

介观薄圆环中的间隙性超导*

史良马^{1)†} 刘连忠²⁾ 王向贤¹⁾ 朱仁义¹⁾

1) (巢湖学院物理与电子科学系, 巢湖 238000)

2) (安徽农业大学信息与计算机学院, 合肥 230036)

(2011 年 11 月 28 日收到; 2012 年 2 月 15 日收到修改稿)

本文运用了唯象的 Ginzburg-Landau 理论研究了介观薄圆环的间隙性超导, 给出了在外磁场作用下超导圆环出现间隙性超导现象的尺寸相图. 这种间隙性超导现象只出现在尺寸小圆环中, 而且是超导圆环区别于超导圆盘的一个特征.

关键词: 间隙性超导, 介观, 薄圆环, 相图

PACS: 74.25.DW, 74.20.De, 74.78.-w, 74.78.Na

1 引言

随着纳米制造技术的发展, 介观超导体的研究日益成为人们研究的热点. 所谓介观超导体是指其尺寸可与相干长度 ξ 或磁场穿透深度 λ 相比拟. 这种结构的超导体在外磁场的作用下受到边界条件的影响显著因而表现出许多不同于大块超导体的特点. 如第一类介观超导体也出现了只有第二类超导体才有的 Abrikosov 涡旋格子的多涡旋态^[1]; 边缘电流和磁通涡旋的相互作用使介观超导体中出现负磁通和分数磁通跃迁^[2], 等等. 而小的薄圆环又是各种介观实验仪器或量子元器件中不可缺少的元件^[3], 如超导量子干涉仪^[4,5]. 尤其是现代电子平版印刷术使二维介观超导体的研究变得尤为重要.

以前的许多文献从理论和实验上对介观圆环的涡旋态进行了深入地研究^[6-11]. 当超导体的样品足够小, 边界效应变得十分显著, 样品中只会形成轴对称的巨涡旋态^[12-15]. 实验上已经报道了很多这种被磁通量子化调制的物理特性, 如 Little-Parks 振荡^[16,17]、超导态与正常态随着磁场循环出现的间隙性超导现象^[18-21]. 在实验和理论上对

这种间隙性超导现象都有所报道, 但我们还没有发现文献对间隙性超导现象与超导体的尺寸的关系作出深入细致地研究. 那么介观超导体的尺寸和形状对间隙性超导到底有什么影响呢?

本文的目的就是研究薄圆环的尺寸以及对间隙性超导现象影响. 我们的结果不仅可以帮助我们理解小尺寸的超导体的超导电性, 而且对利用小超导环的超导量子干涉仪的设计也十分有用.

2 理论模型

我们在柱坐标系下考虑一个位于 $z = 0$, 厚度为 $d \ll \xi$, 内外半径分别为 R_i 和 R_o (环宽 $w = R_o - R_i$) 的小薄圆环处于匀强磁场 $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$ 中 (见图 1).

系统无量纲式的自由能可以写成

$$F = \frac{2}{V} \int dV \{ -|\psi|^2 + |\psi|^4 + |(\nabla - i\mathbf{A})\psi|^2 \}, \quad (1)$$

其中长度用

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m[-\alpha(T)]}},$$

* 安徽省高校省级科学研究重点项目 (批准号: KJ2012A203) 和巢湖学院博士启动基金资助的课题.

† E-mail: slm428@shu.edu.cn

矢势 $\mathbf{A}$ 用 $\frac{c\hbar}{2e\xi(T)}$ 、磁场用

$$H_{c2} = \frac{c\hbar}{2e\xi(T)^2},$$

超导序参量用 $\psi_0 = \sqrt{-\alpha(T)/\beta}$ 、自由能用 $F_0 = \alpha(T)^2/2\beta$ 作为约化单位.

