

## 具有不同时延的多智能体系统一致性分析\*

纪良浩<sup>1)2)†</sup> 廖晓峰<sup>1)</sup>

1) (输配电装备及系统安全与新技术国家重点实验室, 重庆大学计算机学院, 重庆 400044)

2) (重庆邮电大学计算机学院, 重庆 400065)

(2011年12月7日收到; 2012年3月16日收到修改稿)

针对有向加权且存在全局可达点的静态网络拓扑, 考虑了同时具有通信时延和输入时延的一阶、二阶智能体系统的运动一致性问题. 基于广义 Nyquist 准则与频域控制理论的方法, 分析并得到了网络中所有智能体渐进收敛到一致状态的充分条件. 通过该条件发现一致性的达到只与系统的耦合强度、智能体的输入时延以及各自的连接状态信息有关, 与通信时延无关. 但是, 通信时延的存在却要影响系统的动态特性. 仿真实验结果进一步验证了理论分析所得结论的正确性.

**关键词:** 多智能体, 时延, 一致性, 收敛

**PACS:** 02.30.Ks, 02.30.Yy, 05.65.+b

## 1 引言

近年来, 随着计算机技术、网络通信技术的发展, 多智能体系统在分布式传感器网络<sup>[1]</sup>、网络拥塞控制<sup>[2]</sup>、群集运动<sup>[3]</sup>等领域得到了广泛的应用. 故而对多智能体系统的协调控制引起了众多领域研究者的浓厚兴趣. 一致性问题作为多智能体系统协调控制中最基本问题之一, 更是受到了广泛的关注<sup>[4-9]</sup>.

多智能体系统的一致性是指在没有中央协调控制或者全局通信的情况下, 智能体之间通过局部的耦合作用, 最终使得所有智能体的状态 (如位置、速度、加速度等) 趋于一致. 一致性算法 (协议) 是智能体间相互作用的规则, 其体现了相邻智能体间彼此信息交换的过程<sup>[10]</sup>.

目前, 对一致性的研究已取得了一些丰硕的成果. Vicsek 等人<sup>[11]</sup> 提出了一个离散时间的多智能体模型, Jadbabaie 等人<sup>[12]</sup> 在线性化 Vicsek 模型的基础上, 从理论上研究并分析了多智能体

系统的方向一致性问题. Olfati 等人<sup>[13]</sup> 考虑了具有无向连通、连接权值对称以及强连通拓扑结构的多智能体系统一致性问题. Ren<sup>[14]</sup> 与 Moreau 等人<sup>[15]</sup> 在 Olfati 的研究基础上, 针对有向网络拓扑得到了与之类似的多智能体系统收敛条件. 俞辉等人<sup>[16]</sup> 考虑了具有相同时延的静态无向网络拓扑结构的多智能体系统加权平均一致性问题. 杨洪勇等人<sup>[17]</sup> 以及 Tian 等人<sup>[18]</sup> 分别研究了对称网络拓扑中具有不同时延的离散时间多智能体系统的一致性问题. Wang 等人<sup>[19]</sup> 研究了双向连通或者无向闭环拓扑中具有不同通信时延的多智能体系统一致性问题. Yang 等人<sup>[20]</sup> 研究了具有不同通信时延的二阶多自主个体系统在双一致算法作用下的收敛问题. Lin 等人<sup>[21]</sup> 对存在单个对称时延情况下二阶多智能体系统的平均一致性问题进行了讨论. 文献 [22—25] 也都对具有时延的二阶多智能体系统的收敛性进行了分析与研究. 现有的许多研究一般都是基于网络拓扑为无向连通或者强连通的情况, 该前提过于特殊, 不具有问题研究的一般性.

本文基于广义 Nyquist 准则与频域控制理论的

\* 国家自然科学基金 (批准号: 60973114, 61170249), 重庆市科委自然科学基金 (批准号: 2009BA2021, cstc2011jjA1320), 重庆大学输配电装备及系统安全与新技术国家重点实验室基金 (批准号: 2007DA10512711206) 资助的课题.

† E-mail: jilh77@yahoo.com.cn

方法, 针对有向加权且存在一个全局可达节点的静态网络拓扑, 考虑了同时具有通信时延和输入时延的一阶、二阶智能体系统的运动一致性问题, 分析并得到了智能体系统渐进收敛到一致状态的充分条件. 该条件只与系统的耦合强度、每个智能体的输入时延以及各自的连接状态信息有关, 而与通信时延无关. 文中所得到的一阶系统的收敛条件, 与文献 [18,26] 相比, 具有相对较低的保守性; 二阶系统的收敛条件相比于文献 [13] 更具有一般性. 仿真实验的结果不仅验证了理论分析的正确性. 同时, 通过仿真实验的结果, 可以看出尽管通信时延不影响系统的收敛特性, 但会影响系统的收敛速度, 即系统的动态特性.

