

时空混沌系统参量辨识律的设计与投影同步研究*

张新 吕翎[†] 范鑫 吕娜

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

(2011年12月28日收到; 2012年1月10日收到修改稿)

研究了相互耦合的时空混沌系统的参量辨识与投影同步问题. 依据 Lyapunov 定理, 设计了参量辨识律和表征耦合强度的待定函数的自适应律, 对响应系统中的未知参量进行了有效辨识, 并完成了时空混沌系统的投影同步研究. 采用具有时空混沌行为的 Burgers 方程作为实例进行了仿真分析.

关键词: 投影同步, 参量辨识, 时空混沌, Lyapunov 定理

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Pq

1 引言

混沌同步的理论研究始于 1983 年, Yamada 和 Fujisaka 提出的利用耦合实现混沌系统同步的方法^[1]. 他们通过计算耦合系统的 Lyapunov 指数作为系统混沌同步的判据, 获得了耦合混沌系统同步的条件. 1990 年, Pecora 和 Carroll 以 Newcomb 设计的电路为基础, 在电子线路实验中发现了混沌同步现象, 并提出了在实验上利用混沌同步进行加密通讯的电路方案, 向人们展示了混沌同步在应用领域诱人的发展前景^[2]. Pecora 和 Carroll 的工作引起了国际国内众多学者的广泛关注, 同时也激起了人们对混沌同步理论和应用研究的浓厚兴趣. 在此之后, 许多混沌同步方法被提出, 典型的有以 Pecora 和 Carroll 的工作为代表的驱动响应法^[2-4]; 以 Kocarev 和 Parlitz 的工作为代表的主动被动分解法^[5-8]; 由 Yamada 和 Fujisaka 率先提出的变量耦合法^[9-12]; 还有自适应法^[13,14], 变量反馈法等^[15-17].

在这些同步方法中, 变量耦合法以其原理简单、易于设计和应用在混沌同步领域显现出独特的优势. 耦合方式可以是线性耦合也可以是非线性

耦合. 对于具有较强非线性特性的混沌系统, 如高维或时空混沌系统, 采用非线性耦合同步的效果会更好. 然而关于时空混沌耦合同步的文献报道至今仍比较少见. 其原因在于高维和时空混沌系统内部的复杂性致使人们对其特性的认识远不如低维时间混沌系统那么清晰. 但人们已意识到研究时空混沌系统的同步问题是非常有实际意义的工作. 因为这类复杂系统的同步现象不仅广泛存在于自然界中, 而且更重要的是在信息处理、物理学、工程以及计算机等诸多领域具有广泛潜在的应用价值. 为此, 时空混沌系统的同步研究已成为迄今国际国内该领域学者致力于研究的主要方向之一. 另外, 由于时空混沌系统内部结构的复杂或外部因素的干扰, 常常导致其系统参量在同步过程中不稳定或不能被准确地预先确定. 因此, 在进行时空混沌同步的同时对系统中的未知参量进行有效地辨识也是十分必要的.

本文研究了相互耦合的时空混沌系统的参量辨识与投影同步问题. 仅需要从驱动系统中提取单一状态变量信号与响应系统耦合, 使驱动和响应系统建立关联, 就可以在响应系统所有参量未知的情况下, 依据 Lyapunov 定理, 通过设计参量辨识律和表征耦合强度的待定函数的自适应律, 对响应系统

* 辽宁省自然科学基金(批准号:20082147)和辽宁省教育厅创新团队计划(批准号:2008T108)资助的课题,

[†] E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

中的未知参量进行有效辨识, 并完成时空混沌系统的投影同步研究. 采用具有时空混沌行为的 Burgers 方程作为实例进行了仿真分析.

2 耦合投影同步机理

考虑下列时空混沌系统:

$$\frac{\partial x(r, t)}{\partial t} = f(x(r, t), k), \quad (1)$$

其中 r, t 为系统的空间和时间变量, $x(r, t) \in R^n$ 为系统的状态变量, $f: R^n \rightarrow R^n, k$ 是系统参量.

