

基于伽辽金级数的空间电荷场计算模型*

黄传禄¹⁾²⁾ 丁耀根^{1)†} 王勇¹⁾ 谢兴娟¹⁾²⁾ 高冬平¹⁾

1) (中国科学院电子学研究所, 中国科学院高功率微波源与技术重点实验室, 北京 100190)

2) (中国科学院研究生院, 北京 100049)

(2011年9月19日收到; 2011年12月26日收到修改稿)

利用局部伽辽金矩量法, 建立了电子注空间电荷场的 2.5 维计算模型. 将空间电荷场在径向展开为各个模式的叠加, 利用伽辽金级数表示, 通过求解其系数方程组, 最终求得空间电荷场. 利用本文的模型, 计算分析了电子注空间电荷场的特性, 并研究了模型中仿真参量对空间电荷场计算结果的影响. 本文的空间电荷场计算模型利用粒子模拟基本方法, 可以应用到速调管注波相互作用计算模型中.

关键词: 速调管, 空间电荷场, 伽辽金级数, 粒子模拟

PACS: 84.40.Fe, 52.65.-y, 13.40.-f

1 引言

随着现代速调管理论与计算机模拟技术的不断发展, 使用计算机模拟速调管中电子注与高频系统相互作用的物理过程, 从而建立器件的增益、效率、带宽等特性与其电气和几何参数的对应关系, 已成为现代微波器件的主要设计手段^[1-4]. 这从根本上改变了依靠分析计算和实验结合的传统设计方法, 大大提高了设计精度, 缩短了研制周期. 在速调管中电子注与电磁场相互作用, 即注波相互作用的计算模拟中, 带电粒子空间电荷场的计算是其中最重要和复杂的部分^[5-8]. 在很大程度上, 空间电荷场的模型算法决定了整个相互作用模型的准确性与可靠性. 空间电荷场的计算作为目前注波相互作用理论与计算模拟的热点, 正受到日益深入的研究.

传统的速调管基础理论中, 运动学理论不考虑空间电荷场的作用, 而空间电荷波理论是基于小信号假设, 无法考虑非线性注波相互作用状态下电子空间电荷场的计算^[6]. 早期的一维圆盘模型与二维圆环模型^[4,5,9], 采用静电场概念, 利用格林函数法, 计算电子圆盘(或圆环)间的库仑力, 不包含电子运

动速度的信息, 不能考虑动态电荷场的概念, 计算精度不够. 利用粒子模拟(PIC)方法直接在空间网格上数值求解有源 Maxwell 方程组^[3,10-15], 可以更准确地得到电子注产生的空间电荷场. 其中最著名的代表便是 MGAIC3D 以及 MAFIA^[16,17], 但它们使用复杂、计算时间长、内存要求高, 限制了其在速调管计算模拟中的普遍使用.

当前空间电荷场计算模型的发展重点是基于 2.5 维 PIC 方法, 通过数值计算方法, 在 2 维网格上直接求解电磁场方程, 从而得到空间电荷场. 其基础上的注波相互作用计算模型, 计算精度高、速度快, 是当前相互作用模拟软件的主要发展方向, 目前主要有 Arsenal, FCI, TESLA 等^[13-15]. 因此, 发展基于 PIC 方法的 2.5 维空间电荷场计算模型, 是我国当前开展速调管计算模拟研究并跟踪国际前沿的迫切需要.

本文基于 PIC 方法, 从有源 Maxwell 方程组出发, 将漂移管内带电粒子产生的电荷场展成一系列基本模式的叠加, 采用伽辽金级数表示各个模式的电磁场分量, 并利用伽辽金矩量法, 求解得到电子注的空间电荷场. 本文从理论上详细推导了空间电荷场的计算模型, 并通过计算结果分析了算法

* 国家自然科学基金(批准号: 60971073)资助的课题.

† E-mail: dingyg@mail.ie.ac.cn

中的关键参量对电荷场模型计算准确性和稳定性的影响.

2 物理模型

2.1 空间电荷场的伽辽金级数表达式

速调管漂移管内带电粒子产生的空间电荷场, 满足以下有源 Maxwell 方程组:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \quad (1)$$

设粒子运动的轴向平均速度为 $\langle v_z \rangle$, 横向平均速度为 $\langle v_\perp \rangle$, 并且满足 $|\langle v_\perp \rangle| \ll |\langle v_z \rangle|$. 空间电荷场在粒子周围, 并随粒子一起运动, 则以运动的粒子为参照, 电荷场不随时间变化^[6]. 因此方程中对时间的微分可以转化为对 z 的微分, 即 $\frac{\partial}{\partial t} = -\langle v_z \rangle \frac{\partial}{\partial z}$. 则 (1) 式可以写为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} + \varepsilon_0 \langle v_z \rangle \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} - \mu_0 \langle v_z \rangle \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}, \quad (2)$$

其中: \mathbf{J} 为电子产生的运动电流密度, ρ 为电荷密度, 满足电荷守恒定律, 即: $\langle v_z \rangle = \langle j_z \rangle / \rho$, $\langle v_r \rangle = \langle j_r \rangle / \rho$. 式中 $\langle \cdot \rangle$ 表示平均值, 即对参量 V 满足 $\langle V \rangle = \frac{1}{T_0 S_b} \int_0^{T_0} \int_S V(r, t) dt$, $T_0 = 2\pi / \omega_0$ 为高频周期, S 为电子注横截面, $S_b = \pi R_b^2$ 为电子注横截面积.

