

# 损耗型变形耦合电机系统的混沌参数特性\*

郝建红<sup>†</sup> 孙娜燕

(华北电力大学电气与电子工程学院, 北京 102206)

(2011年10月19日收到; 2012年1月3日收到修改稿)

提出一种考虑两种损耗特性的耦合发电机模型. 与原来的耦合发电机模型相比, 该模型更能反映实际情况. 通过数值计算 Lyapunov 指数谱、分岔图、Poincaré映射等, 分析了系统在各种参数空间的性态变化. 结果显示考虑机械阻尼损耗的耦合发电机模型具有双吸引子, 机械阻尼损耗一方面可以抑制系统混沌, 另一方面却使系统在参数空间具有更复杂的混沌特性, 表征这两种损耗特性的参数对系统动力学行为都有显著的影响.

**关键词:** 耦合发电机系统, 分岔, Lyapunov 指数, Poincaré映射

**PACS:** 05.45.Gg

## 1 引言

混沌是一种在确定系统中发生的貌似无规则运动, 动力学行为表现为对初值的敏感性、遍历性、貌似随机性, 并具有复杂的分形和自相似结构. 非线性动力学系统产生的分岔甚至混沌状态是十分普遍的现象<sup>[1-4]</sup>, 现阶段对混沌系统的研究不仅仅只是数学和物理的基础理论研究, 更希望在实际工程中有所进展.

耦合发电机系统存在着复杂的非线性行为, 其参数特性和动力学特性的分析研究可以为实际工程的机电控制提供方案. 已有学者分别对此系统的混沌特性、控制和同步问题进行了研究<sup>[5-7]</sup>. 但以往的耦合发电机模型都是在只考虑一种耗散特性, 对表征另一种耗散特性的参数令其为零而得到的<sup>[8,9]</sup>. 然而, 在实际工程中各种耗散都是存在的. 基于这种事实, 本文将在原有模型的基础上, 引入机械阻尼损耗, 将系统的电流、内部参数和电磁场相互作用关系用一个三维非线性方程表示. 通过数值计算, 在考虑两种耗散特性的基础上, 从系统的相轨迹图、分岔图、最大 Lyapunov 指数和 Poincaré映射等方面深入分析了其动力学行为, 通过对系统参数特性的计算, 进一步分析比较了耗散模型的新参数特性.

## 2 考虑阻尼损耗的变形耦合发电机系统

### 2.1 损耗型发电机模型

耦合发电机系统由两台放置在一起的发电机组成, 两者互相耦合, 相互影响. 其系统耦合方程由一个三维非线性自治方程来描述:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_1 y - \mu_1 x, & \dot{y} &= \omega_2 x - \mu_2 y, \\ \dot{\omega}_1 &= q_1 - \varepsilon_1 \omega_1 - xy, & \dot{\omega}_2 &= q_2 - \varepsilon_2 \omega_2 - xy, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ,  $x$  和  $y$  分别是两台发电机的转动角速度和电流,  $q_1$  和  $q_2$  是发电机转子的转矩,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  是大于零的损耗效应因子. 从方程中各量的物理意义看, 电机电流  $\dot{I} \propto -\mu I \Rightarrow I \sim I_0 e^{-\mu t}$ , 而电机转子角速度  $\dot{\omega} \propto -\varepsilon \omega \Rightarrow \omega \sim e^{-\varepsilon t}$ , 也就是说  $\mu$  和  $\varepsilon$  分别表征电机的电流损耗和机械阻尼损耗. 在以往的模型中, 都令  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ , 即将  $\varepsilon$  表征的阻尼损耗忽略. 但随着高性能电机技术的快速发展, 电机运行速度越来越高, 系统对各种阻尼损耗的影响变得敏感. 为了更能反映实际运行情况, 我们假设  $\mu$  和  $\varepsilon$  两种损耗因子均不为零. 为了简化计算, 令  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1 - \varepsilon$ ,  $q_1 = q_2 = z$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ,  $\dot{z} = \frac{1}{2}(\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2)$ ,  $\omega_1 = z + \alpha$ ,  $\omega_2 = z - \alpha$ .

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10775018) 和科技部国际科技合作项目 (批准号: 2007DFA71250, 2011DFR00780) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: jianhonghao@ncepu.edu.cn

则方程 (1) 变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\mu x + y(z + \alpha), \\ \dot{y} &= -\mu y + x(z - \alpha), \\ \dot{z} &= \varepsilon z - xy, \end{aligned} \quad (2)$$

$\alpha, \mu, \varepsilon$  为系统 (2) 的三个控制参数, 其中  $\mu$  为正参数,  $\alpha$  为非零参数,  $\varepsilon \in (0, 1]$ ,  $\varepsilon$  越小表征机械阻尼损耗越大. 当  $\varepsilon = 1$  时系统 (2) 就退化为文献 [9] 的系统, 所以本文所建立的损耗型耦合发电机模型更具有反映实际工程情况的普遍性. 与原有的耦合模型一样, 系统 (2) 具有自然  $z$  轴对称性.

## 2.2 系统的相轨迹和混沌吸引子

系统 (2) 有五个平衡点, 分别为

$$\begin{aligned} S_0 &= (0, 0, 0), \quad S_1 = (\beta_1, \beta_2, \gamma), \\ S_2 &= (-\beta_1, -\beta_2, \gamma), \quad S_3 = (-\beta_2, \beta_1, -\gamma), \\ S_4 &= (\beta_2, -\beta_1, -\gamma), \end{aligned}$$

其中

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon\gamma(\gamma + \alpha)}{\mu}},$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \sqrt{\frac{\varepsilon\gamma(\gamma - \alpha)}{\mu}}, \\ \gamma &= \sqrt{\mu^2 + \alpha^2}. \end{aligned}$$

利用 Routh-Hurwitz 条件可以证明当  $2\mu > \varepsilon$  时, 平衡点  $S_0-S_4$  是不稳定的.

