

基于交通流量的病毒扩散动力学研究*

仇慎伟¹⁾ 王开^{2)†} 刘茜²⁾ 裴文江²⁾ 胡恒凯¹⁾ 杨光¹⁾ 蔚承建¹⁾ 张毅锋²⁾

1) (南京工业大学电子与信息工程学院, 南京 210009)

2) (东南大学信息科学与工程学院, 南京 210096)

(2011年11月25日收到; 2011年12月29日收到修改稿)

不同于经典扩散模型中节点传染力等同于节点度 k 的假定, 基于交通流量的病毒扩散模型中, 各个节点的传染力可以等同于节点实际介数 b_k . 利用平均场近似方法, 提出基于交通流量 SIS 病毒修正扩散模型. 根据修正 SIS 模型, 以最小搜索信息路由为例, 重新研究病毒传播率 β , 平均发包率 λ 同传播阈值 β_c , 平稳状态病毒密度 ρ 之间的关系. 理论分析与实验结果均表明, 当网络拓扑和路由策略一定时, 传播阈值 β_c 为实际介数 b_k 的均值 $\langle b_k \rangle$ 与其平方的均值 $\langle b_k^2 \rangle$ 的比值. 而稳定状态时感染密度 ρ 同感染同病毒传播率 β , 平均发包率 λ 以及 $\lambda = 1$ 时节点实际介数的均值 $\langle b_{\lambda=1} \rangle$ 的乘积倒数存在幂率关系.

关键词: 复杂网络, 病毒扩散, SIS 模型, 实际介数

PACS: 02.50.Le, 05.65.+b, 05.70.Np

1 引言

作为复杂系统与复杂性科学研究的重要分支, 复杂网络研究目标在于揭示蕴涵于现实网络实体关系中的普遍规律并探索其在科学技术领域中的应用^[1]. 近年来, 复杂网络传播动力学行为研究越来越受到广泛关注. 人们力图借助复杂网络研究病毒传播机理, 给出控制病毒传播的有效措施. 利用平均场近似方法, 通过建立 SI 模型、SIS 模型以及 SIR 等各类经典病毒传播模型^[2-4], 人们详细分析了病毒在均匀网络或无标度网络下的传播动力学特性, 研究了在各类网络条件下, 病毒传播临界值, 病毒传播密度同病毒感染率以及网络拓扑特性之间的关系, 并发现较之均匀网络, 无标度网络低于病毒传播的脆弱性^[5,6]. 在此基础上, 包括随机免疫、目标免疫以及熟人免疫在内的各种针对各种传播特性的网络免疫策略也相继提出^[7].

通常, 复杂网络传播动力研究基于如下假设:

在每一个时间步, 感染节点等概率的将病毒影响于它所有邻居节点, 即每一个节点的传染力 (infectivity) 都等同于节点度 k ^[5,6]. 然而对于现实网络上上述假设并不总是成立, 例如, 在 Internet 网中, 若将各个路由器泛化为复杂网络中各个节点, 可以发现病毒通过路由器间的数据交换而传播. 当两路由器间没有数据交换, 那么即使二者之间存在直接相连的链路, 病毒也不会相互传播. 在上述病毒传播过程中, 网络节点的传染力与节点度 k 间并不存在直接关系, 而仅于节点间传输的数据有关. 2009 年, Meloni 等利用算法介数描述节点间的交通流量, 提出一种新的 SIS 模型, 并以此研究无标度网络上基于交通流量的病毒传播特性^[8]. 不同于经典扩散模型中节点传染力等同于节点度 k 的假定, 文献 [8] 认为节点的传染力由穿过各节点的具体交通流量决定. 而决定节点具体交通流量的因素由两部分构成: 其一是由表现为节点度分布的网络拓扑特性; 另一部分是由具体路由策略决定的动力学行为. 研究表明当网络拓扑以及路由策略一定时, 病毒传

* 国家自然科学基金 (批准号: 60972165, 61105048, 60901012), 教育部博士点基金 (批准号: 20100092120012, 20090092120012), 江苏省自然科学基金 (批准号: BK2011060, BK2010240) 和江苏省远程测控重点实验室开放基金 (YCCK201005) 资助的课题.

† E-mail: kaiwang@seu.edu.cn

播阈值反比于交通数据流量 [8]. 进一步, 文献 [8] 考虑了节点具有无限/有限处理情况下病毒传播的阈值, 并发现由于处理能力有限而造成的网络阻塞减缓了病毒的传播速率并限制了病毒的进一步传播.