## 2 预备知识

令  $G = \{V, E, A\}$  表示一个有向加权图, 其中  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  表示图  $G$  的  $n$  个顶点集合,  $E \subseteq V \times V$  表示图  $G$  的边集合, 节点的下标集合  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , 图  $G$  的邻接矩阵  $A = \{a_{ij}\} \in R^{n \times n}$ , 其中矩阵元素  $a_{ij}$  为节点  $v_i$  与节点  $v_j$  的连接权重, 当  $v_i$  可以得到  $v_j$  的信息时  $a_{ij} > 0$ , 否则  $a_{ij} = 0$ . 定义节点  $v_i$  的邻居集合为  $N_i = \{v_j \in V : (v_i, v_j) \in E\}$ .

假设网络拓扑图中每个节点没有自连, 即对于  $\forall i \in N$ , 有  $a_{ii} = 0$ . 定义矩阵  $D = \text{diag}\{d_i, i \in N\}$ ,  $d_i = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}$  称为节点  $v_i$  的出度, 则矩阵  $L = D - A$  为图  $G$  的 Laplacian 矩阵.

如果在图  $G$  中, 从节点  $v_i$  到  $v_j$  有一条有向路径, 那么  $v_j$  称为从节点  $v_i$  可达, 否则为不可达. 如果一个节点从有向图中任意其他节点都可达, 则称其为全局可达节点. 对于有向图, 如果其任意两个节点之间都存在至少一条有向连接路径, 则称图  $G$  为强连通图. 显然, 与强连通图相比, 图中存在一个全局可达节点是有向图连通的最低要求.

**引理1**<sup>[14]</sup> Laplacian 矩阵  $L$  存在单一特征值 0 的充要条件是图  $G = \{V, E, A\}$  存在一个全局可达节点.

**引理2**<sup>[27]</sup> 对于任意  $\gamma \in [0, 1)$ , 当  $w \in R$  时, 凸包  $\gamma Co(0 \cup \{E_i(jw), i \in N\})$  不包含  $(-1, j0)$  点.

其中

$$E_i(jw) = \frac{\pi}{2T} \times \frac{e^{-jwT}}{jw}.$$

**引理3**<sup>[28]</sup> 对于  $w \in R$ , 凸包  $Co(0 \cup \{W_i(jw), i \in N\})$  包含圆盘的集合  $\bigcup_{i \in I} G_i$ .

## 3 具有不同时延的一阶多智能体系统一致性分析

对于拥有  $n$  个智能体的多智能体系统, 其拓扑结构可用加权图  $G = \{V, E, A\}$  描述, 其中每个智能体可看作图  $G$  的一个节点, 智能体间的信息流可视为图中的一条有向路径 (有向边).

假设多智能体系统满足如下动态方程:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad (1)$$

其中  $x_i \in R^m$  和  $u_i \in R^m$  分别表示第  $i$  个智能体的状态和控制输入. 为了论述的方便, 不失一般性, 文中假设  $m = 1$ .

**定义1** 对于一阶多智能体系统 (1), 当且仅当对于  $\forall i, j = 1, 2, \dots, N$ , 节点  $v_i$  与节点  $v_j$  的相对位置逐步趋于 0, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0$  时, 称系统 (1) 能渐进达到一致.

Olfati 等人<sup>[13]</sup> 提出了如下一致性算法:

$$u_i(t) = \sum_{V_j \in N_i} a_{ij}(x_j(t) - x_i(t)), \quad (2)$$

分析并得到了当网络拓扑结构为强连通平衡图时, 多智能体系统取得平均渐进一致的条件.

在网络实际通信的过程中, 由于通信链路、设备等各方面的原因, 一般会存在通信时延与输入时延. 前者是指数据在链路上传输时所产生的时延, 而输入时延一般指节点自身对数据的处理所产生的时延<sup>[18]</sup>. 现实中, 由于各方面的原因不可避免的会导致时延的发生, 因此, 对具有时延的多智能体系统一致性算法的设计与分析更具有现实意义.

所以, 文献 [13] 同时还分析了如下协议:

$$u_i(t) = \sum_{V_j \in N_i} a_{ij}(x_j(t - T_{ij}) - x_i(t - T_{ij})), \quad (3)$$

其中,  $T_{ij}$  表示数据从节点  $v_j$  到节点  $v_i$  的通信时延. 文献中得到当通信时延相同, 网络拓扑为无向连通且权值对称时多智能体系统收敛的一致性条件.

Wang 等人<sup>[19]</sup>提出了一种不具有自身输入时延的一致性协议:

$$u_i(t) = \sum_{V_j \in N_i} a_{ij}(x_j(t - T_{ij}) - x_i(t)), \quad (4)$$

并分析了具有相同权值的无向图以及权值对称连通图的多智能体系统收敛的条件.

不同于文献 [13,19], 本节讨论同时具有不同通信时延和相同输入时延且网络拓扑结构为存在一个全局可达节点的静态有向加权图的一阶多智能体系统的一致性问题的, 其一致性算法如下:

$$u_i(t) = \sum_{V_j \in N_i} a_{ij}(x_j(t - T_{ij}) - x_i(t - T)). \quad (5)$$

这样, 多智能体系统 (1) 在 (5) 的作用下, 其一致性算法为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \sum_{V_j \in N_i} a_{ij}(x_j(t - T_{ij}) - x_i(t - T)), \\ i &\in N, \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $T_{ij}(T_{ij} \geq 0)$ ,  $T(T \geq 0)$  分别为通信时延与输入时延.

