

一类分数阶混沌系统的自适应同步*

马铁东^{1)†} 江伟波¹⁾ 浮洁²⁾ 柴毅¹⁾ 陈立平¹⁾ 薛方正¹⁾

1) (重庆大学自动化学院, 重庆 400044)

2) (重庆大学光电工程学院, 光电技术及系统教育部重点实验室, 重庆 400044)

(2011年12月19日收到; 2012年1月15日收到修改稿)

针对一类分数阶混沌系统的同步问题, 基于分数阶系统的类 Lyapunov 稳定性理论, 设计了一种新的自适应同步控制器以及控制增益系数自适应律. 与现有结果相比, 该方法具有控制器结构简单、控制代价小以及通用性强等特点, 可适用于大部分典型的分数阶混沌系统. 最后, 数值仿真结果验证了所提方法运用于分数阶混沌系统同步研究的有效性.

关键词: 混沌同步, 分数阶混沌系统, 自适应同步

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Jn, 05.45.Pq

1 引言

近年来, 人们在黏滞系统、介质极化、电极-电解质极化、管道边界层效应、有色噪声和电磁波等研究中发现, 许多物理过程展现出分数阶动力学行为, 这使得具有 300 多年历史的分数阶微积分理论重新受到关注. 分数阶微积分扩展了整数阶微积分的描述能力, 是整数阶微积分理论的推广, 并且在由分数阶微分方程描述的非线性系统中重新发现了混沌现象, 如分数阶 Chua's 电路^[1]、分数阶 Chen 系统^[2]、Lorenz 系统^[3]、Rössler 系统^[4]、Lü 系统^[5]等. 另一方面, 自从 Pecora 和 Carroll^[6] 发现了两个混沌系统可以实现同步以来, 就掀起了混沌同步问题研究的热潮^[7-10]. 由于分数阶系统在保密通信等领域拥有潜在的应用前景, 分数阶混沌系统同步近年来成为研究热点^[11-16].

目前, 对于整数阶混沌系统, 已有多种基于 Lyapunov 稳定性理论的混沌同步控制方法, 并具有良好的控制效果. 而对于分数阶非线性混沌系统, 目前采用较多的一种方法是将分数阶混沌系统

近似成整数阶系统来处理^[16-18], 由于混沌系统具有对初值和参数的敏感性, 这种近似在实际应用中往往难以达到预期的效果. 另一种方法是试图构造特殊的控制器将分数阶系统的同步问题转化为整数阶系统的同步问题来研究^[19,20], 此方法虽然也有一定的合理性, 但控制器结构复杂, 并没有从根本上解决分数阶系统的稳定性问题.

基于以上分析, 本文在分数阶类 Lyapunov 稳定性理论基础^[21]上, 针对一类分数阶混沌系统同步问题提出了分数阶混沌系统的自适应同步判据. 与现有结果相比, 控制器结构简单有效, 并适用于大部分典型分数阶混沌系统的同步问题. 数值仿真结果验证了所提方法运用于分数阶混沌系统同步研究的有效性.

2 问题描述

考虑如下分数阶系统:

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \varphi(\mathbf{x}(t)), \quad (1)$$

其中

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\mathbf{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 61104080)、重庆市自然科学基金 (批准号: CSTC, 2010BB2238)、教育部博士点基金 (批准号: 20100191120025)、中国博士后科学基金 (批准号: 20100470813, 20100480043) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: CDJXS12170005) 资助的课题.

† E-mail: tdma@cqu.edu.cn

表示 Riemann-Liouville 分数阶导数, $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数, $\alpha \in (0, 1)$, \mathbf{Ax} 和 $\varphi(\mathbf{x})$ 分别为系统的线性与非线性部分.