通过研究节点间交通数据流量, 而非单纯的节点度对病毒扩散带来的影响, 文献 [8] 无疑为进一步研究具体交通流量下病毒扩散动力提供了很好的启发. 在此研究基础上, 文献 [9] 建立了基于交通流量的 SI 病毒传播模型, 并给出了研究无标度网络上考虑交通流量的病毒免疫策略. 然而需要指出的是, 文献 [8,9] 认为健康节点的传染概率正比与网络中数据包总数 λN (其中 λ 为每一时间步各节点生成数据包的平均速率, N 为网络节点总数) 以及具体节点的算法介数 b_{alg}^k , 并将算法介数 b_{alg}^k 等同于路由策略一定下, 穿过各节点传输数据包的总和 [5]. 但事实上研究表明, 当拓扑网络以及路由策略一定时, 各节点的实际介数 b_k 等比于平均发包率 λ , 即 $b_k^{\lambda=n} = n b_k^{\lambda=1}$, 而网络中数据包总数为 $\lambda N L$, 其中 L 为平均路径长度. 若按照文献 [8,9] 中同时使用 λ , N 以及 b_{alg}^k 来度量传染概率的话, 则会重复计算 λ 和 N 影响, 从而无法定量的计算病毒实际的扩散过程.

本文利用平均场近似方法, 建立修正后的 SIS 模型, 研究基于交通流量的病毒扩散动力学行为. 我们发现由于各个节点的介数随平均发包率 λ 增加而等比增大, 因此此种条件下各个节点的传染力可以等同于节点实际介数 b_k . 进而利用平均场近似方法, 我们提出基于交通流量 SIS 病毒扩散修正模型. 不同于文献 [8] 提出的 SIS 模型, 平均发包率 λ 和网络节点总数 N 不再直接作用于 SIS 模型的动力学方程, 而仅是通过各节点实际介数来发挥作用. 进一步, 利用 SIS 模型动力学方程, 我们以最小搜索信息路由为例, 重新研究病毒传播率 β , 平均发包率 λ 同传播阈值 β_c , 平稳状态病毒密度 ρ 之间的关系. 理论证明和实验仿真结果同时证明: 当网络拓扑和路由策略一定时, 传播阈值 β_c 为实际介数 b_k 的均值 $\langle b_k \rangle$ 与其平方的均值 $\langle b_k^2 \rangle$ 的比值. 而稳定状态时感染密度 ρ 同感染同病毒传播率 β , 平均发包率 λ 以及 $\lambda = 1$ 时节点实际介数的均值 $\langle b_{\lambda=1} \rangle$ 的乘积倒数存在幂率关系.

本文结构如下, 第二部分我们将回顾本文所需的一些必要知识, 主要包括文献 [4] 所提出的 SIS

模型以及最小搜索信息路由策略; 在第三部分, 我们将证明由于各个节点的介数随平均发包率 λ 增加而等比增大, 因此此种条件下各个节点的传染力可以等同于节点实际介数. 平均发包率 λ 和网络节点总数 N 不再直接作用于 SIS 模型的动力学方程, 而仅是通过各节点介数来发挥作用. 本文的第四部分我们以最小搜索信息路由为例, 重新研究病毒传播率 β , 平均发包率 λ 同传播阈值 β_c , 平稳状态病毒密度 ρ 之间的关系. 文章最后进行总结.

2 模型

2.1 基于交通流量的 SIS 模型 [8]

考虑易染状态 - 感染状态 - 易染状态 (SIS) 模型. 文献 [8] 依照是否染毒将网络节点分为两类: 健康节点 (处于易染状态) 和感染节点 (处于感染状态). 由感染节点发出的数据包为染毒数据包, 一旦健康节点收到染毒数据包, 则以 β 的概率染毒. 定义相对密度 $\rho_k(t)$ 为所有度为 k 节点的被感染密度. 那么利用平均场近似方法, 此时动力学方程为 [4]

$$\partial_t \rho_k(t) = -\mu \rho_k(t) + \beta \lambda b_{\text{alg}}^k N [1 - \rho_k(t)] \Theta(t), \quad (1)$$