**定理1** 对于包含  $n$  个智能体的多智能体系统, 其网络连接拓扑为静态有向加权图, 且含有一个全局可达节点. 如果对于  $\forall i \in N$ , 有  $d_i T < \frac{\pi}{4}$ , 其中  $d_i = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}$ , 则系统 (6) 渐进达到一致.

**证明** 分析系统 (6) 的稳定性, 利用 Laplace 变换, 得到系统的特征方程为  $\det(sI + L(s)) = 0$ .

其中,  $I$  为  $n$  阶单位阵,

$$L(s) = (l_{ij}(s)) = \begin{cases} -a_{ij} e^{-sT_{ij}}, & v_j \in N_i, \\ \sum_{V_j \in N_i} a_{ij} e^{-sT}, & j = i, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

当  $s = 0$  时,  $L(0) = L$ , 即 Laplacian 矩阵. 令

$$F(s) = \det(sI + L(s)). \quad (7)$$

接下来分析  $F(s)$  的零点具有负实部或者  $s = 0$ .

1) 当  $s = 0$  时,  $F(0) = \det(0I + L(0)) = \det(L)$ , 由于系统网络拓扑图中含有一个全局可达节点, 根据引理 1 知 0 是  $L$  的单一特征值. 因此, 当  $s = 0$  时,  $F(s)$  只有一个零点.

2) 当  $s \neq 0$  时, 令

$$P(s) = \det(I + G(s)), \quad (8)$$

其中

$$G(s) = \frac{L(s)}{s}. \quad (9)$$

易知, 如果 (7) 式的零点都具有负实部, 等价于 (8) 式的零点都具有负实部. 如果 (8) 式的零点都具有负实部, 则 (6) 式的状态渐进达到一致.

令  $s = jw$ , 对于 (9) 式, 根据广义 Nyquist 准则, 如果  $\forall w \in R$ ,  $G(jw)$  的特征值  $\lambda(G(jw))$  的 Nyquist 曲线不包围复平面的  $(-1, j0)$  点, 则 (8) 式所有的零点都具有负实部.

根据 Gerschgorin 圆盘定理, 矩阵  $G(jw)$  的特征值  $\lambda(G(jw))$  满足:

$$\lambda(G(jw)) \in \bigcup_{i \in I} G_i, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} G_i &= \left\{ \zeta: \zeta \in C, \left| \zeta - \sum_{v_j \in N_i} a_{ij} \frac{e^{-jwT}}{jw} \right| \right. \\ &\leq \left. \left| \sum_{v_j \in N_i} a_{ij} \frac{e^{-jwT}}{jw} \right| \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $C$  为复数域. 令  $d_i = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}$ , 则圆盘的中心为

$$G_{i0}(jw) = d_i \frac{e^{-jwT}}{jw}. \quad (12)$$

当圆盘中心  $G_{i0}(jw)$  的 Nyquist 曲线随着  $w \in R$  变换时, 圆盘  $G_i$  也随之变化. 假设复平面的原点为  $O$ , 则  $O$  与  $G_{i0}$  连线的延长线交与圆盘的边界圆周于  $W_i$  点, 易知随着  $G_i$  的变化, 端点  $W_i$  的轨迹为

$$W_i(jw) = 2d_i \frac{e^{-jwT}}{jw}. \quad (13)$$

根据引理 2, 令  $W_i(jw) = \gamma_i E_i(jw)$ . 当  $\gamma_i < 1$  时, 容易得到  $d_i T < \frac{\pi}{4}$ .

令  $\gamma = \max\{\gamma_i, i \in N\}$ , 显然当  $\gamma < 1$ , 对于任意的  $i \in N$ , 下式成立:

$$\begin{aligned} \gamma Co(0 \cup \{E_i(jw), i \in I\}) &\supseteq \gamma_i Co(0 \cup \{E_i(jw), \\ &i \in I\}) = Co(0 \cup \{W_i(jw), i \in N\}). \end{aligned} \quad (14)$$

根据引理 2,  $(-1, j0) \notin \gamma Co(0 \cup \{E_i(jw), i \in N\})$ , 所以  $(-1, j0) \notin Co(0 \cup \{W_i(jw), i \in N\})$ . 根据引理 3,  $Co(0 \cup \{W_i(jw), i \in N\}) \supseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ , 所以  $(-1, j0) \notin \bigcup_{i \in I} G_i$ . 故特征值  $\lambda(G(jw))$  的轨迹不包含  $(-1, j0)$  点. 根据广义 Nyquist 判据, 特征方程 (8) 的所有特征根都具有负实部, 即系统 (6) 的状态渐进达到一致, 定理 1 证毕.

