

## 斜磁场作用下碰撞电负性等离子体鞘层的玻姆判据\*

邱明辉 刘惠平 邹秀†

(大连交通大学理学院, 大连 116028)

(2011年10月7日收到; 2011年11月3日收到修改稿)

采用流体模型研究了外加斜磁场作用下的碰撞电负性等离子体鞘层的玻姆判据, 讨论了负离子和磁场对鞘层玻姆判据的影响. 研究表明: 在电负性鞘层中, 正离子更容易进入鞘层, 负离子的存在只能影响离子马赫数取值的下限; 而外加磁场可以使离子马赫数的取值范围整体发生移动.

**关键词:** 等离子体, 磁鞘, 玻姆判据, 电负性

**PACS:** 52.40.Kh, 52.25.Xz, 52.65.-y

## 1 引言

在等离子体材料表面改性、薄膜合成以及刻蚀等工艺过程中, 等离子体鞘层的特性直接影响着加工产品的质量, 而玻姆判据作为等离子体鞘层的边界条件一直是个研究热点. 含有电子、正离子、中性粒子和大量负离子的电负性等离子体被广泛应用于新材料制造、气体放电、等离子体化工、辅助加工等工艺<sup>[1]</sup>, 因此研究电负性等离子体的鞘层特性具有极其重要的意义.

从20世纪90年代开始, 对电负性等离子体鞘层特性以及鞘层玻姆判据的研究工作<sup>[1-14]</sup>陆续开展起来. 在研究过程中, 人们假设在低气压下, 电子和负离子均满足玻尔兹曼分布<sup>[7-10]</sup>. 2009年 Ghim 等<sup>[11]</sup>通过实验证明了负离子的确是遵从玻尔兹曼分布. 在此前提下, Palop<sup>[5,6]</sup>, Wang<sup>[12]</sup>和 Gong<sup>[13]</sup>等分别研究了电负性鞘层的玻姆判据, 研究表明等离子体中负离子与正离子的密度比及电子与负离子的温度比越大, 正离子到达鞘层边界的临界速度就越小. 2011年赵晓云等<sup>[14]</sup>也研究了负离子对无碰撞等离子体鞘层的玻姆判据的影响, 认为离子马赫数的临界值随负离子带电量的增加而减小. 这些研究工作仅仅给出了电负性等离子体鞘层玻姆判据的下限, 也就是正离子进入鞘层时

需要的最小速度. 2003年 Liu 等<sup>[15]</sup>使用双流体模型研究了碰撞等离子体鞘层的玻姆判据, 结果显示在考虑中性粒子和离子碰撞的情况下, 玻姆判据除了具有下限外还应具有上限. 2010年 Ghomi 等<sup>[16]</sup>研究了无外加磁场作用下的电负性等离子体鞘层的玻姆判据, 得到了鞘层判据的下限和上限.

对外加斜磁场作用下的等离子体鞘层的玻姆判据, Chodura<sup>[17]</sup>, Riemann<sup>[18]</sup>和 Stangeby<sup>[19]</sup>等人的研究结论是: 进入鞘层时离子速度平行磁场的分量必须等于或大于离子声速. 2010年, 我们<sup>[20]</sup>研究了外加斜磁场作用下的碰撞等离子体鞘层的玻姆判据, 讨论了磁场对碰撞鞘层玻姆判据的影响. 在此工作基础上, 本文建立一个外加斜磁场作用下的碰撞电负性等离子体鞘层模型, 理论推导鞘层的玻姆判据, 然后讨论负离子和磁场对鞘层玻姆判据的影响, 所得到的结果对理论和实验工作具有一定的参考价值.

## 2 鞘层模型和基本方程

首先建立一个碰撞电负性等离子体鞘层模型. 恒定的外加斜磁场位于  $x-z$  平面内, 与  $x$  轴的夹角为  $\theta$ . 考虑到平板鞘层的厚度远远小于基板的尺度, 鞘层中的各个物理量在  $x$  轴方向上的变化梯度

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11005015, 10605008) 和辽宁省教育厅 (批准号: L2011069) 资助的课题.