取两个时空混沌系统 (1) 分别作为驱动系统和响应系统, 并假定响应系统中的参量未知. 从驱动系统中提取单一状态变量信号按一定比例耦合到响应系统中, 通过耦合使驱动和响应系统建立关联

$$\frac{\partial x_i(r, t)}{\partial t} = f_i(x(r, t), k_i^d), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i(r, t)}{\partial t} &= f_i(y(r, t), k_i^r) + \varphi_i(\beta x_i(r, t) - y_i(r, t)) \\ &= F_i(y(r, t)) + \sum_{j=1}^m k_{ij}^r G_{ij}(y(r, t)) \\ &\quad + \varphi_i(\beta x_i(r, t) - y_i(r, t)), \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

这里, 耦合项 $\varphi_i(\beta x_i(r, t) - y_i(r, t))$ 中的 β 为比例因子, φ_i 为表征耦合强度的待定函数. 且 $f(x(r, t), k)$ 是连续函数, 满足 Lipschitz 条件, 即对于实数 $\xi_i > 0$, 下列关系成立:

$$\begin{aligned} &|f_i(y(r, t), k_i^r) - f_i(x(r, t), k_i^d)| \\ &\leq \xi_i |y_i(r, t) - x_i(r, t)|. \end{aligned} \quad (4)$$

为了使驱动和响应系统 (2) 和 (3) 达到投影同步, 首先定义两系统状态变量之间的误差

$$e_i(r, t) = y_i(r, t) - \beta x_i(r, t), \quad (5)$$

可以进一步得到误差演化方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_i(r, t)}{\partial t} &= F_i(y(r, t)) + \sum_{j=1}^m k_{ij}^r G_{ij}(y(r, t)) \\ &\quad + \varphi_i(\beta x_i(r, t) - y_i(r, t)) \\ &\quad - \beta f_i(x(r, t), k_i^d). \end{aligned} \quad (6)$$

构造下列形式的 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^2(r, t) + \frac{1}{2\eta} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (k_{ij}^r - \hat{k}_{ij}^r)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\varphi_i - L_i)^2, \quad (7)$$

其中 \hat{k}_{ij}^r 是未知参量 k_{ij}^r 的辨识量, η 和 L_i 是大于零的实数.

考虑到 Lipschitz 条件以及误差演化方程 (6), 则 Lyapunov 函数 V 的导数可以表示成为下列形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n e_i(r, t) \frac{\partial e_i(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (k_{ij}^r - \hat{k}_{ij}^r) \\ &\quad \times \left(-\frac{\partial \hat{k}_{ij}^r}{\partial t} \right) + \sum_{i=1}^n (\varphi_i - L_i) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(r, t) \left[F_i(y(r, t)) + \sum_{j=1}^m k_{ij}^r G_{ij} \right. \\ &\quad \times (y(r, t)) + \varphi_i(\beta x_i(r, t) - y_i(r, t)) \\ &\quad \left. - \beta f_i(x(r, t), k_i^d) \right] + \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (k_{ij}^r - \hat{k}_{ij}^r) \\ &\quad \times \left(-\frac{\partial \hat{k}_{ij}^r}{\partial t} \right) + \sum_{i=1}^n (\varphi_i - L_i) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \\ &\leq \sum_{i=1}^n e_i(r, t) [(\xi_i - \varphi_i) e_i(r, t) \\ &\quad - (1 - \beta)(\xi_i y_i(r, t) - f_i(y(r, t), k_i^r))] \\ &\quad + \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (k_{ij}^r - \hat{k}_{ij}^r) \left(-\frac{\partial \hat{k}_{ij}^r}{\partial t} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (\varphi_i - L_i) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}. \end{aligned} \quad (8)$$

若设计参量辨识律

$$\frac{\partial \hat{k}_{ij}^r}{\partial t} = \eta(1 - \beta) e_i(r, t) G_{ij}(y(r, t)), \quad (9)$$

表征耦合强度的待定函数 φ_i 的自适应律为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} &= e_i^2(r, t) + (1 - \beta) e_i(r, t) [\xi_i y_i(r, t) \\ &\quad - f_i(y(r, t), \hat{k}_i^r)] / (\varphi_i - L_i). \end{aligned} \quad (10)$$

(8) 式可以表示为下列形式:

$$\frac{\partial V}{\partial t} \leq \sum_{i=1}^n (\xi_i - L_i) e_i^2(r, t). \quad (11)$$

只要上式中存在

$$\xi_i - L_i < 0, \quad (12)$$

则必有

$$\frac{\partial V}{\partial t} < 0. \quad (13)$$

依据 Lyapunov 定理, 此时, 两个系统的投影同步得以实现. 同时, 根据 (9) 式, 未知参量将得到有效辨识.