其中, b_{alg}^k 为算法介数并用来定义交通流量, μ 表示为感染节点的恢复概率并一般定义为 $\mu = 1$, β , λ 和 N 分别表示病毒传播率, 平均发包率以及网络节点总数. $\Theta(t)$ 表示由感染节点发出的数据包在所有在网络中传输的数据包中所占的比例, 记为

$$\Theta(t) = \frac{\sum_k b_{\text{alg}}^k P(k) \rho_k(t)}{\sum_k b_{\text{alg}}^k P(k)}. \quad (2)$$

考虑稳定状态 $\partial_t \rho_k(t) = 0$, 则根据 (1) 式可得

$$\rho_k = \frac{\beta \lambda b_{\text{alg}}^k N \Theta(t)}{1 + \beta \lambda b_{\text{alg}}^k N \Theta(t)}. \quad (3)$$

假定此时网络为不同节点度不相关的无标度网络, 则可以解出 $\Theta(t)$ 为

$$\Theta = \frac{1}{\sum_k b_{\text{alg}}^k P(k)} \sum_k \frac{(b_{\text{alg}}^k)^2 P(k) \beta \lambda N \Theta}{1 + \beta \lambda b_{\text{alg}}^k N \Theta(t)}. \quad (4)$$

考虑 (4) 式存在平凡解 $\Theta = 0$. 若 (4) 式同时存在非平凡解 $\Theta \neq 0$, 则需要满足如下条件:

$$\frac{1}{\sum_k b_{\text{alg}}^k P(k)} \frac{d}{d\Theta} \left(\sum_k \frac{(b_{\text{alg}}^k)^2 P(k) \rho_k(t) \beta \lambda N \Theta}{1 + \beta \lambda b_{\text{alg}}^k N \Theta(t)} \right) \Big|_{\Theta=0} > 1, \quad (5)$$

即可得传播阈值

$$\beta_c = \frac{\langle b_{\text{alg}} \rangle}{\langle b_{\text{alg}}^2 \rangle} \frac{1}{\lambda N}. \quad (6)$$

根据 (6) 式可知, 当网络拓扑以及路由策略一定时, 病毒传播阈值反比于交通数据流量. 每一时间步中网络生成数据包总数 λN 越大, 则病毒传播阈值越小, 病毒越容易传播.

2.2 最小搜索信息路由策略

为了方便比较分析, 我们采用 BA 无标度网络模型作为研究网络模型, 研究表明 BA 网络中, 网络结构遵循着节点度呈幂率分布的无标度性, 即 $P(k) = k^{-\gamma}$, 其中 k 为节点度 [10].

最近, 我们在对随机行走过程的研究中发现单个粒子通过某条特定路径的时间正比于该路径上所有节点度的连乘积 [11,12]. 即给定网络中任意某条特定路径为 $C(l) = c_0 \cdots c_l$. 那么粒子发现路径 C 的平均首达时间为

$$\langle T \rangle = R'(1) = 2m \prod_{i=1}^{l-1} k_i + \Phi, \quad (7)$$

其中, k_i 为节点 i 的度, m 为网络的边数, 参数 Φ 只与网络的拓扑结构有关.

在此基础上, 我们提出最小搜索信息路由策略 (MIP routing) [11,12]: 令 $i \equiv v_0, v_1, \cdots, v_{n-2}, v_{n-1} \equiv j$ 为节点 i 到节点 j 的任意路径, 优化路径 P_{mip} 可以通过下式求得:

$$p_{\text{mip}}(l:i \rightarrow j) = \min \prod_{m=i}^j k_m. \quad (8)$$

用 $\ln(k_m)$ 代替 k_m , 变换 (8) 式可得 $p(i \rightarrow j) = \min \sum_{n=0}^l \ln(k_n)$.

当网络拓扑以及路由策略一定时, 定义任一时间步中, 穿过节点传输数据包的总和为此时此节点的介数 $b(i)$, $i = 1, 2, \cdots, N$ 为节点的标号. 同类似, 记实际介数 b_k 为所有度为 k 节点实际介数的平均值. 如文献 [11,12] 所述, 研究表明, MIP 路由策略下 b_k-k , 即实际介数 b_k 同度 k 呈线性关系. 其中, 图 1 给了不同发包率 λ 情况下, 实际介数 b_k 同度 k 间的线性关系.