由于系统的轴对称特性, 其空间电荷场的电场分量仅包括轴向和径向分量, 磁场分量仅包括角向分量^[3,6]. 其各分量的径向解可以看作是漂移管内 TM_{0n} 模式的叠加^[13]. 柱坐标下空间电荷场可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \{E_r, 0, E_z\} \\ \mathbf{H} = \{0, H_\varphi, 0\} \end{cases}, \quad (3)$$

则 (2) 式写成如下分量形式:

$$-\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\partial E_r}{\partial z} - \mu_0 \langle v_z \rangle \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = 0, \quad (4a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) + \varepsilon_0 \langle v_z \rangle \frac{\partial E_z}{\partial z} = \langle j_z \rangle, \quad (4b)$$

$$-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} + \varepsilon_0 \langle v_z \rangle \frac{\partial E_r}{\partial z} = \langle j_r \rangle, \quad (4c)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\langle j_z \rangle}{\langle v_z \rangle \varepsilon_0}. \quad (4d)$$

将 (4c) 式代入 (4a) 式消去 H_φ 分量可得:

$$(\mu_0 \varepsilon_0 \langle v_z \rangle \langle v_z \rangle - 1) \frac{\partial E_r}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial r} = \mu_0 \langle v_z \rangle \langle j_r \rangle; \quad (5)$$

同样由 (4b) 与 (4d) 式消去 $\langle j_z \rangle$ 可得:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \varepsilon_0 \langle v_z \rangle \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) = 0. \quad (6)$$

已知 TM_{0n} 模式的径向解为^[1,6]

$$f_n(r) = b_n J_0(\chi_n r), \quad (7)$$

J_0 为零阶贝塞尔函数. 在径向归一化, 即 $\int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} b_n^2 [J_0(\chi_n r)]^2 r dr d\varphi = 1$, 得到:

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\pi r_T} J_1(\chi_n r_T)}, \quad (8)$$

其中 $\chi_n = \mu_{0n} / r_T$, μ_{0n} 为零阶贝塞尔函数的第 n 个根, R_T 为漂移管半径.

根据矩量法基本原理, 将电荷场用一系列相互正交的基函数表示. 设各个分量 E_z, E_r, H_φ 的径向基函数分别为 $\bar{G}_n^1(r), \bar{G}_n^2(r), \bar{G}_n^3(r)$.

基函数满足如下正交性, 即:

$$\begin{aligned} (\bar{G}_m^i, \bar{G}_n^j) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} \bar{G}_m^i \bar{G}_n^j r dr d\varphi \\ &= \begin{cases} 0, (i \neq j) \vee (m \neq n) \\ 1, (i = j) \wedge (m = n) \end{cases}, \quad (9) \end{aligned}$$

最终得到各基函数的矢量表达式:

$$\bar{G}_n^1(r) = f_n \bar{z}_0 = b_n J_0(\chi_n r) \bar{z}_0, \quad (10)$$

$$\bar{G}_n^2(r) = \frac{1}{\chi_n} \nabla_\perp f_n = -b_n J_1(\chi_n r) \bar{r}_0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_n^3(r) &= \frac{1}{\chi_n} [\nabla_\perp f_n \times \bar{z}_0] \\ &= b_n J_1(\chi_n r) \bar{\varphi}_0. \end{aligned} \quad (12)$$

取 $\bar{G}_n^1(r), \bar{G}_n^2(r), \bar{G}_n^3(r)$ 的标量形式, 将电荷场看成各模式的叠加, 可表示为如下级数形式:

$$\begin{cases} E_z(z, r) = \sum_{n=1}^N g_n^1(z) G_n^1(r) \\ E_r(z, r) = \sum_{n=1}^N g_n^2(z) G_n^2(r) \\ H_\varphi(z, r) = \sum_{n=1}^N g_n^3(z) G_n^3(r) \end{cases}, \quad (13)$$

上式即空间电荷场的伽辽金级数表达形式, 其中 g_n^{1-3} 为基函数系数, 是轴向位置 z 的函数, g_n^{1-3} 的物理含义即是各个径向模式的幅值, 也可以看作为场分量在轴向的基函数; N 为径向展开模式的个数. 需要注意的是, 在模型中为计算方便, 空间电荷场取归一化形式. 电场归一化系数为 V_0/L_0 , V_0 为电子注电压, $L_0 = 2\pi v_0/\omega_0$ 为电子波长, v_0 为电子直流速度, ω_0 为工作角频率. 磁场归一化系数为 B_0/μ_0 , B_0 为聚焦磁场强度. 通过 (13) 式, 空间电荷场的计算就转化为系数数组 g_n^{1-3} 的求解.

2.2 系数数组 g_n^{1-3} 的求解方程

将 (13) 式代入 (6) 式, 并考虑场分量的归一化, 可得:

$$\begin{aligned} & \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \sum_{n=1}^N g_n^3(z) G_n^3(r) \right] \\ & - \varepsilon_0 \langle v_z \rangle \frac{V_0}{L} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \sum_{n=1}^N g_n^2(z) G_n^2(r) \right] \\ & = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

整理得到:

$$g_n^3 = -\beta\beta_0 \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{\gamma_0}{1+\gamma_0} g_n^2, \quad (15)$$

其中 $\beta_0 = v_0/c$, $\beta = \langle v_z \rangle / c$, $\omega_c = \eta_e B_0 / \gamma_0$ 为电子旋转角频率, γ_0 为相对论因子, c 为光速, η_e 为电子荷质比.