3 仿真分析

采用能够描述湍流、传热等诸多实际物理过程的一个普适性的对流扩散方程, 即 Burgers 方程进行仿真分析. 一维 Burgers 方程的线性化模型具有下列形式 [18]:

$$\frac{\partial x(r, t)}{\partial t} = -k \frac{\partial x(r, t)}{\partial r} + \nabla^2 x(r, t), \quad (14)$$

其中 k 为系统参量, $x(r, t)$ 为系统的状态变量, $\nabla^2 = \partial^2 / \partial r^2$.

对于一维 Burgers 方程, 我们通过计算最大 Lyapunov 指数来确定系统运动轨迹的发散和收敛程度, 以此判定系统的动力学行为. 选取系统尺寸 $L = 100$, 采用周期性边界条件 $x(r, t) = x(r + L, t)$, 作出系统的最大 Lyapunov 指数随参量 k 的演化关系如图 1 所示. 图 1 显示 Burgers 方程的最大 Lyapunov 指数存在大于零的区域, 表明参量在该区域时系统处于时空混沌态. 我们在最大 Lyapunov 指数大于零的区域取参数值 $k = 4$, 作出此时系统状态变量的时空演化如图 2 所示.

仿真模拟时, 取两个 Burgers 方程 (14) 进行耦合, 驱动和响应系统分别为

$$\frac{\partial x(r, t)}{\partial t} = -k^d \frac{\partial x(r, t)}{\partial r} + \nabla^2 x(r, t), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(r, t)}{\partial t} = & -k^r \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} + \nabla^2 y(r, t) \\ & + \varphi(\beta x(r, t) - y(r, t)), \end{aligned} \quad (16)$$

响应系统中的参量 k^r 为未知参量. 根据 (9) 和 (10) 式, 可以确定参量辨识律和表征耦合强度的待定函数的自适应律为

$$\frac{\partial \hat{k}^r}{\partial t} = -\eta(1 - \beta)e(r, t) \frac{\partial y(r, t)}{\partial r}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = & e^2(r, t) + (1 - \beta)e(r, t) \left[\xi y(r, t) \right. \\ & \left. + \hat{k}^r \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} - \nabla^2 y(r, t) \right] / (\varphi - L). \end{aligned} \quad (18)$$

任取投影同步比例因子 $\beta = 0.5$, 参量 $\eta = 1$, $\xi = 0.01$, $L = 1$, 在时间序列 5 秒处开始实施耦合, 仿真模拟两系统状态变量之间的误差 $e(r, t) = y(r, t) - \beta x(r, t)$ 随时空的演化规律

如图 3 所示. 图 3 显示, 由于驱动和响应系统耦合前状态变量所取的初始值不同, 因此, 其误差 $e(r, t)$ 随时空的演化有明显的差异. 但在第 5 秒耦合连接后, 经过一个短暂的过渡过程, 驱动和响应系统状态变量之间的误差稳定地趋于零, 投影同步得以实现. 图 4 显示的是响应系统中未知参量 k^r 的辨识过程. 可以看到, 耦合驱动后, 在所取的空间区域 $(0, L)$ 内, 对于任意的空间格点坐标 (例如图中取第 80 个格点 $r = 80$), 参量辨识曲线均从最初的任意值逐渐趋于定值 4, 说明运用参量辨识律 (9) 式可以有效地辨识响应系统中的未知参量.

