

一类扰动发展方程近似解*

杜增吉^{1)†} 莫嘉琪²⁾

1) (江苏师范大学数学科学学院, 徐州 221116)

2) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

(2011年11月25日收到; 2011年12月31日收到修改稿)

采用了一个简单而有效的技巧, 研究了一类扰动发展方程. 首先引入求解一个相应典型方程的行波孤波解. 然后利用渐近方法得到了原扰动发展方程的近似解. 利用泛函分析的不动点定理, 指出了近似解级数的收敛性, 并讨论了近似解的精度.

关键词: 非线性, 发展方程, 渐近方法

PACS: 52.35.Mw

1 引言

发展方程在非线性科学研究中是一个很重要的部分, 它有广泛的应用^[1,2]. 近来在求解非线性问题中显现了许多新的方法. 例如双曲正切法, 齐次平衡法, Jacobi 椭圆函数法和辅助函数法等等. 这些方法已经在散射光波, 激波, 量子力学, 大气物理等问题中应用^[3-7]. 孤波理论描述的是一类复杂的自然现象, 我们需要用基本方法去简化它. 许多近似求解方法也应运而生并不断地改进, 如边界层法, 匹配法, 多重尺度法等^[8-11]. 作者等也利用渐近方法研究了一类孤波等非线性问题^[12-18]. 本文是考虑一类物理模型中的扰动 Zakharov-Kuznetsov 发展方程 (Z-K 发展方程). 利用改进的渐近方法简单而有效地得到了相应的孤波渐近解^[7,11].

2 扰动 Z-K 发展方程

考虑如下扰动 Z-K 发展方程^[6]:

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xy} = f(u), \quad (1)$$

其中 α, β 为常数, f 为一个扰动函数, 它为其自

变量相应的区域内的有界解析函数. 扰动 Z-K 发展方程 (1) 在流体力学, 大气物理, 航天学, 应用化学和冶金工程中都有具体的应用, 特别在等离子物理, 原子物理, 固体物理等凝聚态物理问题中有其广泛的应用.

作行波变换

$$s = ax + by + ct, \quad (2)$$

其中 a, b, c 为常数. 于是方程 (1) 为行波方程

$$cu_s + auu_s + a^2(a\alpha + b\beta)u_{sss} = f(u). \quad (3)$$

现先考虑如下非扰动 Z-K 方程:

$$cu_s + auu_s + a^2(a\alpha + b\beta)u_{sss} = 0. \quad (4)$$

利用特殊的映射技巧, 我们来求出方程 (4) 的行波解. 设

$$u(s) = k_0 + k_1 v(s) + k_2 v^2(s), \quad (5)$$

其中 k_0, k_1, k_2 为待定常数, 而 $\sigma > 0$ 和 $v(s)$ 满足方程

$$\frac{dv}{ds} = v^2 - \sigma^2. \quad (6)$$

显然方程 (6) 具有如下孤波解:

$$v_1(s) = -\sigma \tanh(\sigma s), \quad \sigma > 0, \quad (7)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11071205, 11101349), 安徽高校省级自然科学基金项目 (批准号: KJ2011A135) 和江苏省自然科学基金 (批准号: BK2011042) 资助课题.

† E-mail: duzengji@163.com

$$v_2(s) = -\sigma \coth(\sigma s), \quad \sigma > 0. \quad (8)$$

由 (5), (6) 式, 有

$$u_s = (2k_2 v + k_1)(v^2 - \sigma^2), \quad (9)$$

$$u_{ss} = [2k_1 v + 2k_2(3v^2 - \sigma^2)](v^2 - \sigma^2), \quad (10)$$

$$u_{sss} = [2k_1(2v^2 - \sigma^2) + 3k_2(9v^3 - 5\sigma^2 v)] \times (v^2 - \sigma^2). \quad (11)$$

将 (9)—(11) 式代入方程 (4), 合并关于 $v^i(v^2 - \sigma^2)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) 相同的项, 并令方程两边的同类项的系数相等, 可进一步得到

$$k_0 = -\frac{15}{27}\sigma^2 - \frac{c}{a}, \quad k_1 = 0, \\ k_2 = -\frac{27}{2}a(a\alpha + b\beta). \quad (12)$$