系统自由能 (1) 通过对超导序参量 $\psi(\mathbf{r})$ 变分取极小值 [22], 我们可以得到 Ginzburg-Landau 方程和边界条件

$$(-i\nabla - \mathbf{A})^2\psi = \psi - \psi|\psi|^2, \quad (2)$$

$$\mathbf{n} \cdot (-i\nabla - \mathbf{A})\psi|_{\text{on } S} = 0. \quad (3)$$

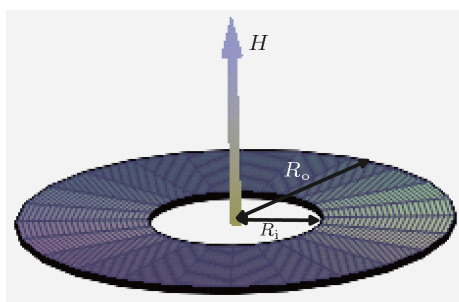


图 1 内外半径分别为 R_i 和 R_o 的薄圆环与磁场 $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$

我们使用柱坐标系 $\mathbf{r} = (\rho, \theta, z)$, 其中 ρ 到 z 轴的极径, θ 为极角. 选择 $\mathbf{A} = (H\rho/2)\mathbf{e}_\theta$ 满足 London 规范条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. 其超导序参量应具有轴对称性, 可表示为

$$\psi(\rho, \theta, z) = \sum_k \psi(\rho) e^{iL\theta} (e^{ikz} + e^{-ikz}), \quad (4)$$

其中 k 可由边界条件 (3) 中 $z = d/2$ 和 $z = -d/2$ 得到

$$kb = i \frac{e^{ikd/2} + e^{-ikd/2}}{e^{ikd/2} - e^{-ikd/2}} = \frac{\cos(kd/2)}{\sin(kd/2)}. \quad (5)$$

对于薄圆环 $d \rightarrow 0$, (5) 式就变为

$$k^2 = \frac{2}{bd}. \quad (6)$$

超导序参量对厚度取平均

$$\begin{aligned} \langle \psi(\mathbf{r}) \rangle &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \psi(\rho, \theta) \cos(kz) dz \\ &= \psi(\rho, \theta) \cdot \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\sin(kd/2)}{kd/2} = \psi(\rho, \theta). \end{aligned} \quad (7)$$

这样系统就变为一个二维问题.

我们定义一个算符 $\hat{L}$:

$$\hat{L} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left(\frac{L}{\rho} - \frac{H\rho}{2} \right)^2 + k^2 + 1, \quad (8)$$

则 (1) 式的自由能就改写为

$$F = \frac{4\pi d}{V} \int_{R_i}^{R_o} \left(\psi^* \hat{L} \psi + \frac{1}{2} |\psi|^4 \right) \rho d\rho. \quad (9)$$

而算符 $\hat{L}$ 的本征方程为

$$\hat{L}f(\rho) = \Lambda f(\rho). \quad (10)$$

其精确解为

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \frac{1}{\rho} \left[M \left(\frac{1+LH-k^2}{2H}, \frac{L}{2}, \frac{H\rho^2}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + cW \left(\frac{1+LH-k^2}{2H}, \frac{L}{2}, \frac{H\rho^2}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $M(\mu, \nu, z)$ 和 $W(\mu, \nu, z)$ 分别为第一和第二惠泰克函数 [23], c 为积分常数. 对于同个涡旋数 L 选择最低的朗道能级, 而且假设超导序参量与 $\hat{L}$ 的本征可以通过一个常数联系, 即

$$\psi(\rho) = af(\rho) e^{iL\theta}. \quad (12)$$

(12) 式代入 (9) 式的自由能得到

$$F = 2\Lambda a^2 a_2 + a^4 a_1, \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2\pi d}{V} \int_{R_i}^{R_o} \rho f^4(\rho) d\rho, \\ a_2 &= \frac{2\pi d}{V} \int_{R_i}^{R_o} \rho f^2(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

为了确定常数 a , (13) 式对 a 取极小得

$$a = \left(\frac{-\Lambda a_2}{a_1} \right)^{1/2}. \quad (14)$$

由边界条件 (3) 在 $\rho = R_i$ 和 $\rho = R_o$ 下, 解本征方程 (10) 可以得到常数 c 和本征值 Λ .