**注释1** 定理 1 的一致性条件只与每个智能体的局部信息有关, 其中, 智能体自身的输入时延会影响系统的收敛, 而系统的收敛与智能体间的通信时延无关.

**注释2** 当  $T_{ij} = T$  时, 定理 1 的收敛条件与文献 [13] 的 (44) 一致.

**注释3** 文献 [26] 中所得到的收敛条件相比于定理 1, 要显得保守.

**推论1** 假设系统拓扑结构为静态有向加权图并存在一个全局可达节点, 如考虑各智能体具有不同的输入时延, 即系统

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{V_j \in N_i} a_{ij}(x_j(t - T_{ij}) - x_i(t - T_i)), \quad i \in N. \quad (15)$$

在  $d_i T_i < \frac{\pi}{4}$  的条件下, 能够渐进达到一致. 其中  $T_{ij}, T_i$  分别为通信时延与输入时延.

**推论2** 假设系统拓扑结构为静态有向加权图并存在一个全局可达节点, 如考虑各智能体具有不同的输入时延, 系统

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{V_j \in N_i} a_{ij}(x_j(t - T_{ij} - T_i) - x_i(t - T_i)), \quad i \in N. \quad (16)$$

在  $d_i T_i < \frac{\pi}{4}$  的条件下, 能够渐进达到一致. 其中  $T_{ij}, T_i$  分别为通信时延与输入时延. 与推论 2 相比, 文献 [18] 的收敛条件要保守.

#### 4 具有不同时延的二阶多智能体系统一致性分析

本节讨论具有不同时延的二阶多智能体系统的一致性问题. 假设系统的动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t). \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $x_i \in R^m$  和  $v_i \in R^m$  分别表示第  $i$  个智能体的位置和速度状态,  $u_i(t) \in R^m$  表示控制输入,  $i \in N$ . 为论述的方便, 假定  $m = 1$ .

**定义2** 对于二阶多智能体系统 (17), 当且仅当对于  $\forall i, j = 1, 2, \dots, N$ , 如节点  $v_i$  与  $v_j$  的相对位置、相对速度逐步趋于 0, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i(t) - v_j(t)\| = 0$  时, 称系统 (17) 能渐进达到一致.

基于 Ren 等人 [14] 讨论的一类二阶多智能体系统, 提出了如下具有不同时延的控制算法:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \alpha \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}(x_j(t - T_{ij}) - x_i(t - T)) \\ &\quad + \beta \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}(v_j(t - T_{ij}) \\ &\quad - v_i(t - T)), \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $T_{ij}, T$  分别为通信时延与输入时延,  $\alpha, \beta$  分别为系统耦合强度且  $\alpha > 0, \beta > 0$ .

**定理2** 对于含有  $n$  个智能体的多智能体系统, 其网络连接拓扑为静态有向加权图, 且含有一个全局可达节点. 如果  $d_i(\alpha \cos w_{i0}T + \beta w_{i0} \sin w_{i0}T) < \frac{1}{2}w_{i0}^2$ , 则系统 (18) 渐进达到一致. 其中  $d_i = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}$ ,  $w_{i0}$  为  $G_{i0}(jw) = d_i \frac{\alpha + j\beta w e^{-jwT}}{jw}$  的 Nyquist 曲线与复平面负实轴的交点, 且满足  $\tan(w_{i0}T) = \frac{\beta}{\alpha} w_{i0}$ .

**证明** 通过 Laplace 变换, 容易得到系统 (18) 的特征方程为  $\det(s^2 I + \alpha L(s) + \beta L(s)s) = 0$ , 其中  $I$  为  $n$  阶单位阵,

$$L(s) = (l_{ij}(s)) = \begin{cases} -a_{ij} e^{-sT_{ij}}, & v_j \in N_i, \\ \sum_{V_j \in N_i} a_{ij} e^{-sT}, & j = i, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

令

$$F(s) = \det(s^2 I + \alpha L(s) + \beta L(s)s). \quad (19)$$

接下来分析  $F(s)$  的零点具有负实部或者  $s = 0$ .

1) 当  $s = 0$  时,  $F(0) = \alpha L$ , 根据引理 1, 易知  $s = 0$  是  $F(s)$  的唯一零点.

2) 当  $s \neq 0$  时, 令

$$P(s) = \det(I + G(s)). \quad (20)$$

其中

$$G(s) = \frac{\alpha L(s) + \beta L(s)s}{s^2}. \quad (21)$$

根据广义 Nyquist 准则, 如果  $G(s)$  特征值的 Nyquist 曲线不包围  $(-1, j0)$  点, 则  $P(s)$  的零点就都具有负实部.