将 (12) 式代入 (5) 式, 并注意到 (7) 和 (8) 式, 我们便得到 Z-K 方程 (4) 的行波解

$$U_1(s) = -\left(\frac{27}{2}a(a\alpha + b\beta)\sigma^2 \tanh^2(\sigma s) + \frac{15}{27}\sigma^2 + \frac{c}{a}\right), \quad \sigma > 0, \quad (13)$$

$$U_2(s) = -\left(\frac{27}{2}a(a\alpha + b\beta)\sigma^2 \coth^2(\sigma s) + \frac{15}{27}\sigma^2 + \frac{c}{a}\right), \quad \sigma > 0. \quad (14)$$

3 扰动 Z-K 方程的渐近解

注意到扰动项 $f(u)$, 一般, 方程 (3) 不具有初等函数形式的精确解. 故我们要求出其渐近解.

为了得到渐近孤波解, 引入如下映射 $H(u, r)R \times I \rightarrow R$

$$H(u, r) = Lu - L\tilde{u}_0 + r[L\tilde{u}_0 + auu_s - f(u)], \quad (15)$$

其中 $R = (-\infty, +\infty)$, $I = [0, 1]$, r 为人工参数; \tilde{u}_0 为初始近似解, 它将在下面决定; 而线性算子 L 为

$$Lu = cu_s + a^2(a\alpha + b\beta)u_{sss}.$$

显然, 由 (15) 式, $H(u, 1) = 0$ 与方程 (3) 相同. 于是方程 (3) 的解 $u(\xi)$ 就是 $H(u, r) = 0$ 的解当 $r \rightarrow 1$ 的情形.

设

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(s)r^i. \quad (16)$$

注意到映射 (15), 将 (16) 式代入 $H(u, r) = 0$, 按 r 展开非线性项并将方程两边关于 r 的同次幂的系数相等, 我们可依次得解 $u_n(\xi)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 由 r 的零次幂得

$$L(u_0) = L(\tilde{u}_0). \quad (17)$$

选取初始近似 \tilde{u}_0 为方程 (4) 的行波孤波解 $U_1(s)$, 由 (13) 式, 我们有

$$u_0(s) = -\left(\frac{27}{2}a(a\alpha + b\beta)\sigma^2 \tanh^2(\sigma s) + \frac{15}{27}\sigma^2 + \frac{c}{a}\right), \quad \sigma > 0. \quad (18)$$

在 $H(u, s) = 0$ 中, 由 r 的一次幂得

$$L(u_1) = f(u_0). \quad (19)$$

不难得到线性方程 (19) 在零初值下的解为

$$u_1(s) = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^s \int_0^{\xi_1} \left[f - \left(\frac{27}{2}a(a\alpha + b\beta) \times \sigma^2 \tanh^2(\sigma\eta) + \frac{15}{27}\sigma^2 + \frac{c}{a}\right) \times [\cos \omega(\xi_1 - \eta)] d\eta d\xi_1, \quad (20)$$

其中 $\omega = \left[\frac{c}{a^2(a\alpha + b\beta)}\right]^{1/2}$.

在 $H(u, r) = 0$ 中, 由 r 的二次幂得

$$L(u_2) = -a(u_0 u_{1s} + u_{0s} u_1) + F(u_0, u_1), \quad (21)$$

其中 u_0 和 u_1 分别由 (18) 和 (20) 式表示, 而

$$F(u_0, u_1) = \left[\frac{\partial}{\partial r} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i r^i\right)\right]_{r=0}.$$

同样, 由线性方程 (21) 在零初值下的解 u_2 为

$$u_2(s) = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^s \int_0^{\xi_1} [F(u_0(\eta), u_1(\eta))] \times [\cos \omega(\xi_1 - \eta)] d\eta d\xi_1. \quad (22)$$