3 本征值和自由能

我们根据 (10) 式计算相同环宽 $w/\xi = 0.50$, 内径 R_i/ξ 分别为 0.260, 0.269, 0.295 和 0.325 四个薄环的本征值. 图 2 为四个薄环的本征值随着磁场变化图. 本征值为负值对应超导态, 本征值为正值对应于正常态. 图中水平点线为超导态与正常态的分界线. 涡旋态 $L = 0$ 用实线表示, $L = 1$ 的涡旋态用虚线表示. 从图上我们可以看到随着内径的

增大, 涡旋 $L = 0$ 态和 $L = 1$ 态的曲线向左移动, 同时涡旋 $L = 1$ 态的曲线向下移动. 由此可以看到对于同一环宽 $w/\xi = 0.50$, 内径为 $R_i/\xi = 0.269$ 是保持涡旋态 $L = 0$ 的最大内径. 再增大内径如 $R_i/\xi = 0.295$, 就会出现涡旋 $L = 1$ 态. 而且涡旋 $L = 0$ 态和涡旋 $L = 1$ 态之间存在正常态. 也就是说随着磁场的增大, 系统先后出现的是涡旋 $L = 0$ 态、正常态、涡旋 $L = 1$ 态. 即出现了间隙性超导现象. 当 R_i/ξ 增大到 0.325 时, 涡旋 $L = 0$ 态和涡旋 $L = 1$ 态的曲线正好相交在超导态与正常态的分界线上, 即随着磁场变化涡旋 $L = 0$ 态直接变成涡旋 $L = 1$ 态, 而没有经历正常态, 显然间隙性超导现象消失了. 也就是说内径 $R_i/\xi = 0.325$ 是在涡旋 $L = 0$ 态和涡旋 $L = 1$ 态之间出现正常态的最大的内径. 所以对于环宽 $w/\xi = 0.50$ 的薄圆环, 在涡旋 $L = 0$ 态和涡旋 $L = 1$ 态存在正常态的内径的范围是 $(0.269, 0.325)$.

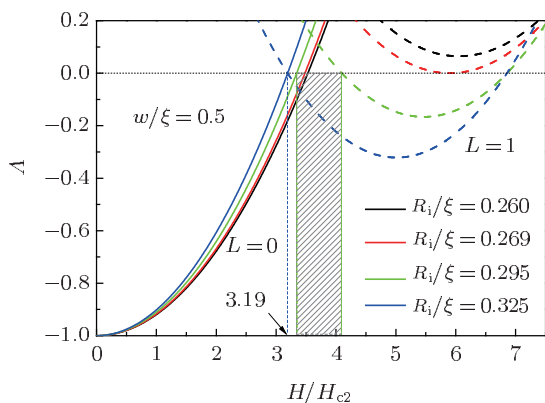


图2 本征值随着磁场变化图

将上述四圆环的本征值代入 (13) 式可以计算得到四个薄圆环的系统自由能. 图 3 是与图 2 相对应的系统自由能随着磁场变化图. 自由能负值对应于超导态, 自由能正值则对应正常态. 图中水平点是超导态与正常态的分界线. 图 3 整体变化趋势与图 2 是一致的, 随着磁场增大, $L = 0$ 和 $L = 1$ 曲线向左移动, $L = 1$ 曲线的最低点向下移动. 而且 $L = 1$ 曲线都始末端自由能都为零. 即对于涡旋 $L = 1$ 态存在上成核场 $H_{n,u}^1$ 和下成核场 $H_{n,l}^1$. 对于 $R_i/\xi = 0.260$ 和 $R_i/\xi = 0.269$ 的环, 图上没有对应的 $L = 1$ 的自由能曲线, 因为它们最大的涡旋态是涡旋数 $L = 0$ 的态, 没有涡旋 $L = 1$ 态. 对于内径 $R_i/\xi = 0.296$ 的环, 其涡旋 $L = 1$ 态的下成核场 $H_{n,l}^1/H_{c2} = 4.09$ 比涡旋 $L = 0$ 态