将 (13) 式代入 (4b) 式得到:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \sum_{n=1}^N g_n^3(z) G_n^3(r) \right] \\ & + \varepsilon_0 \langle v_z \rangle \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=1}^N g_n^1(z) G_n^1(r) \\ & = \langle j_z \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

(16) 式代入 (15) 式可得:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial z} g_n^1(z) G_n^1(r) \\ & - \sum_{n=1}^N g_n^2(z) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r G_n^3(r)] \\ & = \frac{\langle j_z \rangle}{\varepsilon_0 \langle v_z \rangle}. \end{aligned} \quad (17)$$

将 (13) 式代入 (5) 式可得:

$$\sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial z} g_n^2(z) G_n^2(r)$$

$$\begin{aligned} & -\gamma^2 \sum_{n=1}^N g_n^1(z) \frac{\partial}{\partial r} G_n^1(r) \\ & = \gamma^2 \mu_0 \langle v_z \rangle \langle j_r \rangle, \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $\mu_0 \varepsilon_0 \langle v_z \rangle \langle v_z \rangle - 1 = -1/\gamma^2$, γ 为对应平均速度 $\langle v_z \rangle$ 的相对论因子.

根据矩量法中的伽辽金方法, (17) 式与 (18) 式分别乘权函数 $G_n^1(r)$, $G_n^2(r)$, 并在径向积分可得:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \frac{\partial g_n^1(z)}{\partial z} \int_0^{R_T} G_n^1(r) G_n^1(r) 2\pi r dr \\ & - \sum_{n=1}^N g_n^2(z) \int_0^{R_T} \frac{1}{r} \frac{\partial [r G_n^3(r)]}{\partial r} G_n^1(r) 2\pi r dr \\ & = \int_0^{R_T} \frac{\langle j_z \rangle}{\varepsilon_0 \langle v_z \rangle} G_n^1(r) 2\pi r dr, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \frac{\partial g_n^2(z)}{\partial z} \int_0^{R_T} G_n^2(r) G_n^2(r) 2\pi r dr \\ & - \gamma^2 \sum_{n=1}^N g_n^1(z) \int_0^{R_T} G_n^2(r) \frac{\partial G_n^1(r)}{\partial r} 2\pi r dr \\ & = -\gamma^2 \int_0^{R_T} \mu_0 \langle v_z \rangle \langle j_r \rangle G_n^2(r) 2\pi r dr. \end{aligned} \quad (20)$$

(19) 与 (20) 式经过复杂的贝塞尔函数积分运算, 整理可得:

$$\sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial z} g_n^1(z) - \chi_n \sum_{n=1}^N g_n^2(z) = Q_n(z), \quad (21)$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial z} g_n^2(z) - \gamma^2 \chi_n \sum_{n=1}^N g_n^1(z) = I_n(z), \quad (22)$$

其中:

$$\begin{aligned} Q_n(z) &= \int_0^{R_T} \frac{\langle j_z \rangle}{\varepsilon_0 \langle v_z \rangle} b_n J_0(\chi_n r) 2\pi r dr \\ &= \frac{2\pi b_n}{\varepsilon_0} \int_0^{R_T} \langle \rho_z(r, z) \rangle J_0(\chi_n r) r dr, \end{aligned} \quad (23)$$

$$I_n(z) = 2\pi b_n \mu_0 \gamma^2 \int_0^{R_T} \langle v_z \rangle \langle j_r \rangle J_1(\chi_n r) r dr. \quad (24)$$

为求解方程 (21) 与 (22), 需要在将方程在区域网格上离散. 区域进行如图 1 所示的网格剖分.

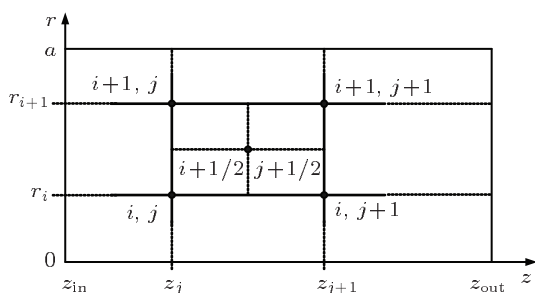


图1 网格剖分示意图

网格对应位置关系如下

$$0 = r_1 < \cdots < r_i < \cdots < r_{N_r} = R_T, \quad (25)$$

$$z_{in} = z_1 < \cdots < z_j < \cdots < z_{N_z} = z_{out}, \quad (26)$$

其中 N_r 与 N_z 分别为径向与轴向划分的网格数目.

将 $Q_n(z)$ 与 $I_n(z)$ 在径向网格上离散, 并考虑场量的归一化系数, 得到:

$$Q_n(z) = 4\pi^2 \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2 \frac{1 + \gamma_0}{\gamma_0^2} \times \sum_{i=1}^{N_r} \rho(r_{i+1/2}, z) C_n(r_i), \quad (27)$$

$$I_n(z) = -4\pi^2 \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2 \frac{1 + \gamma_0}{\gamma_0^2} \beta \beta_0 \gamma^2 \times \sum_{i=1}^{N_r} J_r(r_{i+1/2}, z) C'_n(r_i), \quad (28)$$

其中 ω_p 为等离子体频率, γ_0 为对应于直流速度的相对论因子. (27) 和 (28) 式中,

$$C_{ni} = \frac{1}{r_T} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_{i+1}} G_n^1(r) r dr = \frac{2\sqrt{\pi}(-1)^{n+1}}{\mu_{0n} J_1(\mu_{0n})} \left[J_1 \left(\mu_{0n} \frac{r_{i+1}}{r_T} \right) \frac{r_{i+1}}{r_T} - J_1 \left(\mu_{0n} \frac{r_i}{r_T} \right) \frac{r_i}{r_T} \right], \quad (29)$$

$$C'_{ni} = \frac{1}{r_T} \int_0^{2\pi} \int_{r_{i-1}}^{r_i} G_n^2(r) r dr d\varphi = \frac{2(-1)^n \sqrt{\pi}}{r_T^2 J_1(\mu_{0n})} \int_{r_{i-1}}^{r_i} J_1 \left(\frac{\mu_{0n}}{r_T} r \right) r dr. \quad (30)$$