因此, 由 (18), (20), (22) 和 (16) 式, 以及注意到变换 (2), 扰动 Z-K 方程 (1) 的二次近似孤波解 $u_{2\text{hom}}(x, y, t)$ 为

$$u_{2\text{hom}}(x, y, t) = -\left(\frac{27}{2}a(a\alpha + b\beta)\sigma^2 \tanh^2 \sigma(as + by + ct) + \frac{15}{27}\sigma^2 + \frac{c}{a}\right) + \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{ax+by+ct} \int_0^{\xi_1} \left[f\left(-\left(\frac{27}{2}a(a\alpha + b\beta)\sigma^2 \tanh^2(\sigma\eta) + \frac{15}{27}\sigma^2 + \frac{c}{a}\right) \times [\cos \omega(\xi_1 - \eta)]\right) \right] d\eta d\xi_1.$$

$$\begin{aligned}
 & + b\beta) \sigma^2 \tanh^2(\sigma\eta) + \frac{15}{27} \sigma^2 + \frac{c}{a} \Big) \Big] \\
 & \times [\cos \omega(\xi_1 - \eta)] d\eta d\xi_1 \\
 & + \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{ax+by+ct} \int_0^{\xi_1} [F(u_0(\eta), \\
 & u_1(\eta))] [\cos \omega(\xi_1 - \eta)] d\eta d\xi_1. \quad (23)
 \end{aligned}$$

利用映射 (15), 我们还能得到扰动 Z-K 发展方程 (1) 的更高次的渐近行波孤波解.

在方程 (1) 前述假设并选取初始近似 u_0 下, 利用不动点原理^[17], 非线性扰动 Z-K 发展方程 (1) 的解为 $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y, t)$. 这时我们能

进一步知道^[11] $u_{\text{exa}}(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y, t)$ 为非线性扰动 Z-K 发展方程 (1) 的精确解.

注: 当选取初始近似 \tilde{u}_0 为方程 (4) 的行波孤波解 $U_2(s)$, 使用同样的方法, 我们能得到另一组渐近行波孤波解.

4 例

我们仅考虑一个特殊的非线性微扰 Z-K 发展方程. 设微扰项为 $f(u) = \varepsilon \exp(-u^2)$, 其中 ε 为小的正参数, 这时非线性扰动 Z-K 发展方程 (1) 为

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xy} = \varepsilon \exp(-u^2). \quad (24)$$

由 (18) 式, 选取方程 (24) 的零次近似孤波解为

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) = - \left(\frac{27}{2} a(a\alpha + b\beta) \sigma^2 \tanh^2(\sigma(ax + by \right. \\
 \left. + ct)) + \frac{15}{27} \sigma^2 + \frac{c}{a} \right), \quad \sigma > 0. \quad (25)
 \end{aligned}$$

由 (20) 和 (25) 式, 我们能得到方程 (24) 的一次近似孤波解 $u_{1\text{hom}}(x, y, t)$ 为

$$\begin{aligned}
 & u_{1\text{hom}}(x, y, t) \\
 & = - \left(\frac{27}{2} a(a\alpha + b\beta) \sigma^2 \tanh^2(\sigma(ax \right. \\
 & \left. + by + ct)) + \frac{15}{27} \sigma^2 + \frac{c}{a} \right) + \frac{\varepsilon}{\omega} \\
 & \times \int_{-\infty}^{ax+by+ct} \int_0^{\xi_1} \left[\exp \left(- \left(\frac{27}{2} a(a\alpha \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + b\beta) \sigma^2 \tanh^2(\sigma\eta) \right) + \frac{15}{27} \sigma^2 + \frac{c}{a} \right) \Big]^2 \\
 & \times [\cos \omega(\xi_1 - \eta)] d\eta d\xi_1. \quad (26)
 \end{aligned}$$