当参数  $\alpha = 3, \mu = 2, \varepsilon = 0.75$  时, 上述五个平衡点分别为

$$\begin{aligned} S_0 &= (0, 0, 0), \\ S_1 &= (2.9885, 0.90485, 3.60555), \\ S_2 &= (-2.9885, -0.90485, 3.60555), \\ S_3 &= (-0.90485, 2.9885, -3.60555), \\ S_4 &= (0.90485, -2.9885, -3.60555). \end{aligned}$$

系统相轨迹图、时序图、系统功率谱和 Poincaré 映射图如图 1 所示, 结果表明: 在存在机械阻尼损耗情况下, 耦合发电机系统处于混沌状态, 且系统具有两个明显不同的奇怪吸引子<sup>[10]</sup>, 分别围绕着平衡点  $S_1, S_2$  和  $S_3, S_4$ . 图 2(a) 和 (b) 是系统初始值分别取  $(-1, -1, 1)$ , 和  $(1, 1, -2)$  时的计算结果, 分别对应着吸引子 A 和吸引子 B.

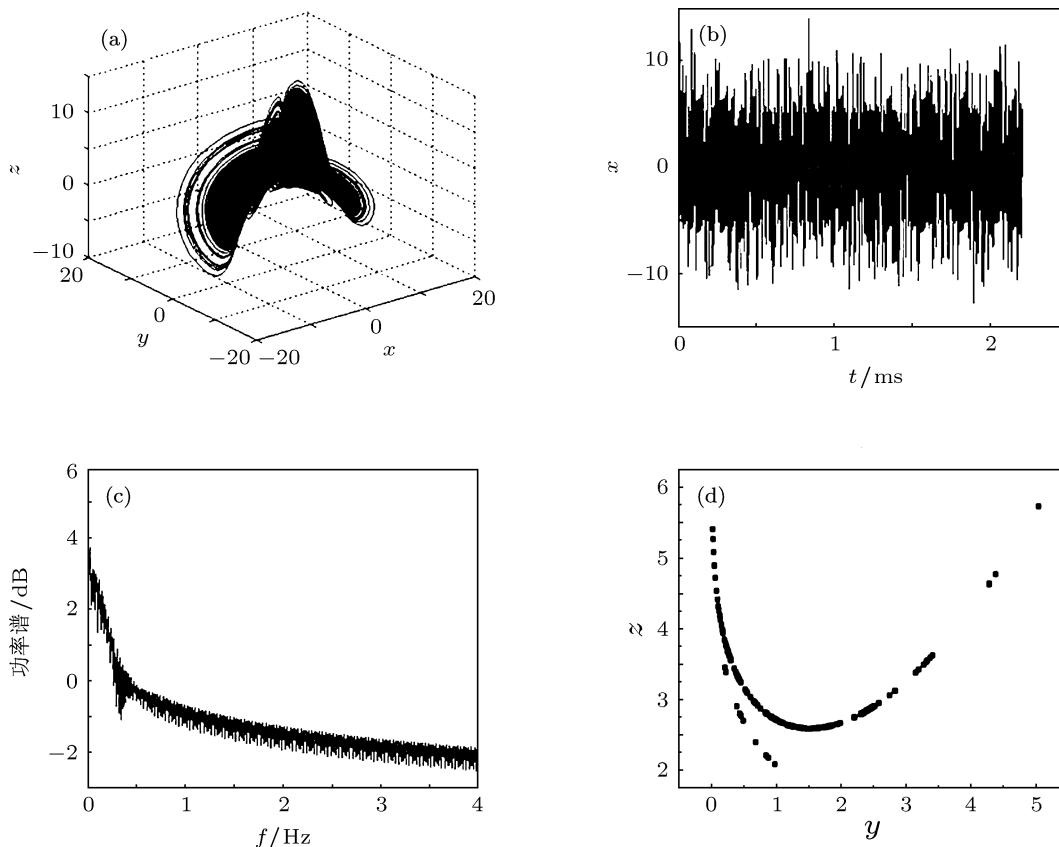


图 1 参数  $\alpha = 3, \mu = 2, \varepsilon = 0.75$  (a) 三维空间相图; (b)  $x-t$  时序; (c) 系统的功率谱; (d) Poincaré 映射图