(21) 和 (22) 式可以写成如下矩阵方程形式:

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial z} - \hat{A} \bar{g} = \bar{B}, \quad (31)$$

其中 $\bar{g} = [g_1^1, \cdots, g_N^1, g_1^2, \cdots, g_N^2]^T$, $\bar{B} = [Q_1, \cdots, Q_N, I_1, \cdots, I_N]^T$ 均为长度为 $2N$ 的列向量. \hat{A} 为 $2N \times 2N$ 的系数矩阵:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{A}^{(12)} \\ \hat{A}^{(21)} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

上式中 $\hat{A}^{(12)}$ 与 $\hat{A}^{(21)}$ 均为 $N \times N$ 的对角阵:

$$\hat{A}_{kn}^{(12)} = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \frac{\mu_{0n}}{r_T} = \chi_n, & n = k \end{cases}, \quad (33)$$

$$\hat{A}_{kn}^{(21)} = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \gamma^2 \frac{\mu_{0n}}{r_T} = \gamma^2 \chi_n, & n = k \end{cases}. \quad (34)$$

(31) 式为关于 \bar{g} 的一阶线性微分方程组. 向量 \bar{B} 为非齐次项, 其元素由网格上的电荷密度以及电流密度通过 (27) 与 (28) 式决定, 它们属于空间电荷场的激励源. (31) 式在轴向网格上离散为差分方程, 就变成非齐次线性方程组. 利用区域边界初值, 可以利用数值方法求解方程组得到 g_n^1 与 g_n^2 , 然后利用 (15) 式得到 g_n^3 , 最终由 (13) 式得到电荷场分量在空间网格点上的数值, 非网格点坐标上场值可以由网格插值得到. 在本模型算法中, \bar{B} 的计算过程, 需要由宏粒子的位置和速度计算网格点上分配的电荷密度和电流密度. 关于网格上电荷与电流的分配, 它们在 PIC 方法中都有成熟可靠的算法 [3], 本文由于侧重于空间电荷场的计算, 对它们不做详细讨论.

由上面分析可以看出, 本文模型同空间电荷波理论一样, 都是将电子注的空间电荷波分解成一系列模式的叠加. 但空间电荷波理论是小信号理论, 不能分析非线性相互作用状态下空间电荷场. 目前实用的 2.5 维 PIC 空间电荷场模型, 有 FCI 的时域算法 [11], 其利用有限差分法求解势函数的二阶偏微分波动方程, 需要在 z, r 方向以及时间层上离散数值求解. 而本模型只需在 z 向网格上离散求解一阶微分方程组, 数值算法更简单, 同时还保证了计算精度. 传统的空间电荷场计算模型还有格林函数法, 它利用静电格林函数直接求解单个粒子在空间产生的势函数, 从而得到每个粒子所受到的空间电荷力作用. 而本文模型则属于典型的 PIC 方法, 需要差分求解得到网格上的电荷场, 然后插值得到粒子位置的电荷场.

3 计算分析

将上面推导的空间电荷场计算模型, 应用到速调管 2.5 维注波相互作用计算程序 [13] 中, 该程序利用 PIC 方法并结合参量模型特点, 在频域稳态求解, 计算速度快. 以 S 波段速调管实例进行了计算分析, 表 1 列出了主要的仿真参数.

表 1 模型主要仿真参数

f/GHz	V_0/kV	I_0/A	R_T/mm	R_b/mm	D_z/mm	D_r/mm	N_{ez}	N_{er}	N
2.09	17.5	3.9	4.0	2.6	0.83	0.47	32	6	5

注: 表 1 中 f 为工作频率, V_0 与 I_0 分别为电子注的工作电压与电流; R_T 与 R_b 分别为漂移管半径与电子注半径; D_z 与 D_r 为轴向与径向网格步长; N_{ez} 为电子注在一个高频周期内分的轴向粒子数; N_{er} 为电子注在径向划分的粒子数; N 为伽辽金级数的阶数.

由上面理论分析看出, 利用本文模型计算空间电荷场, 关键是伽辽金系数 g_n 的求解. 图 2 给出

了某计算区域的各个模式系数 g_n 随 z 变化的曲线.