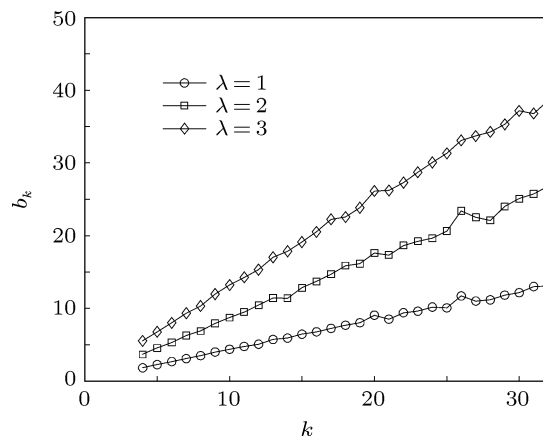


图 1 基于 MIP 路由机理, 不同发包率 λ 情况下, 实际介数 b_k 同度 k 间的线性关系

3 基于交通流量的 SIS 修正模型

令路由策略的平均路径为 L , 当网络各节点稳定发包时, 网络中传输的数据包总数为 λNL , 即 $\sum_k b_k N_k = \lambda NL$, 其中 N_k 为所有度为 k 节点的总数, 显然 $\sum_k N_k = N$. 当假定 $b_k^{\lambda=1}$ 和 $b_k^{\lambda=n}$ 分别为发包率分别为 1 和 n 时度为 k 节点的实际介数, 可得等式 $\sum_k b_k^{\lambda=1} N_k = NL$ 和 $\sum_k b_k^{\lambda=n} N_k = nNL$. 由于 N_k 一定, 可得 $b_k^{\lambda=n} = n b_k^{\lambda=1}$, 即节点的实际介数 b_k 正比于发包率 λ . 如表 1 给出不同发包率 λ 情况下, 度 $k = 4, 5, 6$ 节点的实际介数 b_k^λ 和实际介数的均值 $\langle b_\lambda \rangle$, 可以看出节点的实际介数确实随着发包率 λ 增加而等比增加.

表 1 不同发包率下不同度 k 节点的实际介数 b_k^λ 和实际介数的均值 $\langle b_\lambda \rangle$

	$b_k^{\lambda=1}$	$b_k^{\lambda=2}$	$b_k^{\lambda=3}$	$b_k^{\lambda=4}$
$k = 4$	2.41	4.86	7.36	9.61
$k = 5$	2.79	5.55	8.51	11.12
$k = 6$	3.15	6.33	9.56	12.46
$\langle b_\lambda \rangle$	3.570	7.145	10.81	13.45

由表 1 可以看出节点的实际介数和其均值随着发包率 λ 增加而等比增加, 其中 BA 网络节点总数 $N = 2000$, $m = 4$.

文献 [8,9] 中使用算法介数 b_{alg}^k 定义交通流量, 并认为算法介数 b_{alg}^k 等同于路由策略一定下, 穿过各节点传输数据包的总和, 即 $b_{\text{alg}}^k = b_k^{[9]}$. 由于

实际介数 b_k 正比于发包率 λ , 而 $\sum_k b_k N_k = \lambda N L$ 且 $b_k^{\lambda=n} = n b_k^{\lambda=1}$, 因此考虑 (1) 式可得

$$\partial_t \rho_k(t) = -\mu \rho_k(t) + \beta \lambda^2 b_k^{\lambda-1} N [1 - \rho_k(t)] \Theta(t). \quad (9)$$

根据 (9) 式可以看出 (1) 式重复计算 λ 和 N 影响, 从而无法定量的计算病毒实际的扩散过程.

由于各个节点的实际介数 b_k 随平均发包率 λ 增加而等比增大, 因此此种条件下各个节点的传染力可以等同于节点实际介数 b_k . 据此我们提出基于交通流量的 SIS 修正模型, 其动力学方程为

$$\partial_t \rho_k(t) = -\rho_k(t) + \beta b_k [1 - \rho_k(t)] \Theta(t), \quad (10)$$

其中

$$\Theta(t) = \frac{\sum_k b_k P(k) \rho_k(t)}{\sum_k b_k P(k)}. \quad (11)$$

比较 (1) 式可知, 在修正模型中, 平均发包率 λ 和网络节点总数 N 不再直接作用于 SIS 模型的动力学方程, 而仅是通过各节点实际介数 b_k 来发挥作用. 当考虑稳定状态 $\partial_t \rho_k(t) = 0$, 通过观察可知此时度 k 节点的感染密度 ρ_k , 进而根据 (11) 式, 可以计算出此时概率 Θ . 根据 (12) 式, 可以进一步算出

$$b'_k = \frac{\rho_k}{\beta [1 - \rho_k(t)] \Theta(t)}. \quad (12)$$

表 2 分别统计了 $\lambda = 1$ 情况, 不同度 $k = 4, 5, 6$ 节点在不同病毒传播率 β 下计算所得 b'_k 与实际观测所得实际介数 b_k 之间的比较, 可以看出 b'_k 和 b_k 比值接近于 1, 即我们确实可以使用实际介数 b_k 来定义各个节点的传染力, 并使用 (10) 式所列动力学方程来进一步研究病毒的扩散行为.