由 (22) 和 (26) 式, 我们能得到方程 (24) 的二次近似孤波解 $u_{2\text{hom}}(x, y, t)$ 为

$$\begin{aligned}
 & u_{2\text{hom}}(x, y, t) \\
 & = - \left(\frac{27}{2} a(a\alpha + b\beta) \sigma^2 \tanh^2(\sigma(ax \right. \\
 & \left. + by + ct)) + \frac{15}{27} \sigma^2 + \frac{c}{a} \right) + \frac{\varepsilon}{\omega} \\
 & \times \int_{-\infty}^{ax+by+ct} \int_0^{\xi_1} \left[\exp \left(- \left(\frac{27}{2} a(a\alpha \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + b\beta) \sigma^2 \tanh^2(\sigma\eta) \right) + \frac{15}{27} \sigma^2 + \frac{c}{a} \right) \Big]^2 \\
 & \times [\cos \omega(\xi_1 - \eta)] d\eta d\xi_1,
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 u_1(\eta) = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{\eta} \int_0^{\xi_1} \left[f \left(- \left(\frac{27}{2} a(a\alpha \right. \right. \right. \\
 \left. \left. + b\beta) \sigma^2 \tanh^2(\sigma\eta_1) \right) + \frac{15}{27} \sigma^2 + \frac{c}{a} \right) \Big] \\
 \times [\cos \omega(\xi_1 - \eta_1)] d\eta_1 d\xi_1.
 \end{aligned}$$

利用映射 (15), 我们还能得到微扰 Z-K 发展方程 (24) 的更高次的渐近行波孤波解.

上例, 选取参数 $\alpha = \beta = 1, \varepsilon = 0.2$ 时, Z-K 发展方程 (24), 可得到在初值为 $u(0) = u_s(0) = u_{ss}(0) = 1, s = x + y + t$ 下的模拟精确解 $u_{\text{exa}}(s)$ 和渐近解 $u_{\text{asy}}(s)$ 的图形和数值的比较 (见图 1 和表 1).

由上述的曲线图形和数值表的比较可以看出, 本文提出的方法所求的模型渐近解具有较好的精度.

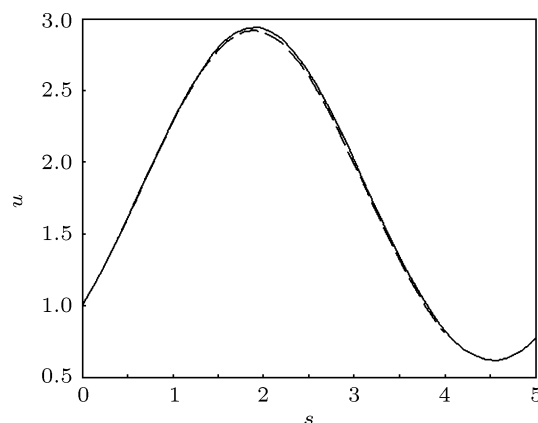


图 1 模拟精确解 u_{exa} (实线) 与渐近解 u_{asy} (虚线) 的比较 ($s = x + y + t$)

表1 模拟精确解 u_{exa} 与渐近解 u_{asy} 的数值比较 ($s = x + y + t$)

s	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
u_{exa}	1.00	1.37	2.04	2.64	2.93	2.85	2.53	2.08	1.56	0.99	0.79
u_{asy}	1.00	1.34	2.02	2.62	2.91	2.82	2.50	1.99	1.47	0.98	0.80

5 渐近解的余项估计

设 $u_{\text{exa}}(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, y, t)$ 为方程 (24) 利用本文方法得到的一个精确解. 现估计误差 $u_{\text{exa}} - u_{2\text{hom}}$. 我们首先有估计式

$$\begin{aligned} &L(u_{\text{exa}} - u_{\text{hom}}) \\ &= (u_{\text{exa}} - u_{\text{hom}})_t + \alpha(u_{\text{exa}} - u_{\text{hom}})_{xx} \\ &\quad + \beta(u_{\text{exa}} - u_{\text{hom}})_{xy} \\ &= (u_{\text{exa}} - u_{\text{hom}})_s + a^2(a\alpha + b\beta)(u_{\text{exa}} - u_{\text{hom}})_{sss} \\ &= c(u_{\text{exa}})_s + a^2(a\alpha + b\beta)(u_{\text{exa}})_{sss} \\ &\quad - \sum_{i=0}^2 (u_{is\xi} + a^2(a\alpha + b\beta)u_{isss}) \\ &= -a \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right)_s \\ &\quad + \varepsilon \exp \left(- \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right)^2 \right) \\ &\quad - [au_0u_{0s} + \varepsilon \exp(-u_0^2)] \\ &\quad + [-a(u_0u_{1s} + u_{0s}u_1)] \\ &\quad + 2\varepsilon u_0u_1 \exp(-u_0^2) \end{aligned}$$