令  $s = jw$ , 根据 Gerschgorin 圆盘定理, 易知矩阵  $G(jw)$  的特征值  $\lambda(G(jw))$  满足

$$\lambda(G(jw)) \in \bigcup_{i \in I} G_i, \quad (22)$$

$$G_i = \left\{ \zeta : \zeta \in C, \left| \zeta - \sum_{v_j \in N_i} a_{ij} \frac{\alpha + j\beta w}{jw} \frac{e^{-jwT}}{jw} \right| \leq \left| \sum_{v_j \in N_i} a_{ij} \frac{\alpha + j\beta w}{jw} \frac{e^{-jwT}}{jw} \right| \right\}, \quad (23)$$

其中,  $C$  为复数域. 令  $d_i = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij}$ , 圆盘的中心为

$$G_{i0}(jw) = d_i \frac{\alpha + j\beta w}{jw} \frac{e^{-jwT}}{jw}. \quad (24)$$

如果点  $(-a, j0)$  (其中  $a \geq 1$ ), 不在某一个圆盘  $G_i$  中, 则有

$$\left| -a - d_i \frac{\alpha + j\beta w}{jw} \frac{e^{-jwT}}{jw} \right| > \left| d_i \frac{\alpha + j\beta w}{jw} \frac{e^{-jwT}}{jw} \right|. \quad (25)$$

整理得到

$$a \left[ a - \frac{2d_i}{w^2} (\alpha \cos wT + \beta w \sin wT) \right] > 0. \quad (26)$$

当  $\frac{2d_i}{w^2} (\alpha \cos wT + \beta w \sin wT) < 1$  时, (26) 式成立. 即  $G(s)$  特征值的 Nyquist 曲线不包围  $(-1, j0)$  点, 所以  $P(s)$  的零点都具有负实部.

由于圆盘中心  $G_{i0}(jw)$  的 Nyquist 曲线随着  $w$  而变化, 圆盘  $G_i$  也随之而变. 假设  $w_{i0}$  为  $G_{i0}(jw)$  的 Nyquist 曲线与复平面负实轴的交点. 易知

$$\tan(w_{i0}T) = \frac{\beta}{\alpha} w_{i0}. \quad (27)$$

定理 2 证毕.

**注释 4** 从定理 2 的收敛条件可知, 具有不同时延的二阶多智能体系统 (18), 其收敛的条件只与系统耦合强度和输入时延有关, 而与通信时延无关.

**注释 5** 假设  $\alpha = 0, \beta = 1$  时, 定理 2 的收敛条件与文献 [13] 的 (44) 式一致. 显然, 定理 2 所讨论的情况更具有有一般性.

## 5 计算机仿真实验

假设多智能体系统包含 5 个节点, 且连接拓扑如图 1 所示.

该图为一有向加权图, 节点 1 为全局可达节点.

设定该网络拓扑图对应的邻接矩阵为

$$A = (a_{ij})_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**实验 1** 由定理 1 条件知, 智能体输入时延应满足  $0 \leq T < \frac{\pi}{4d_i}$ , 易知  $T \in [0, 3.14)$ . 由文献 [26] 的条件可知  $T \in [0, 2)$ . 假定各节点间的通信时延分别为  $T_{13} = 1.0$  s,  $T_{21} = 0.75$  s,  $T_{32} = 1.8$  s,  $T_{42} = 2.0$  s,  $T_{51} = 0.8$  s, 输入时延  $T = 0.3$  s, 并随机产生各智能体的初始状态为  $x(0) = (2, 3.5, 2.5, 3, 5)^T$ . 系统 (6) 仿真实验结果如图 2 所示, 可以看出各智能体最终收敛一致. 改变输入时延  $T = 2$  s, 其他条件不变, 则系统 (6) 各智能体的状态如图 3 所示.

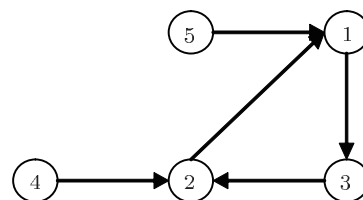


图 1 多智能体系统拓扑结构图

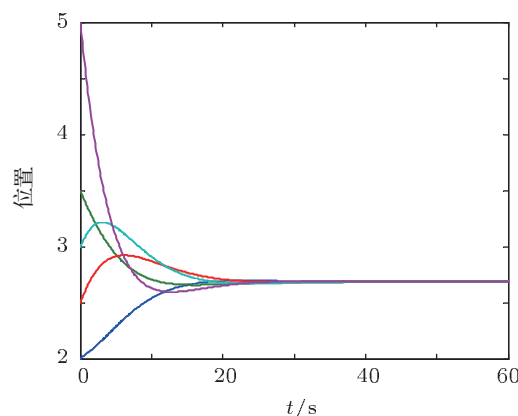


图 2  $T = 0.3$  s 时多智能体系统状态图

从图 3 仿真实验的结果可以看出, 当  $T = 2$  s 时, 系统各智能体状态是收敛的, 从而验证了文献 [26] 的收敛条件较定理 1 保守.

从图 2 和图 3 可以看出, 在其他条件不变的情况下, 适当增加各节点的输入时延, 能够加快系统的收敛速度.