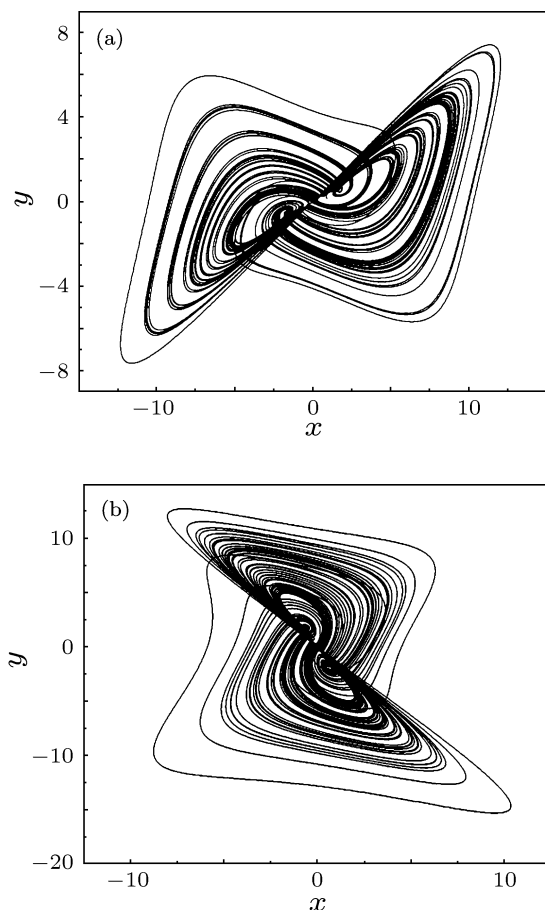


图2 参数  $\alpha = 3, \mu = 2, \varepsilon = 0.75$  (a) 吸引子 A; (b) 吸引子 B

### 3 系统参数空间的最大 Lyapunov 指数分布

系统参数发生变化时, 将导致系统平衡点稳定性发生变化, 系统也将处于不同的状态. 在实际工程中, 发电机系统总是工作在复杂环境下, 因此对系统参数特性的分析可以为系统控制提供理论依据和参考. 本节通过计算最大 Lyapunov 指数分析系统在参数空间中的动力学特性. 由混沌理论知, 当最大 Lyapunov 指数等于 0 时, 系统处于准周期振荡 (极限环或二维环面); 当最大 Lyapunov 指数大于 0 时, 系统处于混沌态; 当最大 Lyapunov 指数小于 0 时, 系统处于不动点或周期态. 图 3(a) 和 (b) 分别是参数  $\alpha = 3, \mu = 4$  时系统最大 Lyapunov 指数在参数空间 ( $\mu-\varepsilon$ ) 和 ( $\alpha-\varepsilon$ ) 的分布情况. 不难看出: 在相同的电流损耗  $\mu$  和正参数  $\alpha$  情况下, 机械阻尼损耗越小, 系统出现混沌的参数区域也越大, 即系统越容易出现混沌状态. 系统在参数空间中呈现出的复杂动力学变化特性说明三个参数都对系统的混沌动力学特性产生显著影响.

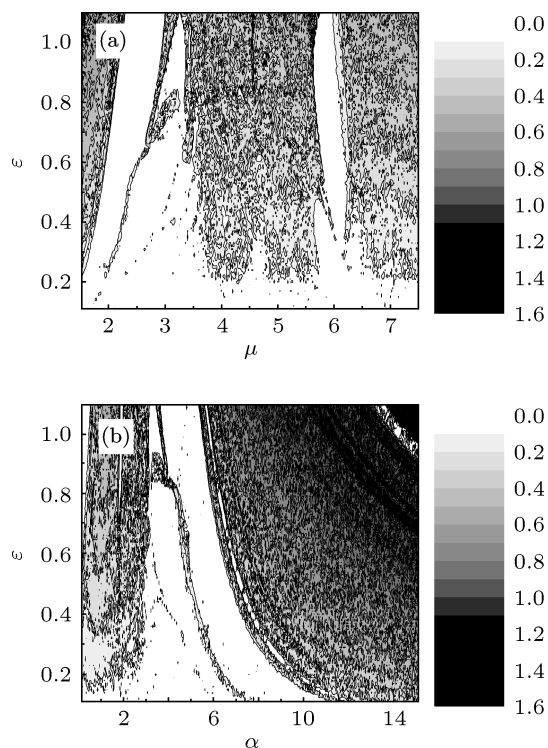


图3 双参数变化时系统最大 Lyapunov 指数谱 (a) 固定  $\alpha = 3$ ; (b) 固定  $\mu = 4$

为了更为详细的讨论机械阻尼损耗参数  $\varepsilon$  对系统动力学特性的影响, 取  $\alpha \in [0.1, 15.1]$ ,  $\mu \in [0.5, 8.5]$ , 分别计算了  $\varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.3, \varepsilon = 0.75, \varepsilon = 1$  四种阻尼损耗情况下最大 Lyapunov 指数在  $\alpha-\mu$  空间的分布情况, 如图 4 所示. 当系统损耗参数相同时, 控制参数  $\alpha$  越大, 系统越容易出现混沌; 系统阻尼损耗越大, 处在混沌态的  $\alpha-\mu$  参数空间越小, 且最大 Lyapunov 指数也越小, 但动力学行为却变得越复杂 (参数空间分布图变的越零散). 这说明机械阻尼损耗可以抑制系统的混沌态, 但又会增大系统的功耗, 降低系统工作效率. 所以在实际工程中, 需恰当地控制系统参数, 使其工作在最佳状态.

### 4 系统参数变化的分岔特性分析

系统参数发生变化时, 将导致系统平衡点稳定性发生变化, 系统也将处于不同的状态. 分岔图可以直观的表述各系统参数变化时系统的性态变化情况, 由于  $\varepsilon$  是系统 (2) 为表征机械阻尼损耗特而引入的新参数, 故本节我们将主要考虑参数  $\varepsilon$  对系统特性的影响.

### 4.1 不同阻尼损耗下 $\alpha$ 对系统分岔特性的影响

固定参数 $\mu = 2$ , 取 $\alpha \in [0.1, 15.1]$ , 阻尼损耗参数分别为 $\varepsilon = 0.75$ 和 $\varepsilon = 0.45$ 时最大Lyapunov指数

谱和系统分岔图如图5所示.