† E-mail: zouxu@djtu.edu.cn

远大于其他方向, 可以将等离子体鞘层模型看成是沿  $x$  轴方向的一维模型, 如图 1 所示. 在鞘边  $x = 0$  处, 取空间静电势为零,  $\phi = 0$ .

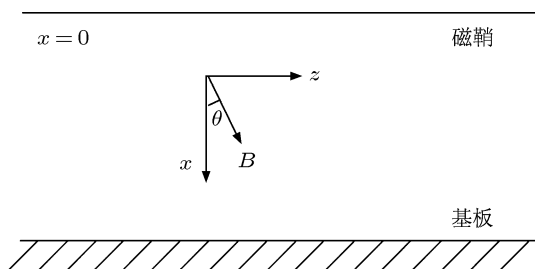


图 1 等离子体磁鞘模型示意图

假设系统由热平衡的电子、负离子和冷的正离子组成, 同时假设鞘层中电子和负离子各自遵从玻尔兹曼分布 [7-11]

$$n_e = n_{e0} \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right), \quad (1)$$

$$n_- = n_{-0} \exp\left(\frac{e\phi}{T_-}\right), \quad (2)$$

式中  $n_e$  和  $n_-$  分别为电子和负离子的数密度,  $T_e$  和  $T_-$  分别是电子和负离子温度, 单位为 eV. 负离子带电量为  $-e$ . 冷的正离子的运动遵从流体的连续性方程和运动方程 [15,16,20]

$$\nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad (3)$$

$$m_i (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i = -e \nabla \phi \hat{x} + e \frac{\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}}{c} - m_i (n_n \mu v_i) \mathbf{v}_i. \quad (4)$$

式中  $n_i$ ,  $m_i$  和  $\mathbf{v}_i$  分别是正离子的数密度、质量和速度.  $n_n$  是中性气体密度.  $\mu = \mu_s (v_i / c_{is})^\beta$  是离子与中性粒子间碰撞时传递的动量,  $\mu_s$  是碰撞截面.  $c_{is} = (T_e / m_i)^{1/2}$  是离子声速.  $\beta$  是无量纲化参数, 取值范围为  $-1-0$ . 这个取值范围包含了两种特殊情况:  $\beta = 0$  对应恒定的离子自由程;  $\beta = -1$  对应恒定的离子迁移率.

鞘层中电势满足泊松方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -4\pi e (n_i - n_e - n_-). \quad (5)$$

为了简化, 引入下列无量纲量:

$$\Phi = -e\phi/T_e, \quad \xi = x/\lambda_D, \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i/c_{is},$$

$$N_e = n_e/n_{e0}, \quad N_i = n_i/n_{i0},$$

$$N_- = n_-/n_{-0}, \quad \nu = \lambda_D n_n \mu_s.$$

这里  $\lambda_D = (T_e/4\pi n_{e0} e^2)^{1/2}$  是电子德拜长度,  $\omega_{ic} = eB/m_i c$  是离子回旋频率.  $c_{is}$ ,  $\omega_{ic}$  和  $\lambda_D$  分别是离子声速, 离子回旋频率和电子德拜长度. 在鞘边  $x = 0$  处, 由准中性条件, 有  $n_{e0} = n_{i0} + n_{-0}$ . 令  $\hat{B}_0 = -\cos\theta \hat{x} + \sin\theta \hat{z}$ , 由 (1)–(5) 式, 我们可以得到

$$N_e = \exp(-\Phi), \quad (6)$$

$$N_- = \exp(-\sigma\Phi), \quad (7)$$

$$N_i = \frac{M_i}{u_{ix}}, \quad (8)$$

$$u_{ix} \frac{\partial u_{ix}}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \gamma_i \delta_i^{1/2} u_{iy} \sin\theta - \nu u_{ix}^{2+\beta}, \quad (9)$$

$$u_{ix} \frac{\partial u_{iy}}{\partial \xi} = \gamma_i \delta_i^{1/2} (u_{iz} \cos\theta - u_{ix} \sin\theta) - \nu u_{iy}^{2+\beta}, \quad (10)$$

$$u_{ix} \frac{\partial u_{iz}}{\partial \xi} = -\gamma_i \delta_i^{1/2} u_{iy} \cos\theta - \nu u_{iz}^{2+\beta}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = \delta_i N_i - N_e - \delta_- N_-. \quad (12)$$