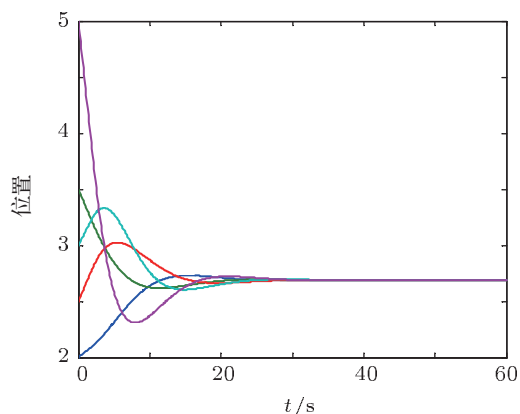


图3  $T = 2\text{ s}$  时多智能体系统状态图

**实验2** 在实验 1 的基础上, 改变各节点间的通信时延为  $T_{13} = 1.5\text{ s}$ ,  $T_{21} = 0.25\text{ s}$ ,  $T_{32} = 1\text{ s}$ ,  $T_{42} = 0.75\text{ s}$ ,  $T_{51} = 1.8\text{ s}$ . 分别假设输入时延  $T = 0.3\text{ s}$ ,  $T = 2\text{ s}$ , 系统 (6) 各智能体状态分别如图 4 和图 5 所示.

对比图 2 与图 4, 图 3 与图 5 的实验结果容易看出, 在其他条件相同的情况下, 适当改变各节点的通信时延, 并不会影响系统的收敛特性, 但对系统的收敛速度会产生一定的影响. 所以, 适当调节节点间通信时延的大小, 可以在一定程度上提高系统的动态性能.

**实验3** 根据定理 2 条件, 假定系统耦合强度  $\alpha = 0.75$ ,  $\beta = 3$ , 输入时延、通信时延分别为  $T = 0.05\text{ s}$ ,  $T_{13} = 0.5\text{ s}$ ,  $T_{21} = 0.75\text{ s}$ ,  $T_{32} = 1\text{ s}$ ,  $T_{42} = 1.25\text{ s}$ ,  $T_{51} = 0.8\text{ s}$ . 随机产生各智能体的初始状态为  $x(0) = (400, 550, 750, 600, 800)^T$ ,

$v(0) = (4, 2, 2.5, 3.5, 5)^T$ . 系统 (18) 仿真实验的结果如图 6 所示, 可以看出各智能体的状态最终收敛一致. 由此说明了定理 2 理论分析所得结论的正确性.

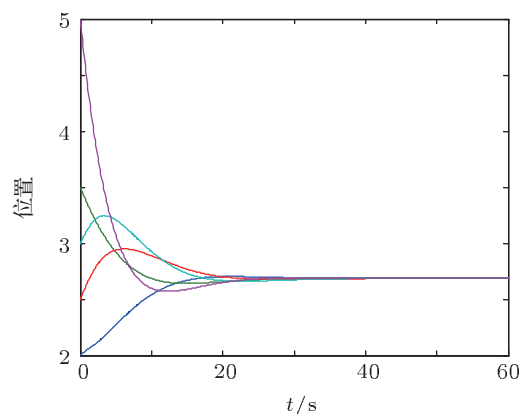


图4  $T = 0.3\text{ s}$  时多智能体系统状态图

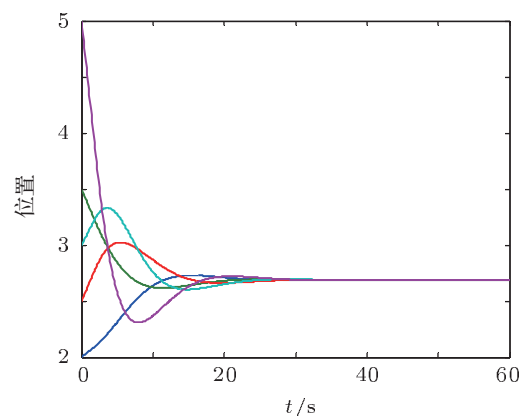


图5  $T = 2\text{ s}$  时多智能体系统状态图

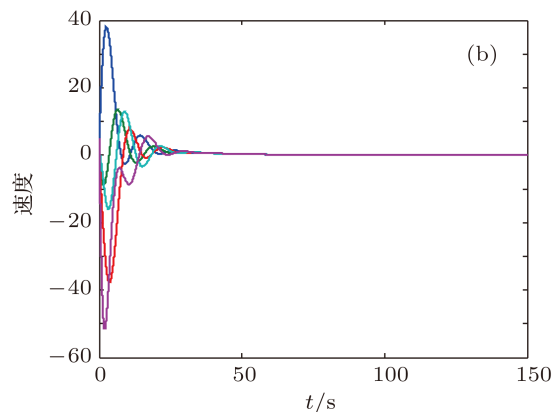
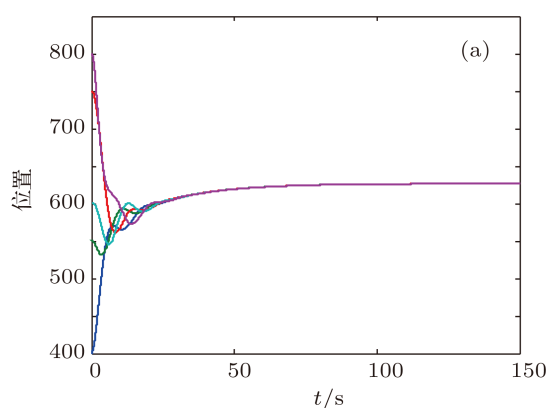


图6 多智能体系统状态变化图 (a) 位置; (b) 速度

**实验4** 在实验 3 的基础上, 假定系统参数、节点输入时延均不变, 现改变智能体间通信时延的大

小, 观察通信时延对系统收敛的影响. 考虑以下两种情况:

1)  $T_{13} = 0.5 \text{ s}$ ,  $T_{21} = 0.75 \text{ s}$ ,  $T_{32} = 1 \text{ s}$ ,  
 $T_{42} = 1.25 \text{ s}$ ,  $T_{51} = 0.8 \text{ s}$ .