表 2 发包率 $\lambda = 1$ 情况, 不同度 k 节点计算所得 b'_k 与实际观测所得实际介数 b_k 结果, 可以看出 b'_k 和 b_k 比值接近于 1

	$\beta = 0.17$	$\beta = 0.19$	$\beta = 0.21$	$\beta = 0.23$	$\beta = 0.25$	实际介数 b_k
$k = 4$	2.37	2.44	2.43	2.40	2.42	2.42
$k = 5$	2.69	2.85	2.86	2.80	2.70	2.70
$k = 6$	3.20	3.14	3.15	3.20	3.17	3.17

4 基于交通流量的病毒扩散动力学特征分析

4.1 传播阈值

根据 (10) 式所示动力学方程, 依照 (3) 式至 (6) 式所示推导过程, 可知病毒传播阈值

$$\beta_c = \frac{\langle b \rangle}{\langle b^2 \rangle}, \quad (13)$$

其中, $\langle b \rangle$ 和 $\langle b^2 \rangle$ 分别表示实际介数的均值和实际介数平方的均值. 由于实际介数 b_k 随平均发包率 λ 增加而等比增大, 当节点平均发包率 λ 一定时, 此时节点实际介数 $b_k^\lambda = \lambda b_k^1$, 其中 b_k^1 表示 $\lambda = 1$ 时的实际介数. 那么可得 $\langle b \rangle = \lambda \langle b_{\lambda=1} \rangle$, $\langle b^2 \rangle = \lambda^2 \langle b_{\lambda=1}^2 \rangle$. 则 (13) 式可以改写为

$$\beta_c = \frac{1}{\lambda} \frac{\langle b_{\lambda=1} \rangle}{\langle b_{\lambda=1}^2 \rangle}. \quad (14)$$

当网络拓扑和路由策略一定时, $\langle b_{\lambda=1} \rangle / \langle b_{\lambda=1}^2 \rangle$ 可以记为常数 $\beta_c^{\lambda=1}$, 其中 $\beta_c^{\lambda=1}$ 为 $\lambda = 1$ 时的传播

阈值, 如 (14) 式所示可以看出, 传播阈值反比于平均发包率 λ , 是 $\lambda = 1$ 时的传播阈值 $\beta_c^{\lambda=1}$ 的 $1/\lambda$.

考虑 $N = 2000$ BA 网络, 每一时刻各节点以 λ 速率平均发包, 数据包的目的地址和初始地址随机选择. 当平均发包率 λ 为 1 时, 统计求得 $\beta_c^{\lambda=1} \approx 0.154$, $\langle b_{\lambda=1} \rangle / \langle b_{\lambda=1}^2 \rangle \approx 0.101$. 平均发包率 λ 与传播阈值 β_c 和 $\langle b \rangle / \langle b^2 \rangle$ 的对应关系如表 3 所示. 可以看出 $\beta_c \approx \langle b \rangle / \langle b^2 \rangle$, 且传播阈值 β_c 反比于平均发包率 λ , 且是 $\lambda = 1$ 时的传播阈值 $1/\lambda$. 不同发包率 λ 和传播阈值 β_c 之间的关系如图 2 所示, 可以看出 β_c 与 λ 的乘积为一常数, 计算可知为 $\langle b_{\lambda=1} \rangle / \langle b_{\lambda=1}^2 \rangle$.