计算结果表明, 这是一个典型的逆倍周期分岔过程, 系统分岔结构与文献 [9] 的模型相似. 随着参数的变化, 系统出现混沌、周期和准周期三种状态. 当 $\alpha$ 由大变小时通过叉式分岔, 伴随着“缺边现象”

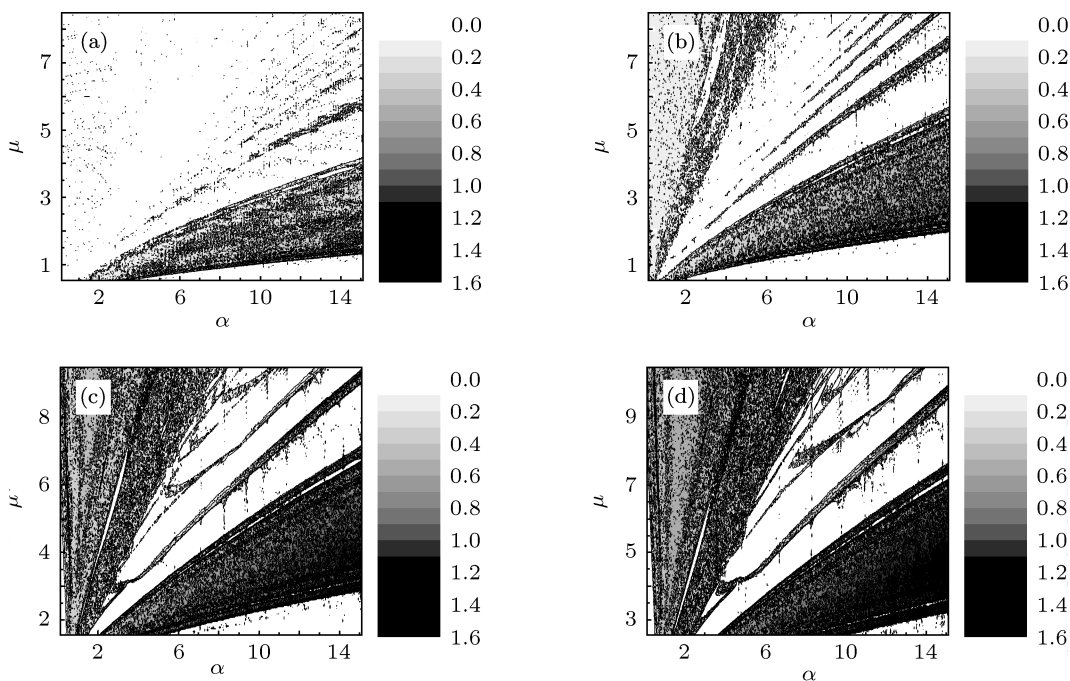


图4 阻尼损耗 $\varepsilon$ 取不同值时, 系统最大 Lyapunov 指数谱的双参数变化特性 (a)  $\varepsilon = 0.1$ ; (b)  $\varepsilon = 0.3$ ; (c)  $\varepsilon = 0.75$ ; (d)  $\varepsilon = 1$

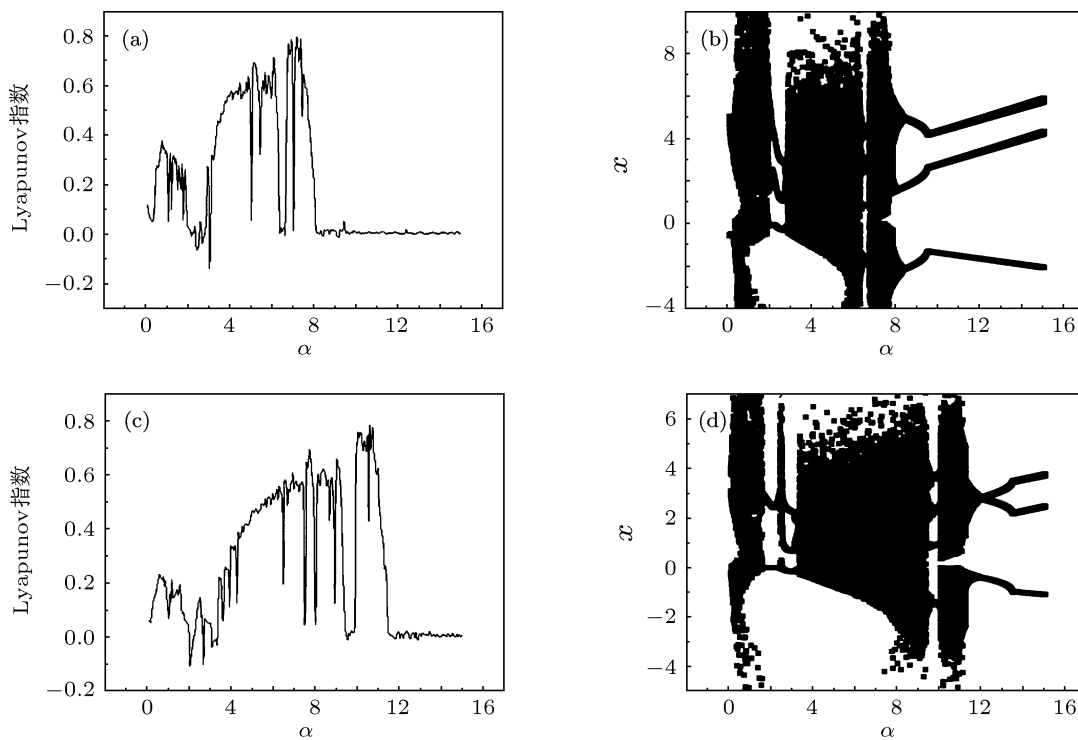


图5 系统 (2) 在参数 $\mu = 2$ ,  $\varepsilon$ 取不同值时随 $\alpha$ 变化的最大 Lyapunov 指数谱和分岔图 (a)  $\varepsilon = 0.75$ ; (b)  $\varepsilon = 0.75$ ; (c)  $\varepsilon = 0.45$ ; (d)  $\varepsilon = 0.45$