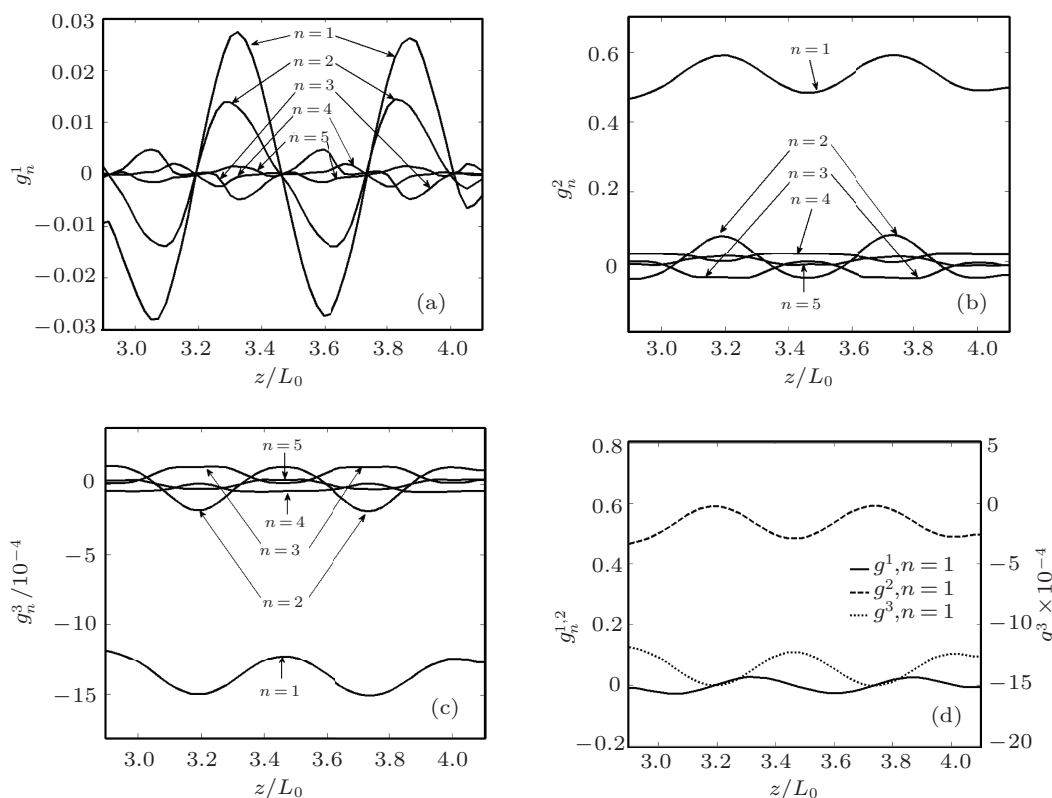


图 2 系数 g_n^{1-3} 随 z 变化曲线 (a) g_n^1 ; (b) g_n^2 ; (c) g_n^3 ; (d) g_n^1, g_n^2, g_n^3 结果比较

由图中可以看出, g_n 沿轴向有周期性波动. 随着模式 n 的变大, g_n 减小, 说明高阶模式影响很小, 尤其是 g_n^2 (如图 2(b)), 基模 g_1^2 远大于其他各项 g_n^2 , 这说明横向电场 E_r 中主要是基模 TM_{01} 其作用, 其余各高阶模式作用很小. 从图 2(d) 中的各基模 ($n = 1$) 系数比较可以看出, E_r 要大于 E_z 以及 H_φ 分量, 尤其是基模分量. 这类同于圆波导内 TM_{0n} 模式场分布特点. 比较图 2(b) 与 2(c) 发现, g_n^2 与 g_n^3 各模式符号相反, 幅度变化相同. 但 g_n^2 远大于 g_n^3 , 这从公式 (15) 也可以得到说明, g_n^2/g_n^3 相当于 TM_{0n} 模式的波阻抗, 其比值 $-\left[\beta\beta_0 \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_0}{\omega_c} \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_0}\right]^{-1}$ 很大, 本实例中典型值

为 394. 这实际上说明了电子注的空间电荷场中, 磁场分量远小于电场分量, 基本可以忽略. 这也是以往很多空间电荷力模型不考虑磁场分量的原因.

图 3 是互作用模拟得到的某一时刻粒子的轨迹以及各方向的归一化动量分布. 从图 3 中看出, 粒子在径向存在波动. 在开始位置, 粒子群聚较小, 在径向保持较好的层流性, 在后面随互作用强度变大, 粒子能量变化剧烈, 并且其在径向波动变大, 层流性变差. 由图 3(b) 看出, 轴向速度要远大于径向与角向速度, 这主要是因为外加聚焦磁场平衡了电荷场对粒子的径向作用力, 限制了粒子的径向运动, 并且聚焦磁场导致了粒子的角向运动.

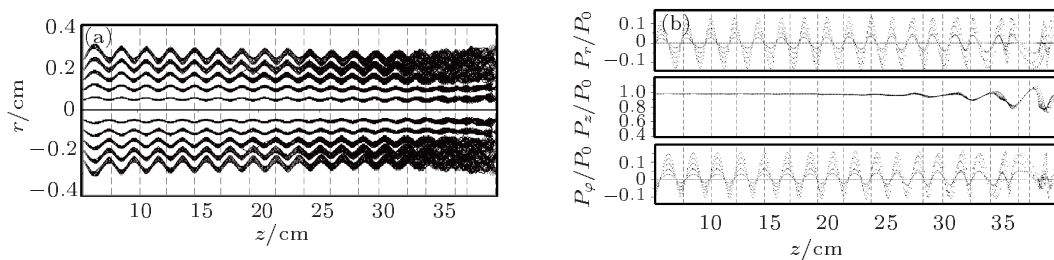


图3 粒子轨迹与动量 (a) 粒子轨迹; (b) 归一化粒子动量

图4给出了粒子运动的某一时刻, 空间电荷场各归一化场值分量变化曲线. 图4(a)—(c)为对应于不同径向位置的场值随 z 变化曲线, 图4(d)为在某一固定轴向位置上, 各分量场值随 r 的变化曲线. 由图4看出, 各个场分量随轴向距离周期性波动, 其波动周期即是等离子体波长, 这与空间电荷波理论一致. 如前对 g_n 分析所述, 电荷场中径向电场分量最大, 而磁场最小, 远小于电场分量. 轴向电场的存在造成了电子群聚中的去聚效应. 径向电场的存在导致电子的径向运动, 需要外加聚焦磁场来平衡

其径向电荷力. 由于群聚后的 E_r 波动性(如图4(b)所示), 会造成与聚焦磁场的不平衡性, 导致粒子径向速度的波动存在(如图3(b)中的 P_r), 从而导致电子轨迹的径向波动(如图3(a)所示). 从图4(d)看出, E_r 在轴线上为零, 沿半径方向增加, 在 R_b 处达到最大, 然后开始减小. H_ϕ 与 E_r 变化趋势一致, 但符号相反, 幅度相差很大. E_z 在轴线上最大, 然后沿半径方向逐渐减小, 在 R_b 处已经接近为零. 电荷场 E_z 分量主要集中在电子注内部, 在外部的漂移管中基本为零.