表 3 不同平均发包率 λ 下的传播阈值 β_c 和 $\langle b \rangle / \langle b^2 \rangle$

	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$
β_c	0.154	0.076	0.051	0.038	0.031
$\langle b \rangle / \langle b^2 \rangle$	0.101	0.056	0.045	0.030	0.028

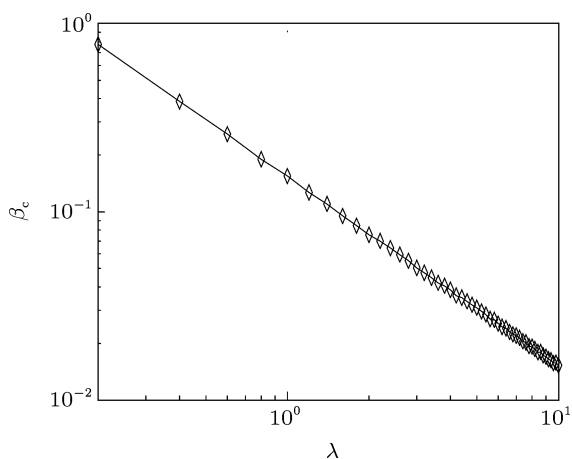


图2 不同发包率 λ 和传播阈值 β_c 之间的关系, 可以看出 β_c 与 λ 的乘积为一常数, 计算可知为 $\langle b_{\lambda=1} \rangle / \langle b_{\lambda=1}^2 \rangle$

4.2 感染密度

进一步, 让我们考虑稳定状态 $\partial_t \rho_k(t) = 0$ 时, 感染密度 ρ 同病毒传播率 β , 平均发包率 λ 以及节点实际介数 b_k 的关系.

当 $\partial_t \rho_k(t) = 0$ 时, 根据 (10) 式可得

$$\rho_k = \frac{b_k \beta \Theta(t)}{1 + b_k \beta \Theta(t)}. \quad (15)$$

将 (15) 式代入 (11) 式可得

$$\Theta(t) = \frac{\sum_k b_k P(k) \frac{b_k \beta \Theta(t)}{1 + b_k \beta \Theta(t)}}{\sum_k b_k P(k)}. \quad (16)$$

我们使用 BA 网络作为试验网络, 则可知度 k 分布为 $P(k) = 2m^2 k^{-3}$. 在使用 MIP 路由情况下, 实际介数 b_k 同节点度 k 呈线性关系, 记为 $b_k = ck$, 其中参数 c 为拟合系数. 可知 $\langle b \rangle = \int_m^\infty ck 2m^2 k^{-3} dk = 2mc$. 改写 (16) 式可知

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{\sum_k c^2 k^2 2m^2 k^{-3} \frac{\beta \Theta}{1 + ck\beta\Theta}}{\sum_k ck 2m^2 k^{-3}} \\ &\approx \frac{\int_m^\infty c^2 k^2 2m^2 k^{-3} \frac{\beta \Theta}{1 + ck\beta\Theta} dk}{\int_m^\infty ck 2m^2 k^{-3} dk} \\ &= mc\beta\Theta \ln \left(1 + \frac{1}{mc\beta\Theta} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

求解得

$$\Theta = \frac{1}{mc\beta(e^{1/mc\beta} - 1)}. \quad (18)$$

对于传染密度 ρ , 可知 $\rho = \sum_k P(k) \rho_k$, 代入 (15) 式和 (18) 式可得

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_k P(k) \rho_k = \int_m^\infty 2m^2 k^{-3} \frac{\beta ck \Theta}{1 + \beta ck \Theta} dk \\ &= \frac{2}{e^{1/mc\beta} - 1} \left(1 - \frac{1}{mc\beta(e^{1/mc\beta} - 1)} \right) \\ &\approx 2e^{-1/mc\beta} = 2e^{-2/\beta\langle b \rangle}. \end{aligned} \quad (19)$$

如上节所说, 节点实际介数 b_k 随平均发包率 λ 等比增长, 则存在 $\langle b_{\lambda=n} \rangle = n \langle b_{\lambda=1} \rangle$, 即平均发包率 $\lambda = n$ 时实际介数的均值 $\langle b_{\lambda=n} \rangle$ 为平均发包率 $\lambda = 1$ 时实际介数的均值 $\langle b_{\lambda=1} \rangle$ 的 n 倍. 代入 (19) 式可得

$$\rho = 2e^{-2/\beta\lambda\langle b_{\lambda=1} \rangle}, \quad (20)$$

即稳定状态时感染密度 ρ 同感染同病毒传播率 β , 平均发包率 λ 以及 $\lambda = 1$ 时节点实际介数的均值 $\langle b_{\lambda=1} \rangle$ 的乘积倒数存在幂率关系.