2)  $T_{13} = 1 \text{ s}$ ,  $T_{21} = 1.2 \text{ s}$ ,  $T_{32} = 1.8 \text{ s}$ ,  
 $T_{42} = 1.25 \text{ s}$ ,  $T_{51} = 1.2 \text{ s}$ .

系统 (18) 仿真实验的结果分别如图 7 和

图 8 所示.

从图 7 和图 8 仿真实验的结果可以看出, 在系统其他参数相同的情况下, 改变智能体间通信时延的大小, 不影响系统的收敛, 但会影响系统收敛的快慢, 即系统的动态性能.

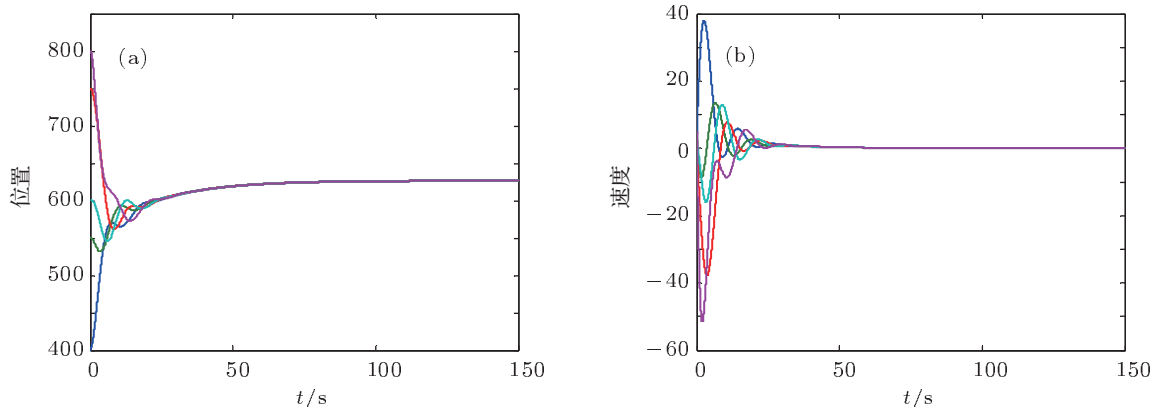


图 7 多智能体系统状态变化图 (a) 位置; (b) 速度

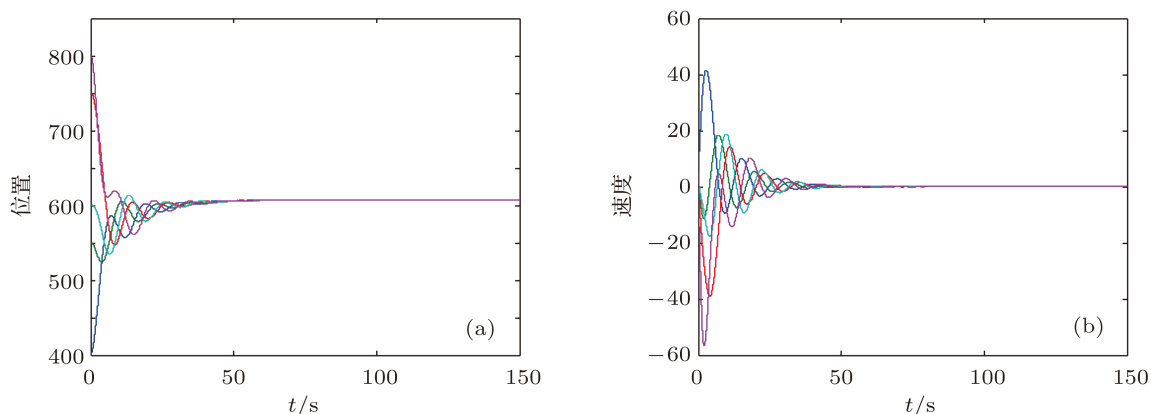


图 8 多智能体系统状态变化图 (a) 位置; (b) 速度

## 6 结论

针对具有不同时延的多智能体系统的运动一致性进行了研究, 得到了在系统拓扑结构为静态有向加权图且存在一个全局可达节点的情况下, 系统中各智能体状态渐进达到收敛的充分条件. 该条件

只与每个智能体的输入时延、各自的状态信息以及系统的耦合强度有关, 而与彼此间的通信时延无关. 通过仿真实验验证了上述结论的正确性, 同时, 从实验的结果还可以看出, 通信时延、输入时延能够影响系统的收敛速度, 即可以影响多智能体系统的动态特性.