的上成核场 $H_{n,u}^0/H_{c2} = 3.34$ 大. 所以磁场在涡旋 $L = 0$ 态的上成核场和涡旋 $L = 1$ 态的下成核场之间即 $(3.34, 4.09)$, 系统处于正常态, 呈现间隙性超导现象. 而对于内径 $R_i/\xi = 0.325$ 的环, 其涡旋 $L = 1$ 态的下成核场与涡旋 $L = 0$ 态的上成核场相等 $H_{n,u}^0/H_{c2} = H_{n,l}^1/H_{c2} = 3.19$, 随着磁场的增大, 系统正好在磁场 $H/H_{c2} = 3.19$ 处由涡旋 $L = 0$ 态变为涡旋 $L = 1$ 态. 对于环宽 $w/\xi = 0.50$, 内径 $R_i/\xi = 0.295$ 是在涡旋 $L = 0$ 态和涡旋 $L = 1$ 态之间不出现正常态的最小内径.

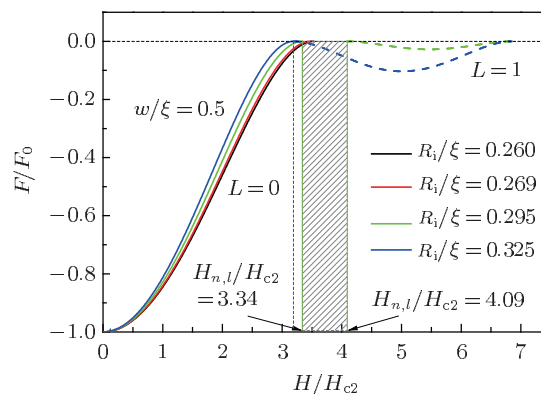


图3 自由能随着磁场变化图

4 间隙性超导相图

我们研究了不同环宽的环, 得到间隙性超导、容纳最大的涡旋态与环尺寸关系. 图 4 是环宽 w 在 $(0, 2.5)$ 、内径 R_i 在 $(0, 1)$ 的尺寸范围内, 涡旋数 $L \leq 3$ 的尺寸相图. 图中粗线表示环容纳的最大涡旋态的分界线, 分界线上的每一点相当于图 2 中红线所表示的圆环. 黑粗线与纵轴所包围的区域内的圆环最大的涡旋态是涡旋 $L = 0$ 态. 细线表示出现间隙性超导现象的分界线, 分界线上每一点则相当于图 2 中蓝线所表示的圆环. 在阴影区域内的圆环会出现间隙性超导现象. 我们用 $L - L + 1$ 表示在涡旋 L 态和涡旋 $L + 1$ 态之间出现正常态, 这个区域是由最大涡旋 L 态分界线 (粗线)、间隙性超导分界线 (细线) 和横轴的曲边三角形构成的, 如 0—1 表示在涡旋 $L = 0$ 态和涡旋 $L = 0$ 态之间存在正常态. 显然间隙性超导现象只在环宽 w 小于 1ξ 的小圆环内存在, 而且对于内径 $R_i = 0$ 即圆盘不存在间隙性超导现象. 所以间隙性超导现象是圆环所特有的现象.

值得注意的是, 所有间隙性超导分界线都

交于 $(0.5, 0)$ 这一点. 这点表示的是一个内径为 0.5ξ 、环宽是 0 的虚拟圆环. 对这样的一个虚拟的圆环当然可以任意的涡旋态. 这点我们可以从 (2) 式的伦敦极限得到很好的解释. 当环宽 $w \rightarrow 0$ 时, 超导序参量按照伦敦极限在空间的分布是均匀的, 即超导序参量对空间的分布是常数, 因此就有 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \rightarrow 0$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow R_i$, 则可得到

$$|\psi|^2 = \left(\frac{L}{R_i} - \frac{H R_i}{2} \right)^2 - 1, \quad (15)$$

系统处于超导态, 就有 $|\psi|^2 > 0$, 磁场就必须满足

$$\frac{2}{R_i} \left(\frac{L}{R_i} - 1 \right) < H < \frac{2}{R_i} \left(\frac{L}{R_i} + 1 \right), \quad (16)$$

显然, $\frac{2}{R_i} \left(\frac{L}{R_i} - 1 \right)$ 是涡旋 L 态的下成核场, $\frac{2}{R_i} \left(\frac{L}{R_i} + 1 \right)$ 是涡旋 L 态的上成核场. 在涡旋 L 态与涡旋 $L+1$ 态之间出现正常态, 即出现间隙性超导现象, 就有 $L+1$ 态的下成核场不小于 L 态的上成核场. 由此, 可以得到 $R_i \leq 0.5$. 在间隙性超导体分界线上就有 $R_i = 0.5$.