将系统 (1) 作为驱动系统, 构造如下形式的响应系统:

$$D^\alpha \mathbf{y}(t) = \mathbf{Ay}(t) + \varphi(\mathbf{y}(t)) + \mathbf{u}(t), \quad (2)$$

于是由系统 (1) 和 (2) 可得如下同步误差系统:

$$D^\alpha \mathbf{e}(t) = \mathbf{Ae}(t) + \phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) + \mathbf{u}(t), \quad (3)$$

其中 $\phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) = \varphi(\mathbf{y}(t)) - \varphi(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{N}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{N}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ 是由状态 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 决定的范数有界矩阵, 且大部分典型分数阶混沌系统均满足 $\phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) = \mathbf{N}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))\mathbf{e}(t)$, 如分数阶 Lorenz 系统、Chen 系统、Rössler 系统、Lü 系统、分数阶统一系统等.

3 自适应同步

文献 [22] 给出了分数阶线性系统的稳定性判别定理, 基于文献 [22], 文献 [21] 提出了分数阶非线性系统的类 Lyapunov 稳定性理论.

引理 1^[21] 对于分数阶系统

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{x}, \quad (4)$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ 为系统状态变量, $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ 为依赖 \mathbf{x} 的范数有界矩阵. 当系统阶数 $\alpha \in (0, 1)$ 时, 如果存在实对称正定矩阵 \mathbf{P} , 使对任意状态变量 \mathbf{x} , 恒有

$$H = \mathbf{x}^\top(t)\mathbf{P}D^\alpha \mathbf{x}(t) \leq 0, \quad (5)$$

(令形如 $\mathbf{x}^\top(t)\mathbf{P}D^\alpha \mathbf{x}(t)$ 的函数为 H 函数) 成立, 则分数阶系统 (4) 稳定.

根据引理 1, 下面给出一类分数阶混沌系统在自适应控制器作用下的渐近同步判别定理.

定理 1 在自适应控制器 $\mathbf{u} = \mathbf{Ke}$ ($\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$) 和控制增益系数自适应律

$$D^\alpha k_i = \varepsilon_i e_i^2 \quad (\varepsilon_i < 0), \quad (6)$$

$$(e_i = y_i - x_i, i = 1, 2, \dots, n)$$

的作用下误差系统 (3) 渐近稳定.

证明 令 λ 和 λ_N 分别为矩阵 $(\mathbf{A}^\top + \mathbf{A})/2$ 和 $(\mathbf{N}^\top(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))/2$ 的最大特征值, 将 $\mathbf{u} = \mathbf{Ke}$ 代入 (3) 式得

$$D^\alpha \mathbf{e} = (\mathbf{A} + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{K})\mathbf{e}. \quad (7)$$

由引理 1, 构造 H 函数如下:

$$H(\mathbf{e}, e_K) = (\mathbf{e}^\top \quad \mathbf{e}_K^\top) \mathbf{P} \begin{pmatrix} D^\alpha \mathbf{e} \\ D^\alpha \mathbf{e}_K \end{pmatrix}. \quad (8)$$

选择正定矩阵

$$\mathbf{P} = \text{diag} \left(1, 1, \dots, 1, -\frac{1}{\varepsilon_1}, -\frac{1}{\varepsilon_2}, \dots, -\frac{1}{\varepsilon_n} \right) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n},$$

$\mathbf{e}_K = (e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_n})^\top$, $e_{k_i} = k_i - k_i^*$, k_i^* 为常数, $i = 1, 2, \dots, n$. 则由 (8) 式可得

$$H = \mathbf{e}^\top D^\alpha \mathbf{e} + \mathbf{e}_K^\top \mathbf{B} D^\alpha \mathbf{e}_K, \quad (9)$$

$$\text{其中 } \mathbf{B} = \text{diag} \left(-\frac{1}{\varepsilon_1}, -\frac{1}{\varepsilon_2}, \dots, -\frac{1}{\varepsilon_n} \right).$$