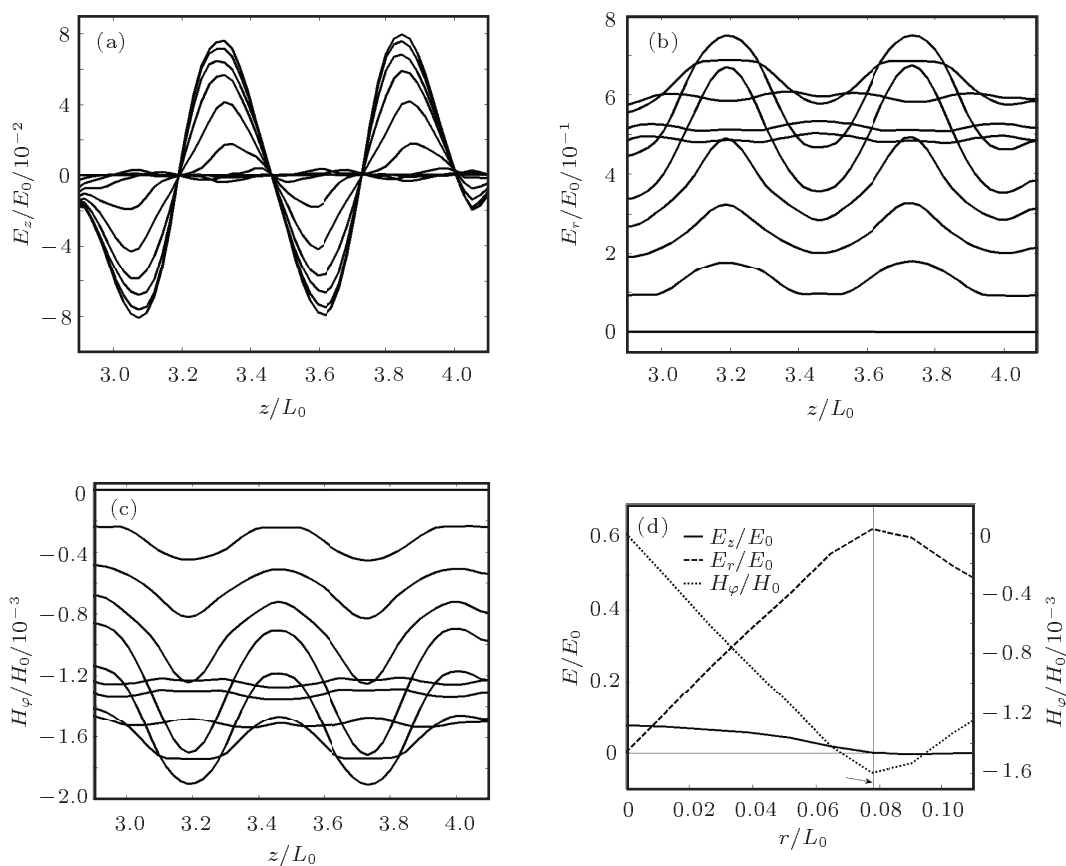


图4 电荷场各分量归一化场值曲线 (a) E_z/E_0 随 z 变化; (b) E_r/E_0 随 z 变化; (c) H_ϕ/H_0 随 z 变化; (d) $E/E_0, H_\phi/H_0$ 随 r 变化

由模型可得, 伽辽金级数的系数数组 g_n 的求解, 是利用欧拉法将 g_n 的微分离散为网格上的差分, 从而得到可以在网格上求解的线性

方程组. g_n 的求解精度主要由空间网格步长决定. 图 5 给出了不同网格步长时 g_n 的计算精度比较.