(7) 式中  $\sigma = T_e/T_-$  是电子和负离子的温度比. (8) 式中  $M_i = v_{ix0}/c_{is}$  为离子马赫数. (9) 式中  $\gamma_i = \omega_{ic}/\omega_{pi}$  为离子回旋频率  $\omega_{ic}$  与离子等离子体频率  $\omega_{pi}$  之比,

$$\omega_{pi} = (4\pi n_{i0} e^2 / m_i)^{1/2}.$$

$$\delta_i = n_{i0}/n_{e0},$$

$$\delta_- = n_{-0}/n_{e0}.$$

将 (8) 式代入 (9) 式, 并且考虑在鞘边  $x = 0$  处,  $\Phi \rightarrow 0$ ,  $N_i \rightarrow 1$ ,  $\partial\Phi/\partial\xi = E_0 \neq 0$ , 可得到

$$\left. \frac{dN_i}{d\Phi} \right|_{\Phi=0} = \frac{\nu M_i^{2+\beta} - \gamma_i \delta_i^{1/2} u_{iy0} \sin\theta}{M_i^2 E_0} - \frac{1}{M_i^2}. \quad (13)$$

由 (6), (7), (12) 式可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} &= \delta_i N_i - \exp(-\Phi) - \delta_- \exp(-\sigma\Phi) \\ &= -\frac{dV(\Phi)}{d\Phi}. \end{aligned} \quad (14)$$

(14) 式两边积分一次可以得到塞格捷夫势

$$\begin{aligned} V(\Phi) &= -\int \delta_i N_i d\Phi - \exp(-\Phi) \\ &\quad - (\delta_- / \sigma) \exp(-\sigma\Phi). \end{aligned}$$

(14) 式两边微分一次, 在  $\Phi = 0$  处

$$-\frac{d^2V(\Phi)}{d\Phi^2}\Big|_{\Phi=0} = \left[ \delta_i \frac{dN_i}{d\Phi} + \exp(-\Phi) + \delta_- \sigma \exp(-\sigma\Phi) \right]_{\Phi=0} \geq 0. \quad (15)$$

当  $\beta = 0$  时, 
$$\left( \frac{E_0 + \gamma_i \delta_i^{1/2} u_{iy0} \sin \theta}{\nu + E_0 \delta_s} \right)^{1/2} \leq M_i \leq \left( \frac{E_0 + \gamma_i \delta_i^{1/2} u_{iy0} \sin \theta}{\nu} \right)^{1/2};$$

当  $\beta = -1$  时, 
$$\left[ \left( \frac{1}{\delta_s} + \frac{\nu^2}{4E_0^2 \delta_s^2} + \frac{\gamma_i \delta_i^{1/2} u_{iy0} \sin \theta}{E_0 \delta_s} \right)^{1/2} - \frac{\nu}{2E_0 \delta_s} \right] \leq M_i \leq \frac{E_0 + \gamma_i \delta_i^{1/2} u_{iy0} \sin \theta}{\nu}. \quad (17)$$

在外加磁场作用下, 碰撞电负性鞘层的玻姆判据由 (17) 式决定. 其中,  $\gamma_i$  和  $\theta$  体现了磁场大小和角度对鞘层判据的影响,  $\delta_s$  体现了负离子的密度和温度对鞘层判据的影响.

