现了一个极大值.

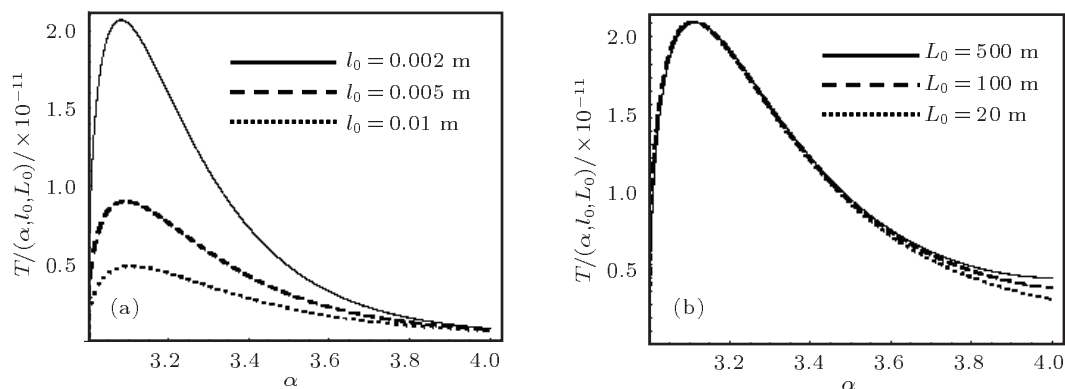


图 1  $T(\alpha, l_0, L_0)$  随广义指数  $\alpha$  的变化 (a) 不同的内尺度; (b) 不同的外尺度

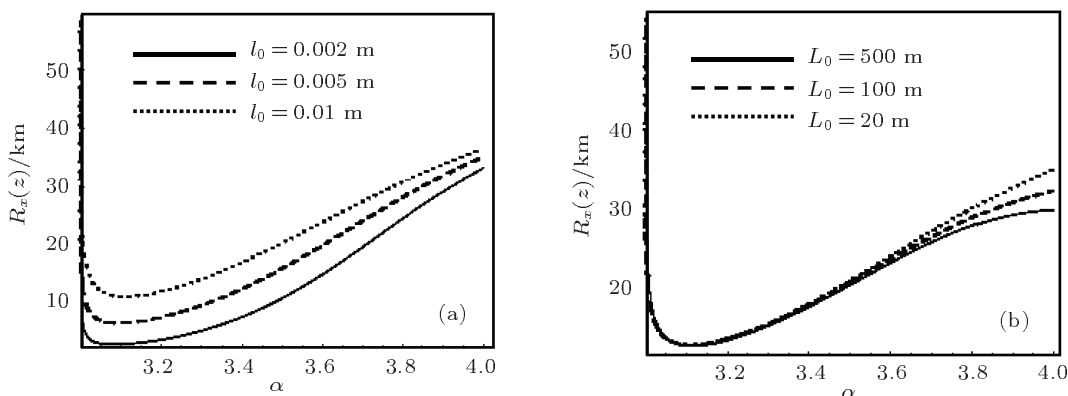


图 2 GSM 光束的有效曲率半径随  $\alpha$  的变化 (a) 不同的内尺度; (b) 不同的外尺度

图 2(a) 和 (b) 分别描述了 GSM 光束的有效曲率半径对不同的内尺度  $l_0$  和外尺度  $L_0$  随广义指数  $\alpha$  的变化, 计算参数分别为  $\lambda = 850$  nm,  $w_0 = 0.05$  m,  $\beta = 2$ ,  $z = 1$  km, 其余参数与图 1 所用参数一致. 从图 2(a) 可以看出, 有效曲率半径随内尺度的减小而减小, 这是因为由图 1(a) 得到湍流的内尺

度减小会导致湍流强度  $T(\alpha, l_0, L_0)$  增大, 而湍流越强有效曲率半径越小. 图 2(b) 表明在  $3 < \alpha < 3.6$  区间时, 有效曲率半径几乎不随外尺度的增加而变化, 而在  $3.6 < \alpha < 4$  区间, 有效曲率半径随外尺度的增加而减小. 因为图 1(b) 已表明在  $3 < \alpha < 3.6$  区间湍流强度  $T(\alpha, l_0, L_0)$  几乎不随外尺度的

增加而改变, 所以在这个区间湍流外尺度的增大也几乎不影响有效曲率半径. 而在  $3.6 < \alpha < 4$  区间湍流强度随外尺度的增加而加强, 湍流强度增大导致有效曲率半径减小. 另外, 图 2(a) 和 (b) 表示光束的曲率半径随广义指数的变化在

$\alpha = 3.11$  时存在极小值, 图 2(a) 中内尺度  $l_0$  为 0.01, 0.005, 0.002 m 对应的极小值分别为 11.4146, 7.0115 和 3.6575 km, 而在图 2(b) 中外尺度  $L_0$  为 20, 100, 500 m 对应的极小值相同, 均为 11.4146 km.