进入混沌态. 但损耗越大, 系统参数的混沌区域越大. 随着  $\varepsilon$  的减小, 周期窗口向  $\alpha$  增大的方向移动, 且分岔结构变得越复杂. 由图 5 可知, 当  $\varepsilon$  由 0.75 变到 0.45 时, 出现叉式分岔的  $\alpha$  值从 10 附近增大到 13.5 左右, 且图 5(d) 出现“缺边”的方向刚好与图 5(b) 相反, 因而出现一个 3 周期叉式分岔收敛到 2 周期的演化过程. 图 6 是图 5(c) 和图 5(d) 的局部放大. 由图可见, 在出现叉式分岔的第一个周期窗口中, 先由切分岔退出混沌, 出现周期 2 和周期 3, 在  $\alpha \approx 3.15$  附近周期 3 叉式分

岔并出现“缺边”, 且在周期 2 和周期 3 之间出现了一个细小的混沌带, 且在混沌带中出现“断带空隙”.

### 4.2 不同阻尼损耗下 $\mu$ 对系统分岔特性的影响

固定参数  $\alpha = 3$ , 取  $\mu \in [0.5, 8.5]$ , 阻尼损耗参数分别为  $\varepsilon = 0.75$  和  $\varepsilon = 0.45$  时的最大 Lyapunov 指数谱和系统分岔图如图 7 所示.