### 3 分析和讨论

对 (16) 式进行化简, 当  $\gamma_i = 0, \nu = 0, \delta_s = 1$  时, 可以得到无外加磁场无碰撞的电子离子鞘层的玻姆判据  $M_i^2 \geq 1$ <sup>[15]</sup>. 说明离子进入鞘层时速度必须大于等于离子声速  $C_{is}$ . 同时还说明鞘边必须存在一个加速电场, 使离子获得足够的能量. 当  $\gamma_i = 0, \nu = 0, \delta_s \neq 1$  时, 得到无外加磁场无碰撞的电负性鞘层的玻姆判据  $M_i^2 \geq 1/\delta_s$ , 与 Wang 等<sup>[12]</sup> 的结果相同. 此时离子马赫数与负离子和正离子的密度比、电子和负离子的温度比有关.

再对 (17) 式化简, 当  $\gamma_i = 0, \nu \neq 0, \delta_s = 1$  时, 可以得到无外加磁场作用下的碰撞电子离子鞘层的玻姆判据.

当  $\beta = 0$  时, 
$$\left( \frac{E_0}{\nu + E_0} \right)^{1/2} \leq M_i \leq \left( \frac{E_0}{\nu} \right)^{1/2};$$

当  $\beta = -1$  时, 
$$\left[ \left( 1 + \frac{\nu^2}{4E_0^2} \right)^{1/2} - \frac{\nu}{2E_0} \right] \leq M_i \leq \frac{E_0}{\nu}. \quad (18)$$

Liu 等<sup>[15]</sup> 也曾得到过同样的结果. 此外, 还可以通过对 (17) 式化简得到无外加磁场作用下的碰撞电负性鞘层 ( $\gamma_i = 0, \nu \neq 0, \delta_s \neq 1$ ) 以及外加磁场作用下的碰撞等离子体鞘层 ( $\gamma_i \neq 0, \nu \neq 0, \delta_s = 1$ ) 的玻姆判据<sup>[16,20]</sup>.

在下面的讨论中, 我们取氩等离子体密度

将 (13) 式代入 (15) 式, 得

$$M_i^2 \geq \frac{1}{\delta_s} + \frac{\gamma_i \delta_i^{1/2} u_{iy0} \sin \theta - \nu M_i^{2+\beta}}{E_0 \cdot \delta_s}. \quad (16)$$

这里,  $\delta_s = (1 + \delta_- \sigma)/\delta_i$ . 由于在鞘边  $x = 0$  处:  $\partial u_{ix}/\partial \xi \geq 0, \partial \Phi/\partial \xi = E_0 > 0$ , 由 (9) 和 (16) 式可得

为  $n_0 = 5 \times 10^{14} \text{m}^{-3}$ , 电子温度为  $T_e = 3 \text{eV}$ .  $\alpha = 0.134$ , 相应的气体压强为  $13.33 \text{Pa}$ , 温度为  $290 \text{K}$ .

图 2 显示了  $\beta = 0$  时无外加磁场情况下碰撞电子离子鞘层 ( $\delta_s = 1$ ) 和碰撞电负性鞘层 ( $\delta_s \neq 1$ ) 的离子马赫数  $M_i$  的取值范围随鞘边电场强度  $E_0$  变化的关系曲线. 对于电子离子鞘层,  $M_i$  的下限和上限由 (18) 式决定. 可见鞘边电场加速离子, 对鞘层玻姆判据具有决定性作用. 对于电负性鞘层,  $M_i$  的下限和上限由 (17) 式决定. 从图中可以看出: 在无外加磁场的情况下, 两种鞘层  $M_i$  的上限相同, 没有区别; 而两种鞘层  $M_i$  的下限不同, 鞘层中负离子的温度和密度的确影响着正离子进入鞘层时的速度. 电负性鞘层离子马赫数下限的数值要相对小一些, 说明负离子对正离子的库仑引力作用会使正离子更容易进入鞘层. 图 3 显示了  $\beta = 0$  时外加磁场作用下碰撞电负性鞘层的离子马赫数  $M_i$  的下限随鞘边电场强度  $E_0$  变化的关系曲线. 参数  $\delta_s$  的数值取决于负离子与正离子的密度比及电子与负离子的温度比. 从图中可看出  $\delta_s$  的数值越大 (相应的负