将 (6) 式和 (7) 式代入 (9) 式有

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{e}^\top (\mathbf{A} + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{K}) \mathbf{e} \\ &\quad + \mathbf{e}_K^\top \mathbf{B} (\varepsilon_1 e_1^2 \quad \varepsilon_2 e_2^2 \quad \dots \quad \varepsilon_n e_n^2)^\top \\ &= \mathbf{e}^\top (\mathbf{A} + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{K}) \mathbf{e} \\ &\quad + (e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n) \\ &\quad \times \begin{bmatrix} -e_{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -e_{k_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -e_{k_n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{e}^\top (\mathbf{A} + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{L}) \mathbf{e} \\ &= \mathbf{e}^\top \left(\frac{\mathbf{A}^\top + \mathbf{A}}{2} + \frac{\mathbf{N}^\top(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2} + \mathbf{L} \right) \mathbf{e}, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{L} = \text{diag}(k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*)$, 于是有

$$H \leq (\lambda + \lambda_N + \max\{k_i^*\}) \mathbf{e}^\top \mathbf{e},$$

其中 $\max\{k_i^*\}$ 表示 $k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*$ 中的最大值. 要使 $H \leq 0$, 则需 $\lambda + \lambda_N + \max\{k_i^*\} \leq 0$, 即

$$\max\{k_i^*\} \leq -(\lambda + \lambda_N). \quad (10)$$

对于具体的系统, λ 和 λ_N 都可以求得, 则只要通过选择合适的 k_i^* 值, 即可实现系统 (3) 的渐近稳定, 证毕.

4 仿真实例

实例 1 考虑如下 Arneodo 分数阶混沌系统^[23]:

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = x_2, \\ D^\alpha x_2 = x_3, \\ D^\alpha x_3 = ax_1 - bx_2 - rx_3 - x_1^3. \end{cases} \quad (11)$$

当 $a = 5.5, b = 3.5, r = 0.4, \alpha = 0.9$ 时, 系统 (11) 呈现混沌现象, 其混沌吸引子如图 1 所示.

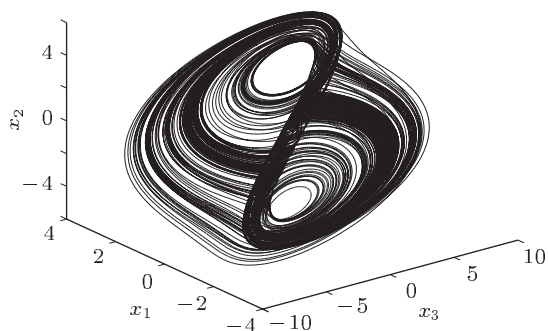


图 1 分数阶 Arneodo 混沌系统 (11) 混沌吸引子

以系统 (11) 为驱动系统, 构造响应系统为

$$\begin{cases} D^\alpha y_1 = y_2 + k_1(y_1 - x_1), \\ D^\alpha y_2 = y_3 + k_2(y_2 - x_2), \\ D^\alpha y_3 = ay_1 - by_2 - ry_3 - y_1^3 \\ \quad + k_3(y_3 - x_3). \end{cases} \quad (12)$$

则误差系统为

$$\begin{cases} D^\alpha e_1 = e_2 + k_1 e_1, \\ D^\alpha e_2 = e_3 + k_2 e_2, \\ D^\alpha e_3 = ae_1 - be_2 - re_3 \\ \quad - e_1(y_1^2 + x_1 y_1 + x_1^2) + k_3 e_3. \end{cases} \quad (13)$$

若将系统 (13) 表示成 (3) 式所示的状态空间形式, 则有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5.5 & -3.5 & -0.4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -(y_1^2 + x_1 y_1 + x_1^2) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

根据混沌系统的状态有界性, 在本实例中, 存在常数 $M_1 > 0$ 满足 $|x_1| \leq M_1, |y_1| \leq M_1$, 于是可得

$$\lambda = 2.6563,$$

$$\lambda_N = \sqrt{y_1^2 + x_1 y_1 + x_1^2}/2$$

$$\leq \sqrt{M_1^2 + M_1^2 + M_1^2}/2,$$

又由图 1 可知, $M_1 = 4$, 则由定理 1 有

$$\max\{k_i^*\} \leq -(\lambda + \lambda_N) = -6.1203.$$

取 $\alpha = 0.9$, 系统参数 $a = 5.5, b = 3.5, r = 0.4, \mathbf{L} = \text{diag}(-7, -7, -7), (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (-5, -3, -1)$, 驱动系统 (11) 和响应系统 (12) 的初值分别设为 $(0.2, 0.2, 0.2)^T$ 和 $(0.8, 1, 0.5)^T$, 在 $t = 1$ s 时加入控制.