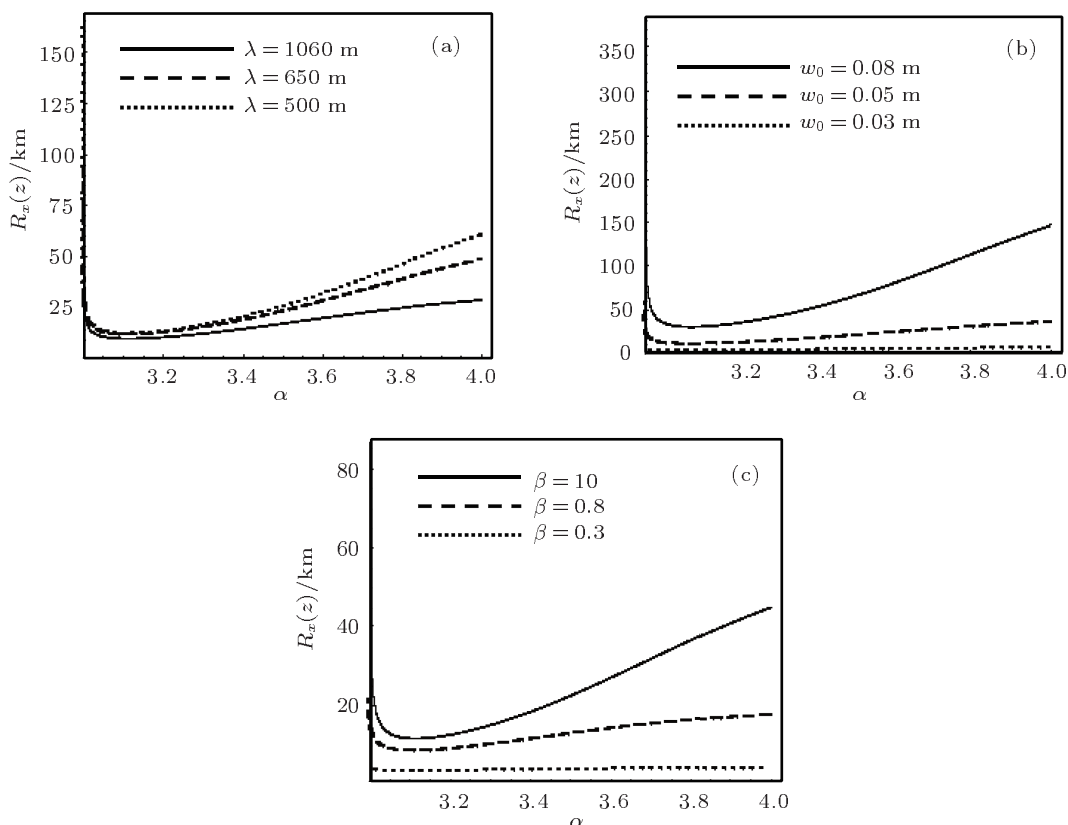


图 3 (a) 不同波长、(b) 不同束腰宽度、(c) 不同相干度的 GSM 光束的有效曲率半径随  $\alpha$  的变化

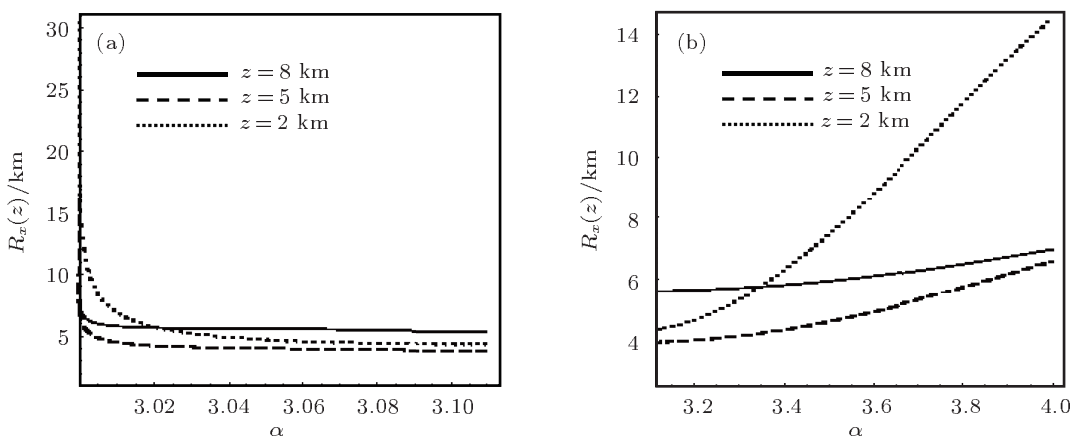


图 4 GSM 光束的有效曲率半径对不同传输距离随  $\alpha$  的变化 (a)  $3 < \alpha \leq 3.11$ ; (b)  $3.11 < \alpha < 4$