$$= O(\varepsilon^2), \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

选取任意常数, 使得

$$u_{\text{exp}}(s)|_{s=0} = u_{2\text{hom}}(s)|_{s=0},$$

利用不动点原理 [19], 我们有

$$u_{\text{exa}} - u_{2\text{hom}} = O(\varepsilon^2), \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

于是, 我们知道利用渐近方法得到的近似解 $u_{2\text{hom}}(x, y, t)$ 具有较好的精确度.

6 结论

发展方程论描述的是一类复杂的物理问题. 我们往往需要用近似方法去求解它. 渐近方法就是一个较好的简单而有效的方法. 这个方法是一个近似的解析方法, 它不同于一般的模拟方法. 由渐近方法得到解的展开式还能继续进行解析运算. 因此, 由 (23) 式, 我们还能进一步研究孤波解的定量和定性等方面的性态. 本文我们选取初始近似扰动 Z-K 发展方程 (1) 初始近似是相应的发展方程 (4) 的一个孤波解, 它能较快地得到需要精度的近似解.

[1] Ma Songhua, Qiang Jiye, Fang Jianping, Annihilation 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 662
 [2] Parkes J 2008 *Chaos Solitons Fractals* **38** 154
 [3] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1527
 [4] Yang X D, Ruan H Y, Lou S Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 961
 [5] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4337
 [6] Yang Z, Ma S H, Fang J P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040508 (in Chinese) [杨征, 马松华, 方建平 2011 物理学报 **60** 040508]
 [7] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2990 (in Chinese) [方建平, 郑春龙, 朱加民 2005 物理学报 **54** 290]
 [8] Bartier Jean-Philippe 2006 *Asymptotic Anal.* **46** 325
 [9] Libre J, da Silva P R, Teixeira M A 2007 *J. Dyn. Differ. Equations* **19** 309
 [10] Guarguaglini F R, Natalini R 2007 *Commun. Partial Differ. Equations* **32** 163
 [11] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York, CRC Press)
 [12] Mo J Q 2009 *Chin Phys. Lett.* **26** 060202
 [13] Mo J Q 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 440
 [14] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080202 (in Chinese) [莫嘉琪, 林万涛, 林一骅 2011 物理学报 **60** 080202]
 [15] Mo J Q 2009 *Science in China, Ser G* **39** 568
 [16] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3624
 [17] Mo J Q, Chen X F 2010 *Chin. Phys. B* **19** 100203
 [18] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 070205
 [19] de Jager E M, Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation*, (Amsterdam: North-Holland Publishing)

Approximate solution for a class of the disturbed evolution equation*

Du Zeng-Ji^{1)†} Mo Jia-Qi²⁾

1) (*School of Mathematical Sciences, Jiangsu Normal University, Xuzhou 221116, China*)

2) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241003, China*)

(Received 25 November 2011; revised manuscript received 31 December 2011)

Abstract

A class of disturbed evolution equation is considered by a simple and valid technique. We first introduce the traveling solitary wave solution of a corresponding typical differential equation, and then use the asymptotic method to obtain the approximate solution for an original disturbed evolution equation. And we point out that the series of approximate solution is convergent and the precision of the approximate solution is discussed by using the fixed point theorem for the functional analysis.

Keywords: nonlinear, evolution equation, asymptotic method

PACS: 52.35.Mw

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11071205, 11101349), the Natural Science Foundation from the Education Bureau of Anhui Province, China (Grant No. KJ2011A135), and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2011042).

† E-mail: duzengji@163.com