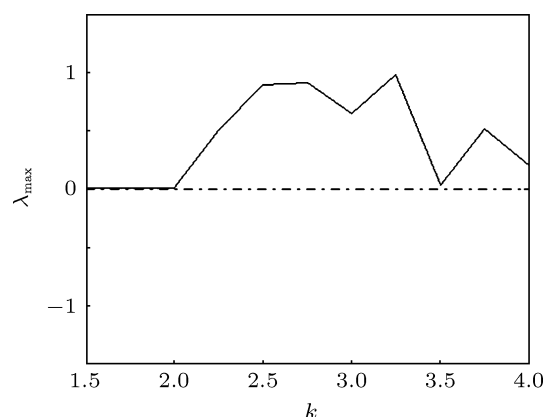


图 1 Lyapunov 指数随参量 k 的演化

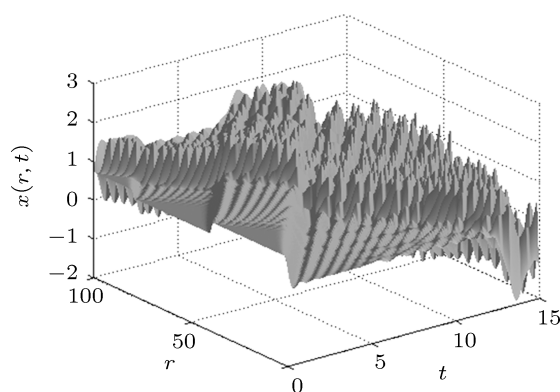


图 2 状态变量 $x(r, t)$ 的时空演化

保持系统其他参量数值不变, 任取投影同步比例因子 $\beta = 1.5$, 并改变驱动和响应系统的初始值, 重复上述仿真模拟过程, 发现其投影同步性能依然十分稳定. 此时, 两系统状态变量之间的误差随时空的演化规律以及响应系统中未知参量 k^r 的辨识过程如图 5 和图 6 所示.

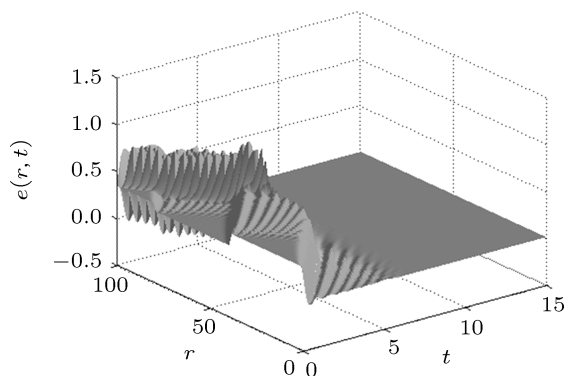


图3 误差变量 $e(r, t)$ 的时空演化 ($\beta = 0.5$)

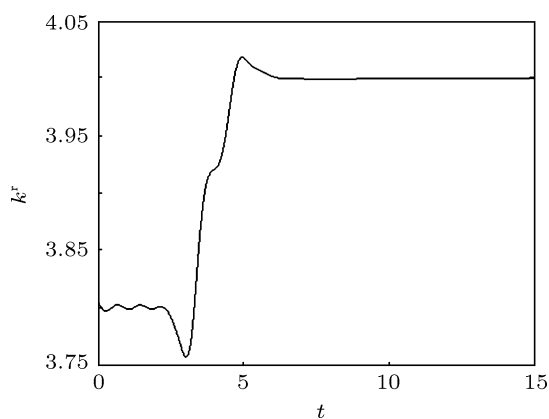


图4 未知参量 k^r 的辨识过程 ($\beta = 0.5, r = 80$)

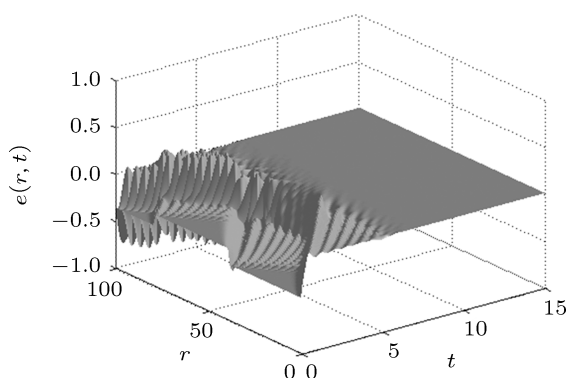


图5 误差变量 $e(r, t)$ 的时空演化 ($\beta = 1.5$)

仿真模拟还发现, 参量 η, ξ 以及 L 的数值选取也十分灵活. 只要取 η 是大于零的实数, ξ 和 L 满足条件 (12) 的任何值, 均可以实现未知参量 k^r 的有效辨识以及时空混沌系统的投影同步.