- [1] Yu W W, Chen G R, Wang Z D, Yang W 2009 *IEEE Trans. on Syst. Man Cybern.* **39** 1568
- [2] Paganini F, Doyle J, Low S 2001 *Proceedings of the International Conference on Decision and Control* Orlando, Florida, USA, December 4–7, 2001 p185
- [3] Olfati-Saber R 2006 *IEEE Trans. on Autom. Control* **51** 401
- [4] Liu T L, Huang H J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6321 (in Chinese) [刘天亮, 黄海军 2007 物理学报 **56** 6321]
- [5] Li Y M, Guan X P 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3355
- [6] Hu J P, Yuan H W 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3777
- [7] Tan F X, Guan X P, Liu D R 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3531
- [8] Sun Y Z, Ruan J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4137
- [9] Bliman P A, Ferrari-Trecate G 2008 *Automatica* **44** 1985
- [10] Liu C L, Tian Y P 2009 *Control and Decision* **24** 1601 (in Chinese) [刘成林, 田玉平 2009 控制与决策 **24** 1601]
- [11] Vicsek T, Czirok A, Ben-Jacob E 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1226
- [12] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S 2003 *IEEE Trans. on Autom. Control* **48** 988
- [13] Olfati-Saber R, Murray R M 2004 *IEEE Trans. on Autom. Control* **49** 1520
- [14] Ren W, Beard R W 2005 *IEEE Trans. on Autom. Control* **50** 655
- [15] Moreau L 2005 *IEEE Trans. on Autom. Control* **50** 169
- [16] Yu H, Jian J G, Wang Y J 2007 *Control and Decision* **22** 558 (in Chinese) [俞辉, 蹇继贵, 王永骥 2007 控制与决策 **22** 558]
- [17] Yang H Y, Zhang S Y 2009 *Control and Decision* **24** 413 (in Chinese) [杨洪勇, 张嗣瀛 2009 控制与决策 **24** 413]
- [18] Tian Y P, Liu C L 2008 *IEEE Trans. on Autom. Control* **53** 2122
- [19] Wang W, Slotine J J E 2006 *IEEE Trans. on Autom. Control* **51** 712
- [20] Yang W, Bertozzi A L, Wang X F 2008 *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control* Cancun, Mexico, December 9–11, 2008 p2926
- [21] Lin P, Jia Y M, Du J P 2008 *American Control Conference* Seattle, Washington, June 11–13, 2008 p1564
- [22] Tian Y P, Liu C L 2009 *Automatica* **45** 1347
- [23] Li H, Lin P, Zhang C X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 158 (in Chinese) [李慧, 林鹏, 张春熹 2009 物理学报 **58** 158]
- [24] Lin P, Jia Y M 2010 *IEEE Trans. on Autom. Control* **55** 778
- [25] Liu C L, Liu F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 030202 (in Chinese) [刘成林, 刘飞 2011 物理学报 **60** 030202]
- [26] Liu C L, Tian Y P 2008 *Journal of Southeast University (Natural Science Edition)* **38** 170 (in Chinese) [刘成林, 田玉平 2008 东南大学学报 (自然科学版) **38** 170]
- [27] Tian Y, Yang H 2004 *Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation* Hangzhou, China, June 14–15, 2004 p15
- [28] Yang H Y, Tian S W, Zhang S Y 2011 *Acta Electronica Sinica* **39** 872 (in Chinese) [杨洪勇, 田生文, 张嗣瀛 2011 电子学报 **39** 872]



# Consensus analysis of multi-agent system with multiple time delays\*

Ji Liang-Hao<sup>1)2)†</sup> Liao Xiao-Feng<sup>1)</sup>

1) (*State Key Lab. of Power Transmission Equipment & System Security and New Technology, College of Computer Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China*)

2) (*College of Computer Science and Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China*)

(Received 7 December 2011; revised manuscript received 16 March 2012)

## Abstract

Consensus problems of first-order and second-order multi-agent system with communication delays and input delays are proposed based on the frequency-domain analysis and generalized Nyquist criterion. Supposing that the topology of the multi-agent system is fixed, asymmetrically interconnected digraph and owns a globally reachable node, the sufficient condition for system convergence is obtained. The results show that the condition of convergence is dependent only on system coupling strength, each agent input time delay and the adjacent weights to its neighbors, but independent of communication delay which can affect the dynamics of the system. Finally, simulations are provided to demonstrate the effectiveness of our theoretical results.

**Keywords:** multi-agent, time delay, consensus, convergence

**PACS:** 02.30.Ks, 02.30.Yy, 05.65.+b

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60973114, 61170249), the Natural Science Foundation of CQCSTC (Grant Nos. 2009BA2024, cstc2011jjA1320), and the State Key Laboratory of Power Transmission Equipment & System Security and New Technology, Chongqing University (Grant No. 2007DA10512711206).

† E-mail: jilh77@yahoo.com.cn