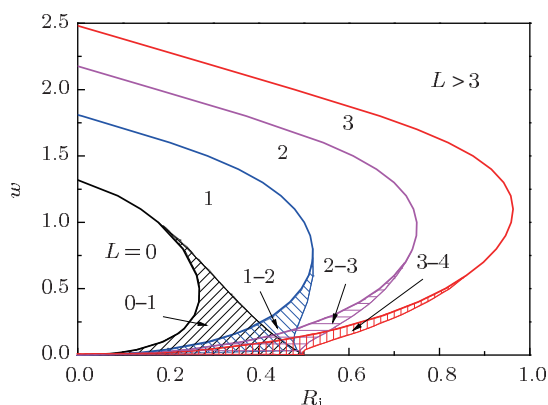


图 4 最大涡旋态与间隙性超导的尺寸相图

显然, 对我们可以从全磁通的量子化来理解间隙性现象. 对 Ginzburg-Landau 第二方程作沿圆环作积分

$$\mathbf{J} = |\psi|^2 \left(\nabla \delta - \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right), \quad (17)$$

就有

$$\oint \frac{\mathbf{J}}{|\psi|^2} \cdot d\mathbf{l} = \oint \nabla \delta \cdot d\mathbf{l} - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = 2\pi \left(L - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right),$$

$$L = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

其中 $J = j/(2e\hbar/m^*)$ 作为电流密度的约化单位, δ 为复超导序参量 $\psi = |\psi| e^{i\delta}$ 的相位, $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi$ 为外磁场穿过圆环的磁通, $\Phi_0 = h/2e$ 为磁通量子, L 为涡旋量子数. 当外磁场的磁通不是磁通量子 Φ_0 的整数倍时, 则在超导圆环中将产生超导电流满足 (18) 式. 以 $L=0$ 和 $L=1$ 中的间隙性超导为例. 对于 $L=0$ 的超导态, 将产生一个反向电流, 因此, $L=0$ 的超导态总是表现出抗磁性. 当外磁通增大到一定程度, 在有限的圆环内, 超导电流 $\mathbf{J}$ 在 $L=0$ 的状态下无法满足 (18) 式时, 其系统就有可以从 $L=0$ 的超导态跃迁到 $L=1$ 的超导态, 此时将产生一个正向超导电流, 因此对于 $L=1$ 的超导态, 首先表现为顺磁效应, 当外磁通大于一个磁通量子 Φ_0 时, 就再次表现为抗磁性. 由于圆环的尺寸有限, 超导电流 $\mathbf{J}$ 在 $L=0$ 和 $L=1$ 的超导态都不能满足时, 则圆环就变成正常态.

5 结 论

我们运用了 Ginzburg-Landau 理论研究了介观薄圆环的系统的自由能. 我们发现由于圆环内孔存在, 在小尺寸的圆环中出现了随着磁场的变化出现超导态和正常态循环出现的间隙性超导现象. 通过对不同尺寸圆环的研究我们给出了存在间隙性超导现象的尺寸相图. 我们给出的相图表明: 间隙性超导现象只存在环宽小于相干长度的圆环中, 而且是圆环所特有、圆盘所没有的一个特征. 我们的结果对利用小超导环的超导量子干涉仪的设计十分有用.