图 3 和图 4 分别描述了 GSM 光束的有效曲率半径对不同光束参数 (波长, 束腰宽度以及相干度) 和传输距离随  $\alpha$  的变化关系, 计算参数与图 2 所用参数一致. 从图 3(a)—(c) 可以看出, 在传输距离比较近 (如  $z = 1$  km), 广义指数  $\alpha$  比较大 (如  $\alpha > 3.2$ ) 时, GSM 光束的有效曲率半径随光束波长的增大而减小, 随光束束腰宽度的增加而增大, 随光束相干度增加而增大,  $\alpha$  越大这种变化趋势越明显. 而对于光束在  $\alpha = 11/3$  的理想 Kolmogorov 大气湍流中传输时也遵循这样的变化趋势. 从图 3(b) 和 (c) 还可看出, 当  $w_0 < 0.03$  和  $\beta < 0.3$  时, GSM 光束的有效曲率半径几乎不随  $\alpha$  的改变而改变, 表明束腰宽度越小, 相干性越差的光束的有效曲率半径随广义指数  $\alpha$  的变化越小. 图 3(c) 还说明了在弱湍流中传输的光束相干性越差, 有效曲率半径的变化受湍流的影响越小, 因此部分相干光比完全相干光对湍流的影响更不敏感. 图 4(a) 和 (b) 表明, GSM 光束的有效曲率半径随传输距离的增加呈先减小后增大的变化趋势, 这与文献 [11—17] 的结论一致. 但是我们还从图 4(a) 可以看出, 当  $3 < \alpha \leq 3.11$  时, GSM 光束在不同传输平面的有效曲率半径随  $\alpha$  的增加而减小, 随传输距离从 2 km 增加至 8 km 呈先减小后增大的变化趋势. 图 4(b) 表明, 当  $3.11 < \alpha < 4$  时, GSM 光束在不同传输平面的有效曲率半径随  $\alpha$  的增加而增加, 随传输距离的增加仍然呈先减小后增大的变化趋势. 另外, 图 4(a) 和 (b) 还表明了传输距离越大, 有效曲率半径随  $\alpha$  的变化趋

势越不显著, 这说明  $\alpha$  对光束传输距离比较远时的有效曲率半径变化的影响比传输距离近时要小. 根据 (13) 式可知, 当  $z$  足够远时 (如  $z \rightarrow \infty$ ),

$$R_x(z, \alpha, l_0, L_0) \approx \frac{(2 + \beta^2)\lambda^2}{4\pi^2 w_0^2 \beta^2 T(\alpha, l_0, L_0)} + \frac{2}{3}z. \quad (14)$$

从式 (14) 可看出, 虽然湍流的变化会改变有效曲率半径, 但是随着传输距离  $z$  进一步增大, 有效曲率半径主要由等式右边第二项即由传输距离来决定, 湍流对有效曲率半径的影响相对减小.

## 4 结论

本文基于广义惠更斯 - 菲涅耳原理和非 Kolmogorov 湍流谱, 以 GSM 光束为例讨论了部分空间相干光在非 Kolmogorov 湍流大气中的有效曲率半径的变化规律. 数值计算和物理分析表明, GSM 光束在非 Kolmogorov 湍流中的有效曲率半径随湍流的广义指数  $\alpha$  和传输距离的增加呈先减小后增大的变化趋势, 随内尺度的增大而增大, 随外尺度的增大而减小 (当  $3.6 < \alpha < 4$  时). 另外, GSM 光束在比较弱的非 Kolmogorov 湍流中传输距离比较近时, 有效曲率半径还随光束参数波长的增加而减小, 随束腰的增加而增大, 随相干度的增加而增大. 对波长越长、束腰宽度越小、相干性越差的光束传输距离越远时, 其有效曲率半径随  $\alpha$  的变化越小. 本文所得到的结论对非 Kolmogorov 湍流大气中激光通信有潜在的应用意义.