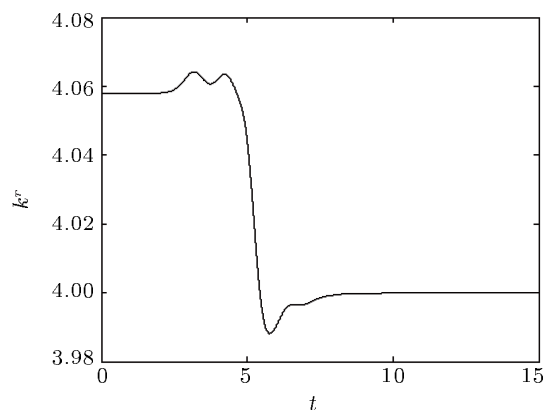


图6 未知参量 k^r 的辨识过程 ($\beta = 1.5, r = 60$)

4 结论

研究了相互耦合的时空混沌系统的参量辨识与投影同步问题. 依据 Lyapunov 定理, 设计了参量辨识律和表征耦合强度的待定函数的自适应律, 对响应系统中的未知参量进行了有效辨识, 并完成了时空混沌系统的投影同步研究. 采用具有时空混沌行为的 Burgers 方程作为实例进行了仿真分析. 结果表明, 驱动和响应系统耦合后, 经过一个短暂的过渡过程, 未知参量的辨识量 \hat{k}^r 能准确地渐近到参量 k^r 的实际值 4, 未知参量得以确定. 同时, 两个相互耦合的 Burgers 方程达到了投影同步. 研究还发现, 参量 η, ξ 以及 L 的数值选取只要取 η 是大于零的实数, ξ 和 L 满足条件 (12) 的任何值, 响应系统中的未知参量均可以被有效辨识并得到稳定的投影同步结果.

[1] Yamada T, Fujisaka H 1983 *Prog. Theor. Phys.* **70** 1240
 [2] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
 [3] Fu S H, Pei L J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5985 (in Chinese) [付士慧, 裴利军 2010 物理学报 **59** 5985]
 [4] Zhang L P, Jiang H B 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** 2027

[5] Kocarev L, Parlitz U, Brown R 2000 *Phys. Rev. E* **61** 3716
 [6] Chen H K 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **25** 1049
 [7] Wu X F, Chen G R, Cai J P 2007 *Physica D* **229** 52
 [8] Liu F C, Song J Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4729 (in Chinese) [刘福才, 宋佳秋 2008 物理学报 **57** 4729]
 [9] Lü J H, Zhou T S, Zhou S C 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **14**

529

- [10] Brandt S F, Dellen B K, Wessel R 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 034104
- [11] Wang X F, Xia G Q, Wu Z M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4669 (in Chinese) [王小发, 夏光琼, 吴正茂 2009 物理学报 **58** 4669]
- [12] Li X J, Xu Z Y, Xie Q C, Wang B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1532 (in Chinese) [李小娟, 徐振源, 谢青春, 王兵 2010 物理学报 **59** 1532]
- [13] Park J H 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **25** 333
- [14] Yassen M T 2006 *Phys. Lett. A* **350** 36
- [15] Bowong S 2007 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **12** 976
- [16] Huang L L, Feng R P, Wang M 2004 *Phys. Lett. A* **320** 271
- [17] Yu W G 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** 2880
- [18] Zhu Q Y, Ma Y W 2000 *Comput. Mech.* **17** 379 (in Chinese) [朱庆勇, 马延文 2000 计算力学学报 **17** 379]

Design of parameter identification law and studies on projective synchronization of spatiotemporal chaotic system*

Zhang Xin Lü Ling[†] Fan Xin Lü Na

(College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

(Received 28 December 2011; revised manuscript received 10 January 2012)

Abstract

The parameter identification and the projective synchronization between spatiotemporal chaotic systems are studied. The parameter identification law and the adaptive law of undetermined function representing the coupling strength are designed based on Lyapunov theorem. Not only the unknown parameters in responses system are identified, but also projective synchronization between spatiotemporal chaotic systems is realized. The Burgers equation with spatiotemporal chaos behavior is further taken as an example of simulation analysis.

Keywords: projective synchronization, parameter identification, spatiotemporal chaos, Lyapunov theorem

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Pq

* Project supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China(Grant No. 20082147), and the Innovative Team Program of Liaoning Educational Committee, China (Grant No. 2008T108).

[†] E-mail: luling1960@yahoo.com.cn