选择 $N = 1000$ BA 网络, 在 MIP 路由机理下, 根据不同的平均发包率 λ , 病毒传播率 β 同感染密度 ρ 之间的关系如图 3 所示. 可以看出感染密度 ρ 同病毒传播率 β 呈幂率关系.

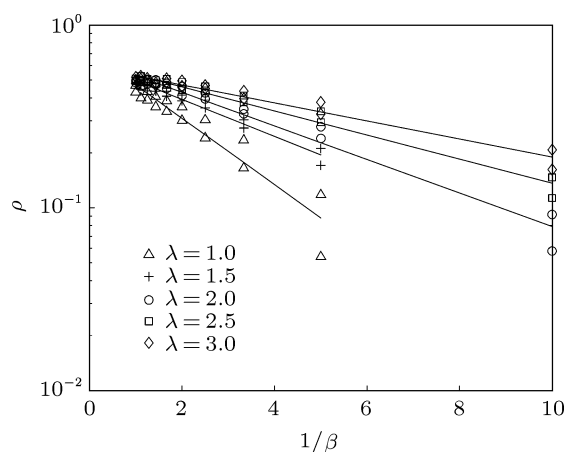


图3 在 MIP 路由机理下, 不同平均发包率 λ 下, 病毒传播率 β 同感染密度之间的关系

根据 (20) 式可知, $\ln \rho$ 同 $1/\beta$ 呈线性关系, 其斜率 α 为 $2/\langle b_{\lambda=1} \rangle$. 我们重复试验 50 次, 则不同平均发包率 λ 下, 平均实际介数的均值 $\langle b_\lambda \rangle$, 以及线性方程 $\ln \rho - 1/\beta$ 的平均拟合系数 $\bar{\alpha}$ 如表 4 所示. 从表 4 可以看出, 随着平均发包率 λ 的增大, $\langle b_\lambda \rangle$ 以及平均拟合系数 $\bar{\alpha}$ 皆随着 λ 等比增加或降低, 且 $2/\langle b_\lambda \rangle \approx \bar{\alpha}$. 因此试验结果表明, 稳定状态时感染密度 ρ 同感染同病毒传播率 β , 平均发包率 λ 以及 $\lambda = 1$ 时

节点实际介数的均值 $\langle b_{\lambda=1} \rangle$ 的乘积倒数存在幂率关系.

表 4 不同 λ 下平均实际介数的均值 $\langle b_{\lambda} \rangle$, 以及线性方程 $\ln \rho - 1/\beta$ 的平均拟合系数 $\bar{\alpha}$

	$\langle b_{\lambda} \rangle$	$2/\langle b_{\lambda} \rangle$	$\bar{\alpha}$
$\lambda = 1$	2.709	0.5117	0.499
$\lambda = 1.5$	4.033	0.3437	0.2823
$\lambda = 2$	5.364	0.2584	0.2191
$\lambda = 2.5$	6.718	0.2064	0.1735
$\lambda = 3$	8.028	0.1727	0.1561

5 结论

通常, 复杂网络传播动力研究基于如下假设: 在每一个时间步, 感染节点等概率的将病毒影响于它所有邻居节点, 即每一个节点的传染力 (infectivity) 都等同于节点度 k . 然而, 对于现实网络上上述假设并不总是成立. 2009 年, Meloni 等利用算法介数描述节点间的交通流量, 提出一种新的 SIS 模型, 并以此研究该模型在无标度网络上传播特性 [4]. 不同于之前扩散模型中节点传染力等同于节点度 k

的假定, 文献 [8] 认为节点的传染力由穿过各节点的具体交通流量决定. 通过研究节点间交通数据流量, 而非单纯的节点度对病毒扩散带来的影响, 文献 [8] 无疑为进一步研究具体交通流量下病毒扩散动力提供了很好的启发.

然而, 由于实际介数 b_k 正比于发包率 λ , 因此文献 [8,9] 所给出的 SIS 模型重复计算了平均发包率 λ 和网络节点总数 N 的影响. 从而无法定量的计算病毒实际的扩散过程. 我们发现由于各个节点的介数随平均发包率 λ 增加而等比增大, 因此此种条件下各个节点的传染力可以等同于节点实际介数 b_k . 进而利用平均场近似方法, 我们提出基于交通流量 SIS 病毒修正扩散模型. 不同于文献 [8] 提出的 SIS 模型, 平均发包率 λ 和网络节点总数 N 不再直接作用于 SIS 模型的动力学方程, 而仅是通过各节点实际介数 b_k 来发挥作用.