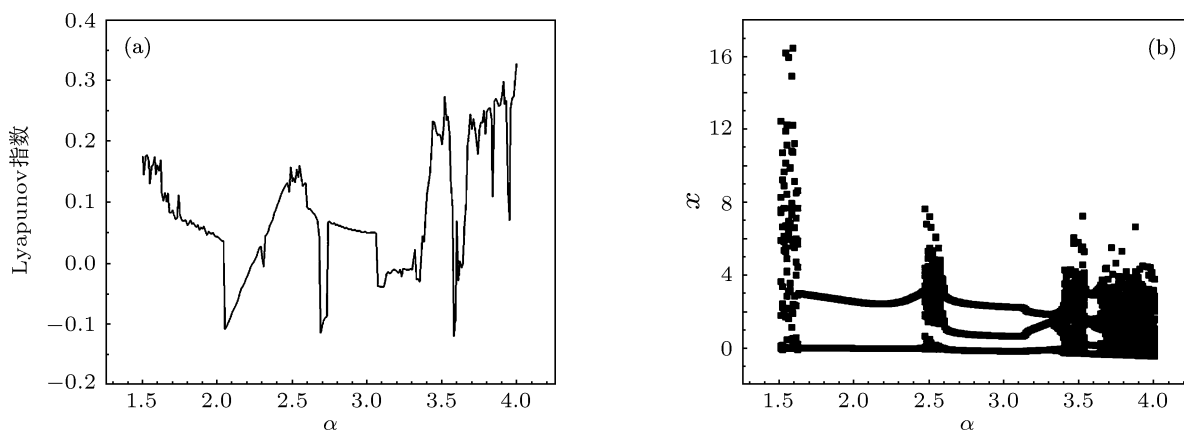


图 6 图 5(c) 和图 5(d) 的局部放大 (a)  $\varepsilon = 0.45$ ; (b)  $\varepsilon = 0.45$

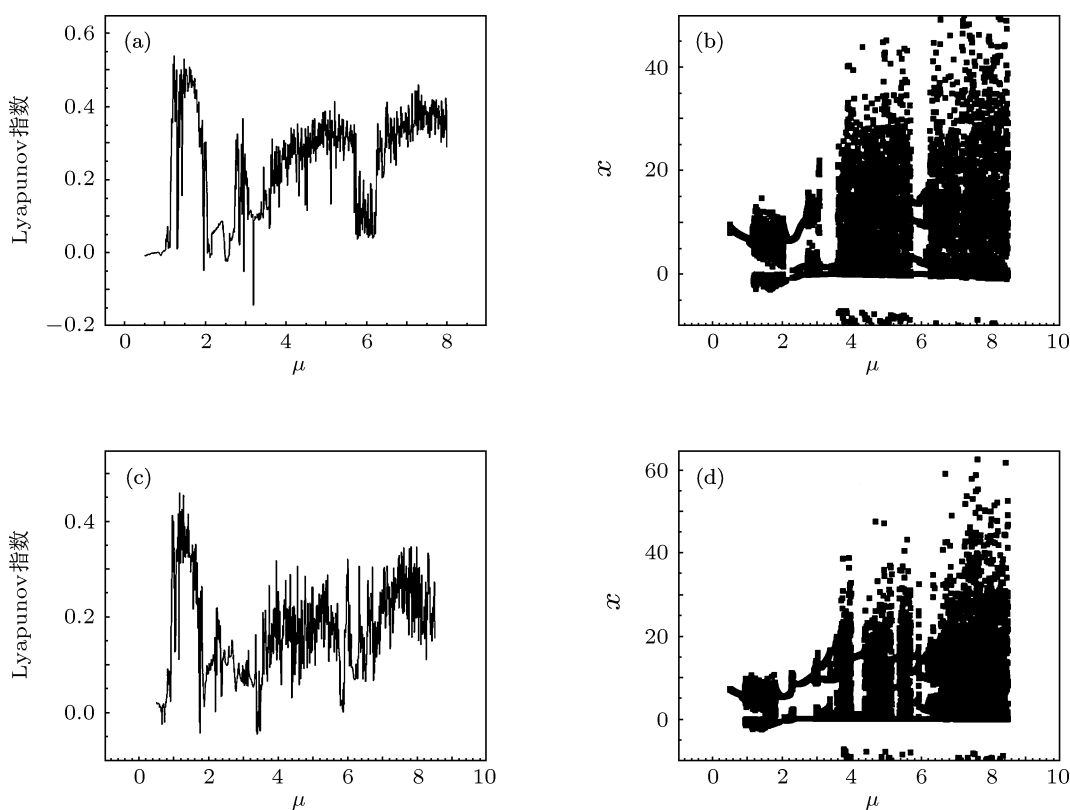


图 7 系统 (2) 在参数  $\alpha = 3$ ,  $\varepsilon$  取不同值时随  $\mu$  变化的最大 Lyapunov 指数谱和分岔图 (a)  $\varepsilon = 0.75$ ; (b)  $\varepsilon = 0.75$ ; (c)  $\varepsilon = 0.45$ ; (d)  $\varepsilon = 0.45$

计算结果表明,随着  $\mu$  的变化,系统交替出现混沌态与周期态,并在  $\mu = 0.5$  时由单周期经切分岔进入混沌态,并在混沌带中出现大小不一的“断带空隙”.由图 7 可知,阻尼损耗越大,分岔结构越复杂,即系统对  $\mu$  值的变化越敏感.随着  $\varepsilon$  的减小,周期窗口越多越窄,周期窗口中的周期数也越多.图 8 是图 7(c) 和图 7(d) 中第二个周期窗口的局部放大.不难看出,系统由切分岔进入周期态,在  $\mu = 1.825$  处发生叉式分岔.与之相比,当阻尼损耗较小 ( $\varepsilon = 0.75$ ) 时,在  $\mu = 1.825$  处系统还处于混沌态(见图 7(a) 和 (b)).系统在 2 周期和 3 周期之间嵌入一个窄小的混沌带,并在  $\mu = 2.825$ ,  $\mu = 3.05$ ,  $\mu = 3.325$  处发生叉式分岔,出现“缺边”,系统在  $\mu = 3.55$  时发生切分岔再次进入混沌态.

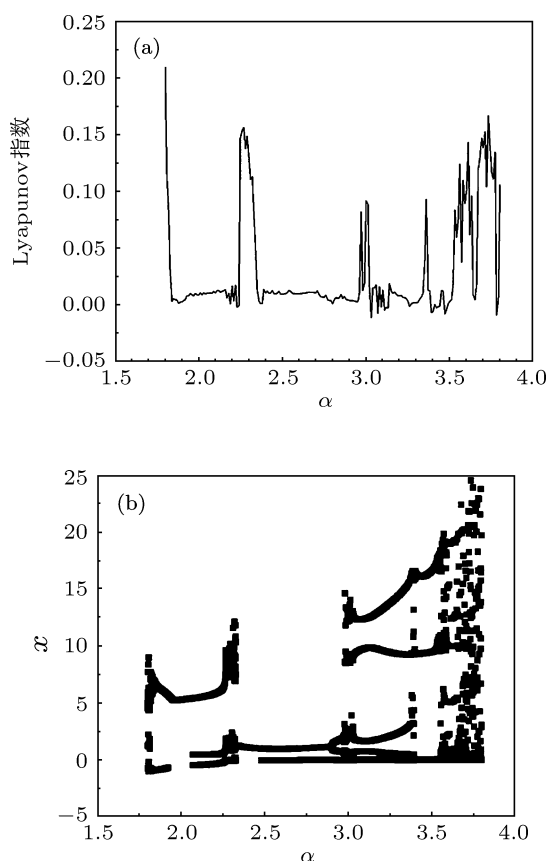


图 8 图 7(c) 和 7(d) 的局部放大 (a)  $\varepsilon = 0.45$ ; (b)  $\varepsilon = 0.45$

### 4.3 阻尼参数 $\varepsilon$ 对系统状态演化的影响

固定参数  $\mu = 2, \alpha = 3$ , 取  $\varepsilon \in [0.1, 1]$  时最大 Lyapunov 指数谱和系统分岔图如图 9 所示.

由图 9 可看出,在阻尼损耗较小时,系统更容易出现混沌行为,这与第三章的分析是一致的.

在  $\varepsilon < 0.65$  时系统在准周期、单周期、2 周期和 3 周期之间转换,并在  $\varepsilon \in (0.18, 0.26)$  时有一个细小的混沌带.系统在  $\varepsilon = 0.68$  时进入混沌,随后在  $\varepsilon = 0.77$  处系统发出现一个 5 周期窗口.为了与文献 [9] 给出的  $\varepsilon = 1$  进行对比,图 10 给出  $\varepsilon \in [0.74, 0.84]$  的精细结构.