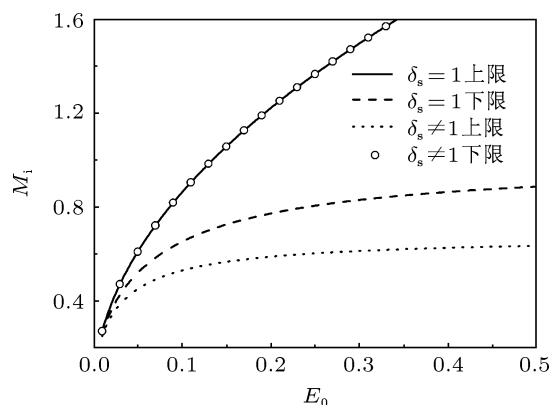


图 2 离子马赫数的取值范围随鞘边电场变化的关系曲线

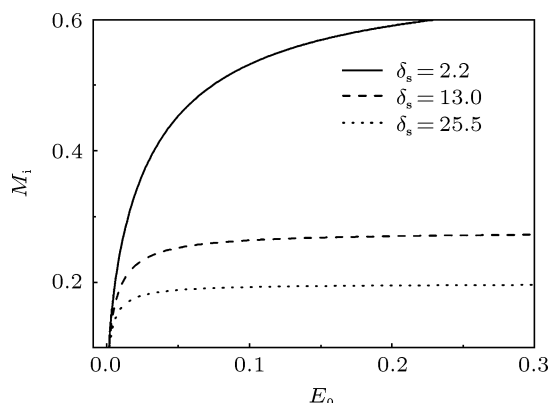


图3 离子马赫数的下限随鞘边电场变化的关系曲线 ( $B = 0.05 \text{ T}$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $u_{iy0} = 0.05$ )

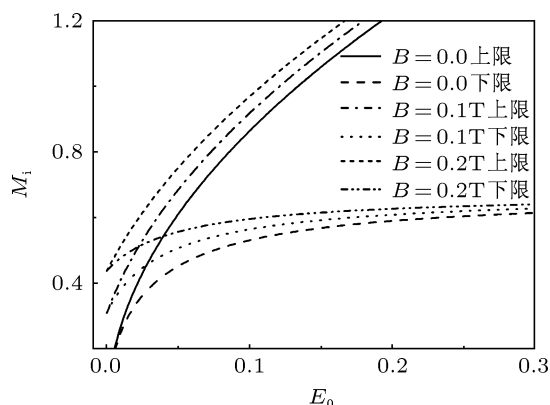


图4 磁场强度对鞘层玻姆判据的影响 ( $\theta = 30^\circ$ ,  $u_{iy0} = 0.5$ )

离子密度大或者负离子温度低)  $M_i$  的下限数值越小, 正离子越容易进入鞘层.

图4和图5分别显示了  $\beta = 0$  时外加磁场强度和角度对碰撞电负性鞘层玻姆判据的影响. 此时离子马赫数取值范围由(17)式决定. 从图中很容易看出, 随着磁场强度和角度数值增大, 离子马赫数

下限和上限的数值都相应的增大, 离子马赫数取值范围整体向上移动. 这是由于洛伦兹力影响了离子在  $x$  轴方向上的速度. 在这种情况下, 离子进入鞘层的速度较大.

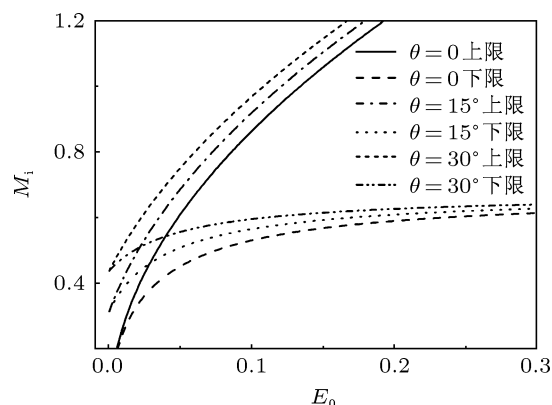


图5 磁场角度对鞘层玻姆判据的影响 ( $B = 0.2 \text{ T}$ ,  $u_{iy0} = 0.5$ )