图 2 和图 3 分别给出了同步误差 e_i 的响应曲线和反馈控制增益系数 k_i 的收敛曲线, 从仿真结果可以看出响应系统 (12) 与驱动系统 (11) 同步, 反馈控制增益系数收敛于恒定的值.

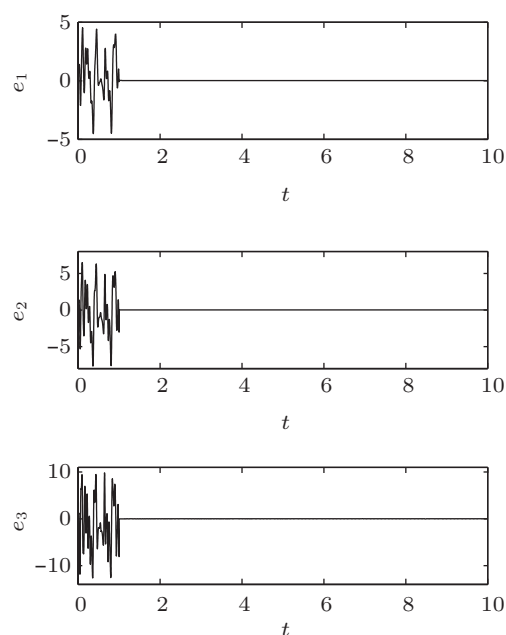


图 2 同步误差 e_i 的响应曲线

实例 2 为了进一步验证所提方法的有效性, 我们考虑如下的分数阶超混沌系统^[24]:

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = a(x_2 - x_1), \\ D^\alpha x_2 = bx_1 + cx_2 - x_1 x_3 - x_4, \\ D^\alpha x_3 = x_1 x_2 - dx_3, \\ D^\alpha x_4 = x_1 + g, \end{cases} \quad (15)$$

其中 $a = 36, b = -16, c = 28, d = 3, g = 0.3, \alpha = 0.9$ 时, 系统呈现混沌现象, 其混沌吸引子如图 4 所示.