根据修正 SIS 模型, 我们以最小搜索信息路由为例, 重新研究病毒传播率 β , 平均发包率 λ 同传播阈值 β_c , 平稳状态病毒密度 ρ 之间的关系. 理论分析与实验结果均表明, 当网络拓扑和路由策略一定时, 传播阈值 β_c 为实际介数 b_k 的均值 $\langle b_k \rangle$ 与其平方的均值 $\langle b_k^2 \rangle$ 的比值: $\beta_c = \langle b_k \rangle / \langle b_k^2 \rangle$; 稳定状态时感染密度 ρ 同感染同病毒传播率 β , 平均发包率 λ 以及 $\lambda = 1$ 时节点实际介数的均值 $\langle b_{\lambda=1} \rangle$ 的乘积倒数存在幂率关系 $\rho = 2e^{-2/\beta\lambda\langle b_{\lambda=1} \rangle}$.

- | | |
|---|--|
| <p>[1] Watts D J, Strogatz S H 1998 <i>Nature</i> 393 440</p> <p>[2] Shi H J, Duan Z S, Chen G R, Li R 2009 <i>Chin. Phys. B</i> 18 309</p> <p>[3] May R M, Lloyd A L 2001 <i>Phys. Rev. E</i> 64 066112</p> <p>[4] Barthelemy M, Barrat A, Pastor-Satorras R, Vespignani A 2004 <i>Phys. Rev. Lett.</i> 92 178701</p> <p>[5] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2001 <i>Phys. Rev. Lett.</i> 86 3200</p> <p>[6] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2001 <i>Phys. Rev. E</i> 63 066117</p> <p>[7] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2002 <i>Phys. Rev. E</i> 65 036104</p> | <p>[8] Meloni S, Arenas A, Moreno Y 2009 <i>Proc. Natl. Acad. Sci. USA</i> 106 16897</p> <p>[9] Wang Y Q, Jiang G P 2011 <i>Acta Phys. Sin.</i> 60 060202 (in Chinese) [王亚奇, 蒋国平 2011 物理学报 60 060202]</p> <p>[10] Barabasi A L, Albert R 2000 <i>Physica A</i> 281 69</p> <p>[11] Wang K, Zhang Y F, Zhou S Y, Pei W J, Li T, Wang S P 2011 <i>Physica A</i> 390 2593</p> <p>[12] Zhou SY, Wang K, Pei W J 2011 <i>Chin. Phys. B</i> 20 080501</p> |
|---|--|

Epidemic spreading on scale-free networks with traffic flow*

Qiu Shen-Wei¹⁾ Wang Kai²⁾† Liu Qian²⁾ Pei Wen-Jiang²⁾ Hu Hen-Kai¹⁾
Yang Guang¹⁾ Wei Cheng-Jian¹⁾ Zhang Yi-Feng²⁾

1) (College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Technology, Nanjing 210009, China)

2) (Department of Radio Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

(Received 25 November 2011; revised manuscript received 29 December 2011)

Abstract

The infectivity of a node is determined by its actual betweenness b_k in the epidemic model based on traffic-flow other than degree k which is different from the classical epidemic models. Utilizing the mean-field theory, we propose a modified SIS epidemic model based on traffic-flow. With this model, taking MIP route as an example, we re-study the relationship among spreading probability β , traffic generation rate λ , epidemic threshold β_c , the stationary density of infected nodes ρ . Both theoretical analysis and experimental results show that β_c is the ratio of the mean of the actual betweenness $\langle b_k \rangle$ to its mean square $\langle b_k^2 \rangle$, when network topology and route strategy are given. Moreover, the stationary density of infected nodes ρ behaves as power-law exponent with the reciprocal of the product of the spreading probability β , the traffic generation rate λ and the mean of the actual betweenness $\langle b_{\lambda=1} \rangle$.

Keywords: complex networks, epidemic spreading, susceptible-infected-susceptible model, actual betweenness

PACS: 02.50.Le, 05.65.+b, 05.70.Np

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60972165, 61105048, 60901012), the Doctoral Fund of Ministry of Education of China under (Grant Nos. 20100092120012, 20090092120012), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province (Grant Nos. BK2011060, BK2010240), and the Open Fundation of Jiangsu Province Key Laboratory of Remote Measuring and Control (YCCK201005).

† E-mail: Kaiwang@seu.edu.cn