感谢上海大学周世平教授对论文的指导

- [1] Cabral L R E, Baelus B J, Peeters F M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **70** 144523
 [2] Geim A K, Dubonos S V, Lok J G S, Henimi M, Maan J C 1998

Nature **396** 144

- [3] González-Jorge H, Liñares B, Quelle I, Carballo E, Romaní L, Domarco G 2007 *Physica C* **451** 8

- [4] Davidović D, Kumar S, Reich D H, Siegel J, Field S B, Tiberio R C, Hey R, Ploog K 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 815
- [5] Gao J, Yang T, Ma P D, Dai Y D, 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5044 (in Chinese) [高吉, 杨涛, 马平, 戴远东 2010 物理学报 **59** 5044]
- [6] Baelus B J, Peeters F M, Schweigert V A 2000 *Phys. Rev. B* **61** 9734
- [7] Baelus B J, Peeters F M, Schweigert V A 2001 *Phys. Rev. B* **63** 144517
- [8] Fomin V M, Misko V R, Devreese J T, Moshchalkov V V 1998 *Phys. Rev. B* **58** 11703
- [9] Vodolazov D Y, Baelus B J, Peeters F M 2002 *Phys. Rev. B* **66** 054531
- [10] Liang F Y, Li H M, Li Y J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 830 (in Chinese) [梁芳营, 李汉明, 李英骏 2006 物理学报 **55** 830]
- [11] Liu X Y, Xie F X, Wang F R, Ma P, Dai Y D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 473 (in Chinese) [刘新元, 谢飞翔, 王福仁, 马平, 戴远东 2003 物理学报 **52** 473]
- [12] Palacios J J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 1796
- [13] Saint-James D, de. Gennes P G 1963 *Phys. Rev. Lett.* **7** 306
- [14] Schweigert V A, Peeters F M 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 2409
- [15] Geim A K, Dubonos S V, Palacios J J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 1528
- [16] Little W A, Parks R D 1962 *Phys. Rev. Lett.* **9** 9
- [17] Vloeberghs H, Moshchalkov V V, Van Haesendonek C, Jonckleere R, Bruynseraede R 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 1268
- [18] Georg Schwiete, Yuval Oreg 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 037001
- [19] Zhu B H, Zhou S P, Shi Y M, Zha G Q, Yang K 2006 *Phys. Rev. B* **74** 014501
- [20] Shi L M, Zhang L F, Meng H, Zhao H W, Zha G Q, Zhou S P 2009 *Phys. Rev. B* **79** 184518
- [21] Shi L M, Zhu R Y, Zhou S P 2011 *Physica C* **471** 373
- [22] Zhang Y H, Li Y Z 1992 *Superconducting Physics* (Hefei: University of Science and Technology of China Press) p162 (in Chinese) [张裕恒, 李玉芝 编著 1992 超导物理 (合肥: 中国科学技术大学出版社) 第 162 页]
- [23] Wang Z X, Guo D R 2000 *Introduction to Special Function* (Beijing: Peking University Press) p291–297 (in Chinese) [王竹溪, 郭敦仁 2000 特殊函数概论 (北京: 北京大学出版社) 第 291—297 页]

Intermittent superconductivity in mesoscopic thin-film rings*

Shi Liang-Ma^{1)†} Liu Lian-Zhong²⁾ Wang Xiang-Xian¹⁾ Zhu Ren-Yi¹⁾

¹⁾ (Department of Physics and Electronics, Chaohu College, Chaohu 238000, China)

²⁾ (School of Information and Computer Science, Anhui Agricultural University, Hefei 230036, China)

(Received 28 November 2011; revised manuscript received 15 February 2012)

Abstract

Intermittent superconductivity for mesoscopic thin-film rings is investigated by the phenomenological Ginzburg-Landau theory. Phase diagram for intermittent superconductivity vs. ring dimension is given in the presence of an external applied field. The intermittent superconductivity exists only in the small ring, which is a feature for distinguishing superconductive ring from superconductive disk.

Keywords: intermittent superconductivity, mesoscopic, thin-film ring, phase

PACS: 74.25.DW, 74.20.De, 74.78.–w, 74.78.Na

* Project supported by the Province Key Program of Science Research of Anhui High School (Grant No. KJ2012A203) and the Doctor Start-up Foundations by Chaohu college.

† E-mail: slm428@shu.edu.cn