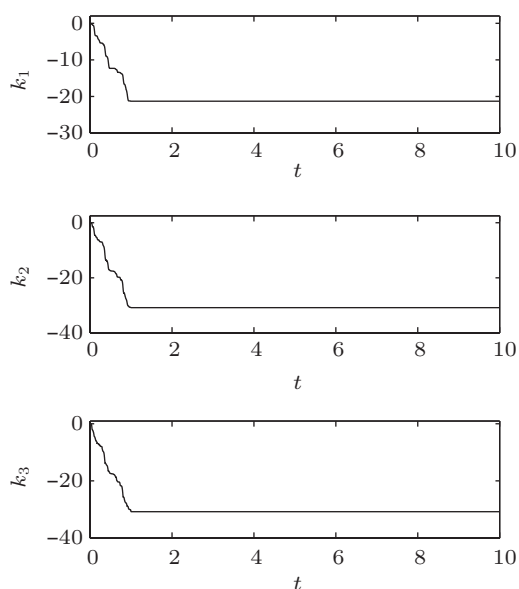


图3 反馈控制增益系数 k_i 的收敛曲线

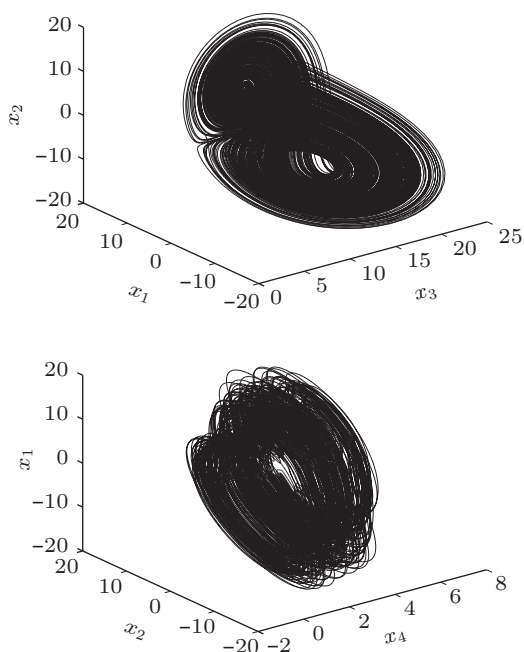


图4 分数阶超混沌系统(15)混沌吸引子

以系统(15)为驱动系统,构造响应系统为

$$\begin{cases} D^\alpha y_1 = a(y_2 - y_1) + k_1(y_1 - x_1), \\ D^\alpha y_2 = by_1 + cy_2 - y_1y_3 - y_4 + k_2(y_2 - x_2), \\ D^\alpha y_3 = y_1y_2 - dy_3 + k_3(y_3 - x_3), \\ D^\alpha y_4 = y_1 + g + k_4(y_4 - x_4). \end{cases} \quad (16)$$

则误差系统为

$$\begin{cases} D^\alpha e_1 = a(e_2 - e_1) + k_1e_1, \\ D^\alpha e_2 = be_1 + ce_2 - e_4 + y_3e_1 + x_1e_3 + k_2e_2, \\ D^\alpha e_3 = x_2e_1 + y_1e_2 - de_3 + k_3e_3, \\ D^\alpha e_4 = e_1 + k_4e_4. \end{cases} \quad (17)$$

于是有

$$A = \begin{bmatrix} -36 & 36 & 0 & 0 \\ -16 & 28 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & -y_1 & 0 \\ x_2 & y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据混沌系统的状态有界性,在本实例中,存在常数 $M_2 > 0$ 满足 $|x_i| \leq M_2, i = 2, 3$. 于是可得

$$\lambda = 29.5321,$$

$$\lambda_N = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}/2 \leq \sqrt{M_2^2 + M_2^2}/2.$$

由图4可知 $M_2 = 25$, 则

$$\max\{k_i^*\} \leq -(\lambda + \lambda_N) = -47.2071.$$

取 $\alpha = 0.9$, 系统参数为 $a = 36, b = -16, c = 28, d = 3, g = 0.3, L = \text{diag}(-48, -48, -48, -48), (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (-1, -1, -1, -2)$, 驱动系统(15)和响应系统(16)的初值分别设为 $(3, 1, 5, 2)^T$ 和 $(6, 4, 2, 6)^T$, 在 $t = 0.5$ s 时加入控制. 图5和图6分别给出了同步误差 e_i 的响应曲线和反馈控制增益系数 k_i 的收敛曲线, 从仿真结果可以看出响应系统(16)与驱动系统(15)实现同步, 反馈控制增益系数收敛于恒定的值.

5 结论

本文基于分数阶系统的类 Lyapunov 稳定性理论, 提出了一种新的自适应同步方法, 设计了自适应同步控制器和控制增益系数自适应律, 该方法可实现响应系统和驱动系统快速完全同步. 仿真结果与理论推导一致, 表明所提方法在处理分数阶混沌系统同步问题时具有很好的控制效果.