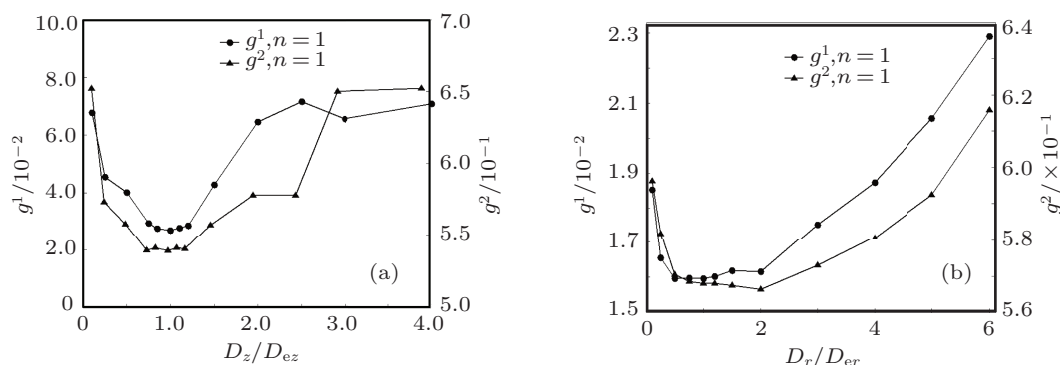


图 5 不同网格步长时 g_n 的计算结果 (a) 轴向网格; (b) 径向网格

空间网格与粒子网格密切相关, 因此图 5 中网格步长为对粒子网格步长的归一化形式. 轴向归一化步长为 D_z/D_{ez} , $D_{ez} = \lambda_e/N_{ez}$ 为粒子轴向网格大小, 其中 N_{ez} 为一个高频周期内划分粒子的数目, λ_e 为电子波长. 径向归一化网格步长为 D_r/D_{er} , $D_{er} = 2R_b/(2N_{er} - 1)$ 为电子径向网格步长, 其中 N_{er} 为径向划分粒子数. 从图 5 中各图可以看出, 当网格归一化步长为 1 左右时, 计算最稳定, 结果最精确; 当步长偏移很大时, 计算得到的 g_n 波动很大, 收敛性很差. 当归一化步长小于 1 时, 即空间网格小于电子网格, 这由于电子划分数目太少, 导致电子网格过大, 使得计算空间网格上分配的电荷密度与电流密度时偏小, 不够精确. 另一方面, 空间步长过小, 导致计算次数增多, 计算积累误差增大. 当归一化步长大于 1 时, 即空间网格大于电子网格, 这导致电子网格太小, 在空间网格上分配的电荷与电流密度值偏大, 同时空间网格步长太大, 差分离散时精度不够. 这两种情况都会导致 g_n 计算结果的误差与模型的不稳定. 当电子网格与空间网格大小基本一致时, 空间网格上电荷与电流分配最准确, 同时差分离散的精度和计算积累误差之间达到平衡最优, 最终能保证 g_n 的计算精度最高, 结果最稳定. 另外还可以看出, g_n 的计算结果对轴向步长 D_z 的变化要比对 D_r 变化敏感. 这是由于粒子的径向运动速度很小, 远小于轴向速度 (如图 3(b) 所示). 各种参量在径向变化相比轴向更加平缓, 对径向网格步长不很敏感, 如图 5 所示 D_r/D_{er} 在 1 左右的

较大范围内都能保持计算结果稳定. 因此可以在径向设置较大网格, 以节省计算时间, 同时又对计算精度影响不大.

在不同的相互作用区域, 粒子的速度等参量相差较大. 如图 3 所示, 在前面线性相互作用段, 粒子速度变化很小, 在这个区域可以使网格划分的大些, 以减少计算迭代次数, 同时也减少计算积累误差; 但在后面输出段, 相互作用为非线性, 粒子能量变化剧烈, 这需要更加精细的网格划分, 以满足计算精度. 本文的相互作用模型采用分区计算的方法, 在不同的相互作用计算区域使用不同的网格步长, 这样可以加快计算过程, 同时还能保证计算精度.

本文关注于空间电荷场的计算模型, 并不关注相互作用模拟中粒子的推动、网格上电荷的分配等部分. 但实际上, 这些部分对空间电荷场的计算仍有较大的影响. 如上面分析的空间网格步长, 就是由于粒子在空间网格上分配电荷与电流的算法影响到了电荷场的计算精度. 模拟中发现, 粒子推动的时间步长也影响空间电荷场的计算. 图 6 为不同的时间步长时, 得到的电荷场分量计算结果比较. 时间步长对粒子高频周期步长取归一化, 即 D_t/D_{et} , 其中 $D_{et} = T/N_{ez}$, $T = 1/f$ 为高频周期. 由图 6 可以看出, 当归一化时间步长在 0.5—1 范围内时, 空间电荷场计算结果稳定, 收敛性好; 当 D_t/D_{et} 太小时, 计算次数太多, 计算积累误差反而增大; 当 D_t/D_{et} 大于 1 时, 即一个高频周期内的时间步数小于粒子个数时, 计算结果迅速增加, 不

稳定, 计算结果已不准确. 因此在确定时间步长时, 应保证 $D_t/D_{et} \leq 1$, 即一个高频周期划分的时间步个数应不小于周期内粒子的个数, 否则会导致计算不准确, 模型不稳定. 在我们的程序中, 为兼顾精度与计算速度, 我们选取时间步 $D_t/D_{et} = 0.5$, 即跨越一个粒子网格需要两个时间步来完成.

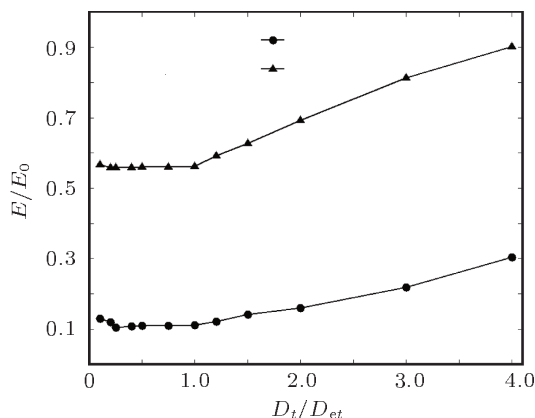


图6 不同时间步时电场计算结果

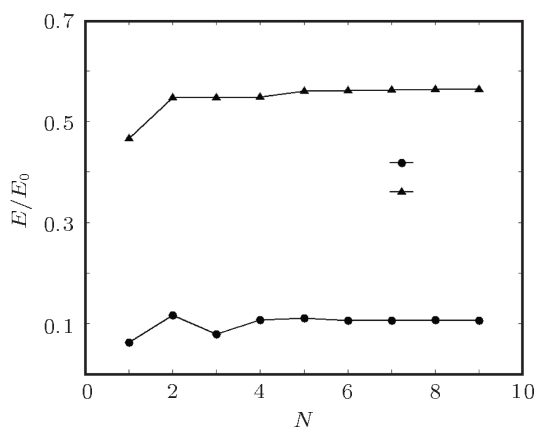


图7 不同阶数时电场计算结果

利用本模型计算电子注的空间电荷场, 在径向实际是各级数表示的 TM_{0n} 模式的叠加, 其轴向参量即为各模式的系数即为 g_n . 图7为选取不同的模式个数 N 时计算得到的电荷场变化趋势. 从图中可以看出, 当 $N \geq 4$ 时, 计算结果已经很稳定. 选取更大的 N 对计算精度并没有太大的意义. 如上所述, 各个场分量主要由前几个模式决定, 随着 n 的增大, g_n 迅速减小. E_r 的基模 (g_1^2) 远大于其他各模式, 占主要作用, 如图7所示, E_r 计算结果在 N 取2时便已基本稳定, 而 E_z 则需要在 N 取4时才基本稳定. 这是由于 g_n^1 的前几项相差不很大 (如图1(a)所示), 各个模式作用相当. 因此综合计算精度与计算速度, 伽辽金级数的项数 N 取5—10项即可, 选取 $N > 10$ 并没有实际意义.