## 4 结论

本文建立了一个外加斜磁场作用下的碰撞电负性等离子体鞘层模型, 得到了鞘层的玻姆判据. 判据包含了离子马赫数取值的上限和下限. 对鞘层判据进行简化得到结果与许多相关的工作结果一致. 判据表达式体现出外加磁场的大小和角度、负离子的浓度和温度、鞘边电场以及碰撞参数等都对离子马赫数的取值有影响. 经过数值讨论得出结论: 1) 负离子的温度和密度会影响离子马赫数的下限, 由于负离子吸引正离子, 所以在电负性鞘层中正离子更容易进入鞘层; 2) 磁场的强度和角度对鞘层离子马赫数的上限和下限都有影响, 使离子马赫数的取值范围发生整体的移动.

[1] Amemiya H 1990 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **23** 999  
 [2] Franklin R N, Snell J 1998 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **31** 2532  
 [3] Franklin R N 1999 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **32** 71  
 [4] Allen J E 2004 *Plasma Sources Sci. Technol.* **13** 48  
 [5] Fernandez Palop J I, Ballesteros J, Colomer V, Hernandez M A, Dengra A 1995 *J. Appl. Phys.* **77** 2937  
 [6] Fernandez Palop J I, Colomer V, Ballesteros J, Hernandez M A, Dengra A 1996 *Surface and Coatings Technology* **84** 341  
 [7] Valentini H B, Herrmann F 1996 *J. Phys. D* **29** 1175  
 [8] Lichtenberg A J, Kouznetsov I G, Lee Y T, Lieberman M A, Kaganovich I D, Tsendin L D 1997 *Plasma Sources Sci. Technol.* **6** 437  
 [9] Franklin R N, Snell J 2000 *J. Plasma Phys.* **64** 131  
 [10] Annaratone B M, Antonova T, Thomas H M, Morfill G E 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 185001  
 [11] Ghim Y C, Kim, Hershkowitz N 2009 *Appl. Phys. Lett.* **94** 51503  
 [12] Wang Z X, Liu J Y, Zou X, Liu Y, Wang X G 2003 *Chinese Physics Letters* **20** 1537  
 [13] Gong Y, Duan P, Zhang J H, Zou X, Liu J Y, Liu Y 2010 *Chinese J. Computational Physics* **27** 883  
 [14] Zhao X Y, Liu J Y, Duan P, Ni Z X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 045205 (in Chinese)[赵晓云, 刘金远, 段萍, 倪致祥 2011 物理学报 **60** 045205]  
 [15] Liu J Y, Wang Z X, Wang X 2003 *Phys. Plasmas* **10** 3032

[16] Ghomi H, Khoramabadi M 2010 *J. Plasma Phys.* **76** 247

[17] Chodura R 1982 *Phys. Fluids* **25** 1628

[18] Riemann K U 1994 *Phys. Plasmas* **1** 552

[19] Stangeby P C 1995 *Phys. Plasmas* **2** 702

[20] Zou X, Ji Y K, Zou B Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1902 (in Chinese) [邹秀, 籍延坤, 邹滨雁 2010 物理学报 **59** 1902]

# Bohm criterion for a collisional electronegative plasma sheath in an oblique magnetic field\*

Qiu Ming-Hui Liu Hui-Ping Zou Xiu<sup>†</sup>

(School of Science, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China)

(Received 7 October 2011; revised manuscript received 3 November 2011)

## Abstract

The Bohm criterion for a collisional electronegative plasma sheath in an oblique magnetic field is investigated with a fluid model. The effects of negative ions and magnetic field on the Bohm criterion are discussed. It is shown that the parameters of the negative ions affect only the lower limit for Bohm criterion, and the external magnetic field can affect the whole range of the ion Mach number values.

**Keywords:** plasma, magnetized sheath, Bohm criterion, electronegative

**PACS:** 52.40.Kh, 52.25.Xz, 52.65.-y

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Nos. 11005015, 10605008), and the Liaoning Province Education Administration (No. L2011069).

<sup>†</sup> E-mail: zouxiu@djtu.edu.cn