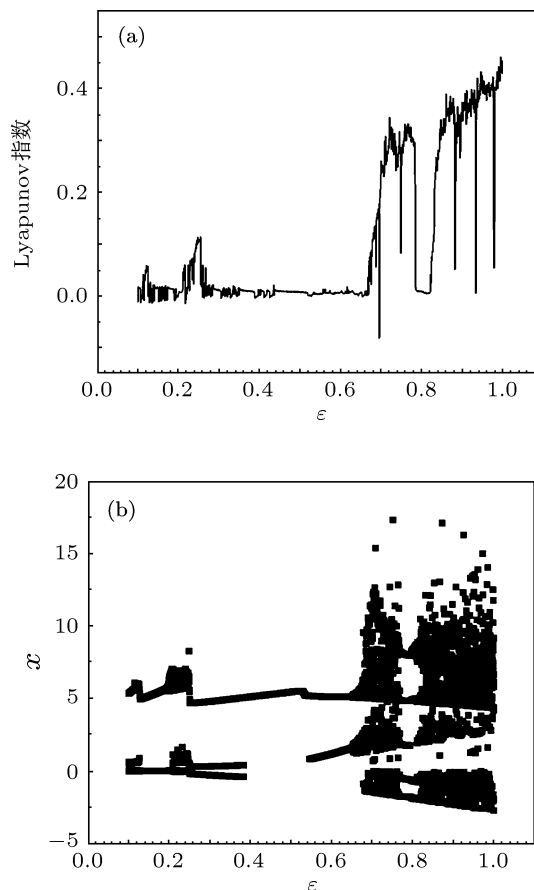


图 9 系统 (2) 在参数  $\alpha = 3, \mu = 2$  时随  $\varepsilon$  变化的最大 Lyapunov 指数谱和分岔图

从图可知,在  $\varepsilon = 0.766$  时系统通过切分岔进入 5 周期窗口,并在  $\varepsilon = 0.793$  处发生叉式分岔,出现“缺边”,随后在  $\varepsilon = 0.818$  再次发生切分岔进入混沌态.图 11 给出了  $\varepsilon$  分别为 1, 0.8, 0.6, 0.4 的 Poincaré 映射,由图 11(a) 和 (b) 可见系统的 Poincaré 映射有一些成片的密集点,并具有一定的分形结构,说明随着阻尼损耗的减小混沌态越明显;由图 11(c) 和 (d) 可见,系统的 Poincaré 映射只有少数离散的点,表明系统的运动是周期、准周期的.

以上计算结果可以归纳如下:

1) 4.1 节分析表明,在一定的范围内,机械阻尼损耗增大时,系统混沌带右移,叉式分岔的“缺边”

方向变化, 这说明  $\varepsilon$  会影响  $\alpha$  的工作特性. 系统工作状态相同时, 在相同电流损耗情况下, 机械阻尼损耗越大, 在实际工程中需要的控制参数  $\alpha$  越大.

2) 4.2 节计算结果表明, 系统阻尼损耗越大, 系统的分岔轨道越复杂, 这与实际工程中耦合电机的工作状态是吻合的. 影响因素越多, 施加的影响越

大, 即系统的工作环境越恶劣, 系统状态的变化越复杂.

3) 当系统的电流损耗和控制参数相同时, 机械阻尼损耗越小, 系统混沌特性越显著. 这说明在实际工程中, 需要通过牺牲功率和效率来控制系统, 使系统运行稳定.