4 结论

本文基于 PIC 基本方法, 利用伽辽金矩量法, 将空间电荷场的计算转化为伽辽金级数的系数组成的线性方程组求解, 避免了其他模型中的高阶差分算法, 提高了计算精度和计算速度. 通过计算分析得到, 空间电荷场中 E_r 分量最大, H_φ 分量很小, 其作用基本可以忽略. 为保证计算精度, 空间网格大小应与粒子网格大小一致, 即取归一化步长为1时计算最稳定, 精度最高. 时间步长的选取应保证高频周期内的时间步个数不小于周期内的轴向粒子个数. 场分量的模式展开中只有前几个模式占主要影响, 伽辽金级数的项数取5—10项, 已经足够准确. 本空间电荷场计算模型可以应用在注波相互作用的 PIC 粒子模拟算法中.

[1] Ding Y G 2008 *Theory and Computer Simulation of High Power Klystron* (Beijing: National Defense Industry Press) p70 (in Chinese) [丁耀根 2008 大功率速调管的理论与计算模拟 (北京: 国防工业出版社) 第70页]

[2] Hsu H L 2006 *Ph. D. Dissertation* (Davis: University of California Davis)

[3] Gao D P 2010 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: Institute of Electronics, Chinese Academy of Science) (in Chinese) [高东平 2010 博士学位论文 (北京: 中国科学院电子学研究所)]

[4] Zhao D, Ding Y G, Wang Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3324 (in Chinese) [赵鼎, 丁耀根, 王勇 2007 物理学报 **56** 3324]

[5] Yonezawa H, Okazaki Y, Corporation T 1984 *Slac-Tn-84-5*

[6] Xie J L, Zhao Y X 1966 *Bunching Theory of Klystrons* (Beijing: Science Press) p88 (in Chinese) [谢家麟, 赵永翔 1966 速调管群聚理论 (北京: 科学出版社) 第88页]

[7] Hu Y L, Yang Z H, Li J Q, Li B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6665 (in Chinese) [胡玉禄, 杨中海, 李建清, 李斌 2009 物理学报 **58** 6665]

[8] Gao D P, Du C H, Ding Y G 2010 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **38** 88

[9] Zhao D, Ding Y G, Sun P, Wang J H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2389 (in Chinese) [赵鼎, 丁耀根, 孙鹏, 王进华 2006 物理学报 **55** 2389]

[10] Gong H R, Gong Y B, Wei Y Y, Tang K J, Xue D H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5368 (in Chinese) [巩华荣, 宫玉彬, 魏彦玉, 唐昌建, 薛东海 2006 物理学报 **55** 5368]

[11] Shintake T 1989 *13th IEEE Particle Accelerator Conference* Chicago IL, USA, May 12–20 1989 p94

[12] Zhang J, Zhong H H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 206 (in Chinese)

- [张军, 钟辉煌 2005 物理学报 **54** 206]
- [13] Sandalov A N, Piknov V M, Rodyakin V E 2002 *The Vacuum Microwave Electronics: the Collection Review* Nizhny Novgorod, Rus. May 21–27 2002 p97
- [14] Chernyavskiy I A, Abe D K, Cooke S J, Levush B 2009 *IEEE Trans. Electron. Dev.* **56** 877
- [15] Botton M, Antonsen T M, Levush B 1998 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **26** 882
- [16] Goplen B, Ludeking L, Smithe D 1995 *Computer Phys. Communications* **87** 54
- [17] Ebeling F, Klatt R, Krawczyk F 1989 *IEEE Trans. Magnetics* **25** 2962

The calculation model of space-charge field based on the Galerkin series*

Huang Chuan-Lu¹⁾²⁾ Ding Yao-Gen^{1)†} Wang Yong¹⁾
Xie Xing-Juan¹⁾²⁾ Gao Dong-Ping¹⁾

1) (Key Laboratory of High Power Microwave Sources and Technologies, Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

2) (Graduate University of Chinese Academy of Science, Beijing 100049, China)

(Received 19 September 2011; revised manuscript received 26 December 2011)

Abstract

In this paper, we present a model of calculating the electron beam space-charge field using the partial Galerkin moments method. The space-charge field can be expanded as a series of different modes and thus using the Galerkin series. So, the space-charge field can be obtained finally through the solving the Galerkin coefficient equations set. A 2.5-dimensional computer program of the beam-wave interaction in a klystron is compiled based on this model. Using the results from the program, the characteristic of the beam space-charge field is analyzed and the effects of the parameter in the simulation on the calculation result of the space-charge field are studied. This model uses the particle in cell method and it can be used in the 2- or 3-dimensional calculation model of the beam-wave interaction in a klystron.

Keywords: klystron, space-charge field, Galerkin series, particle simulation

PACS: 84.40.Fe, 52.65.-y, 13.40.-f

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60971073).

† E-mail: dingyg@mail.ie.ac.cn