- [1] Wu J 1990 *J. Mod. Opt.* **37** 671
- [2] Dogariu A, Amarande S 2003 *Opt. Lett.* **28** 10
- [3] Ji X L, Chen X W, Lü B D 2008 *J. Opt. Soc. Am. A* **25** 21
- [4] Yang A L, Zhang E T, Ji X L, Lü B D 2009 *Opt. Laser Technol.* **41** 714
- [5] Dan Y Q, Zhang B 2009 *Opt. Lett.* **34** 563
- [6] Eyyuboğlu H T 2008 *Opt. Laser Technol.* **40** 156
- [7] Baykal Y 2006 *J. Opt. Soc. Am. A* **23** 889
- [8] Huang Y P, Zhang B, Dan Y Q, Qiao N 2011 *High Power Laser Particle Beams* **23** 59 (in Chinese) [黄永平, 张彬, 但有全, 乔娜 2011 强激光与粒子束 **23** 59]
- [9] Ji X L, Pu Z C 2010 *Chin. Phys. B* **19** 029201
- [10] Chu X X 2011 *Chin. Phys. B* **20** 014207
- [11] Chen X W, Tang M Y, Ji X L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2607 (in Chinese) [陈晓文, 汤明玥, 季小玲 2008 物理学报 **57** 2607]
- [12] Ji G M, Ji X L 2010 *Opt. Laser Technol.* **42** 1054
- [13] Ji X L, Li X Q 2010 *J. Opt.* **12** 1
- [14] Ji X L, Eyyuboğlu H T, Baykal Y 2010 *Opt. Express* **18** 6922
- [15] Ji X L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3953 (in Chinese) [季小玲 2010 物理学报 **59** 3953]
- [16] Eyyuboğlu H T, Ji X L 2010 *Appl. Phys. B* **101** 353
- [17] Ji X L 2010 *Acta Opt. in.* **30** 2845 (in Chinese) [季小玲 2010 光学学报 **30** 2845]
- [18] Dayton D, Pierson B, Spielbusch B, Gonglewski J 1992 *Opt. Lett.* **17** 1737
- [19] Golbraikh E, Moiseev S S 2002 *Phys. Lett. A* **305** 173
- [20] Rao C H, Jiang W H, Ling N 2000 *J. Mod. Opt.* **47** 1111
- [21] Toselli I, Andrews L C, Phillips R L, Ferrero V 2007 *Proc. SPIE* **6457** 65510E-1
- [22] Toselli I, Andrews L C, Phillips R L, Ferrero V 2008 *Opt. Eng.* **47** 026003
- [23] Toselli I, Andrews L C, Phillips R L, Ferrero V 2009 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **57** 1783
- [24] Wu G H, Guo H, Yu S, Luo B 2010 *Opt. Lett.* **35** 715
- [25] He X M, Lü B D 2011 *Chin. Phys. B* **20** 094210
- [26] Wu G H, Zhao T G, Ren J H, Zhang J Y, Zhang X L, Li W H 2011 *Opt. Laser Technol.* **43** 1225
- [27] Gase R 1991 *J. Mod. Opt.* **38** 1107
- [28] Bastiaans M J 1986 *Opt. Soc. Am. A* **3** 1227

# Effective radius of curvature of spatially partially coherent beams propagating through non-Kolmogorov turbulence\*

Huang Yong-Ping<sup>1)2)†</sup> Zhao Guang-Pu<sup>1)</sup> Xiao Xi<sup>1)</sup> Wang Fan-Hou<sup>1)</sup>

1) (Computational Physics Key Laboratory of Sichuan Province, Yibin 644007, China)

2) (School of Physics and Electronic Engineering, Yibin University, Yibin 644007, China)

(Received 26 June 2011; revised manuscript received 26 December 2011)

## Abstract

The laser beam propagation through atmospheric turbulence is of importance for both theoretical study and practical applications. Taking the Gaussian Schell-model (GSM) beam as a typical example of spatially partially coherent beams, based on the non-Kolmogorov spectrum and generalized Huygens-Fresnel principle, the analytical expression for the effective radius of curvature of GSM beams propagating through non-Kolmogorov turbulence is derived. The effects of turbulence parameters (including generalized exponent parameter  $\alpha$ , inner scale  $l_0$ , and outer scale  $L_0$ ) and propagation distance  $z$  on the effective radius of curvature of GSM beams are stressed. It is shown that the effective radius of curvature of GSM beams increases with outer scale  $L_0$  decreasing for  $3.6 < \alpha < 4$  and the inner scale  $l_0$  increasing, but does not monotonically vary with the increases of exponent parameter  $\alpha$  and propagation distance  $z$ . The results are explained physically.

**Keywords:** non-Kolmogorov turbulence, effective radius of curvature, Gaussian-Schell model beams

**PACS:** 42.25.Bs, 42.68.Bz

---

\* Project supported by Science Foundation of Sichuan Provincial Education Department, China (Grant No. 12ZA203).

† E-mail: yongph@163.com