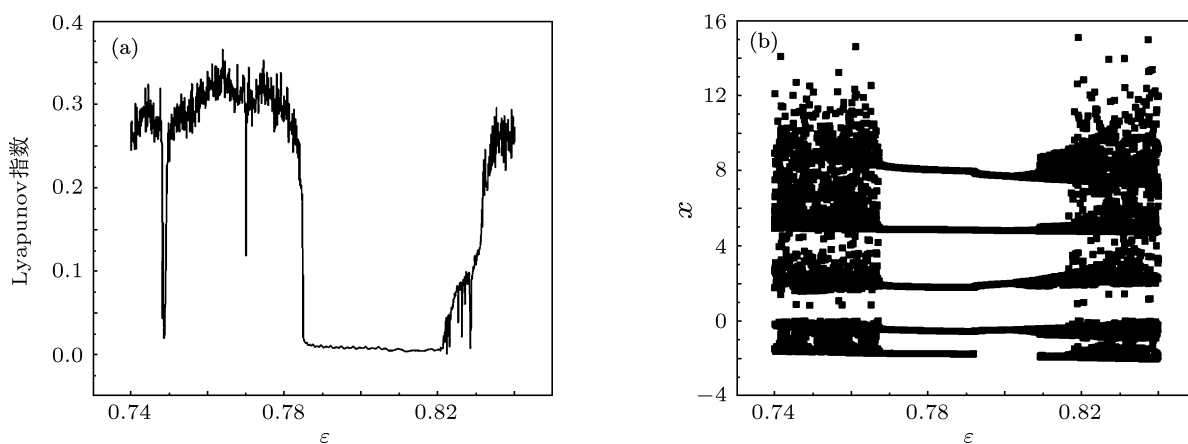


图 10 图 9 的局部放大

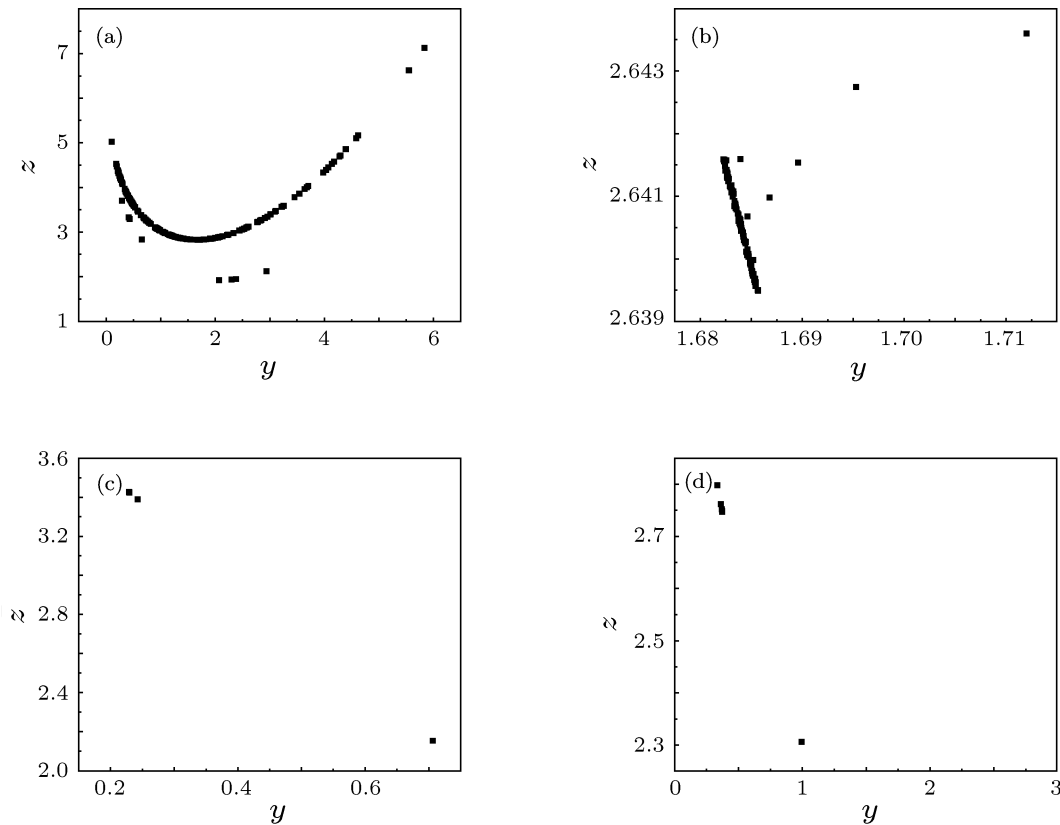


图 11 系统 (2) 在  $\alpha = 3, \mu = 2$  时的 Poincaré 映射 (a)  $\varepsilon = 1$ ; (b)  $\varepsilon = 0.8$ ; (c)  $\varepsilon = 0.6$ ; (d)  $\varepsilon = 0.4$

## 5 总结

以发电机实际工作状态为基础,在考虑机械阻尼损耗特性的基础上,推导出一种损耗型的具有双重奇怪吸引子的耦合发电机模型.与原有的变形耦合发电机模型相比,系统参数由两个变为三个,新增加的阻尼损耗参数  $\varepsilon$  对系统的动力学特性有明显的影响.分析和计算结果表明:1)机械阻尼损耗使发电机系统出现更加复杂的分岔结构,如周期窗

口发生移动、窗口结构发生变化,缺边方向发生改变;2)与不考虑机械阻尼损耗相比,阻尼损耗的增加可以减小系统的最大 Lyapunov 指数,抑制系统出现混沌,但却使得最大 Lyapunov 指数的参数空间结构变得更加复杂,实施混沌控制的难度也会增加.通过对模型参数,特别是损耗参数  $\varepsilon$  的变化特性的分析计算,将有助于深入认识耦合发电机模型的物理特性,为有效的系统控制研究奠定基础.

- 
- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130  
[2] Lorenz E N 1993 *The Essence of chaos* (Washington: University of Washington Press) p102  
[3] Kennedy M P 1993 *IEEE Trans Circ Syst.* **40** 657  
[4] Matian M A, Gumez J 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1145  
[5] Agiza H N 2002 *Chaos Solitons & Fractals* **13** 341  
[6] Agiza H N 2004 *Int. J. Modern Phys. C* **15** 873  
[7] Wang X Y, Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5083 (in Chinese) [王兴元, 武相军 2006 物理学报 **55** 5083]  
[8] Wang X Y, Wu X J 1995 *Phys. Rev. Lett.* **52** 3558  
[9] Wu S H, Sun Y, Hao J H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 010507 (in Chinese) [吴淑花, 孙毅, 郝建红, 许海波 2011 物理学报 **60** 010507]  
[10] Wang M J, Wang X Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1583 (in Chinese) [王明军, 王兴元 2010 物理学报 **59** 1583]



# The characteristics of the chaotic parameters for a loss type of modified coupled dynamic system\*

Hao Jian-Hong<sup>†</sup> Sun Na-Yan

(School of Electric and Electronic Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

(Received 19 October 2011; revised manuscript received 3 January 2012)

## Abstract

A coupled dynamo model considering two loss characteristics is proposed, which can characterize the practical situation well compared with the previous one. By numerical calculation, the Lyapunov exponential spectrum, bifurcation diagram and Poincaré mapping are given. Then the dynamic characteristics of the parameters space are analyzed. From these results, it can be found that the novel coupled dynamo model with the consideration of mechanical damping loss, has double attractors. The mechanical damping loss can suppress the chaotic occurrence and leads to more complex bifurcation characteristic appearing in the parameter space. The two kinds of the loss characteristic parameters have significant influence on the dynamic behavior of the system.

**Keywords:** coupled dynamo system, bifurcation, Lyapunov exponent, Poincaré map

**PACS:** 05.45.Gg

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10775018), and the International Science and Technology Cooperation Program (Grant Nos. 2007DFA71250, 2011DFR00780).

<sup>†</sup> E-mail: jianhonghao@ncepu.edu.cn