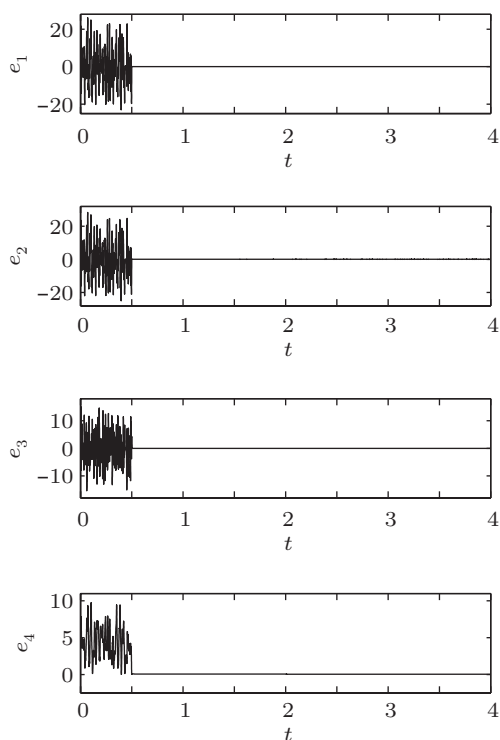


图 5 同步误差 e_i 的响应曲线

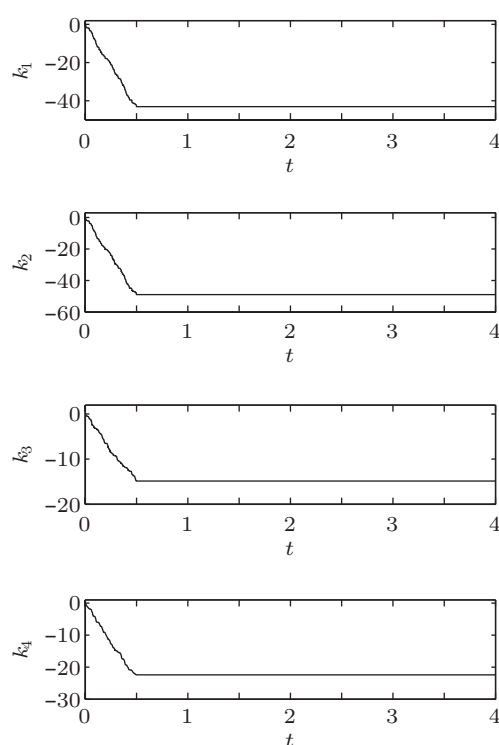


图 6 反馈控制增益系数 k_i 的收敛曲线

- [1] Gao X, Yu J B 2005 *Chin. Phys.* **14** 908
- [2] Lu J G 2006 *Physica A* **359** 107
- [3] Yu Y G, Li H X, Wang S 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **42** 1181
- [4] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A* **341** 55
- [5] Lu J G 2006 *Phys. Lett. A* **354** 305
- [6] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [7] Zhang H G, Ma T D, Huang G B, Wang Z L 2010 *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B* **40** 831
- [8] Wang M J, Wang X Y 2011 *Int. J. Mod. Phys. B* **25** 1283
- [9] Ma T D, Fu J, Sun Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 090502
- [10] Wang X Y, Liu R, Zhang N 2011 *Commun. Theor. Phys.* **55** 617
- [11] Zhang R X, Yang Y, Yang S P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6039 (in Chinese) [张若洵, 杨洋, 杨世平 2009 物理学报 **58** 6039]
- [12] Chen L P, Chai Y, Wu R C 2011 *Phys. Lett. A* **375** 2099
- [13] Wang M J, Wang X Y, Niu Y J 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010508
- [14] Wang X Y, Zhang Y L, Lin D, Zhang N 2011 *Chin. Phys. B* **20** 030506
- [15] Niu Y J, Wang X Y, Nian F Z, Wang M J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 120507
- [16] Jia L X, Dai H, Hui M 2010 *Chin. Phys. B* **19** 110509
- [17] Chen X R, Liu C X, Wang F Q, Li Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1416 (in Chinese) [陈向荣, 刘崇新, 王发强, 李永勋 2008 物理学报 **57** 1416]
- [18] Min F H, Yu Y, Ge C J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1456 (in Chinese) [闵富红, 余杨, 葛曹君 2009 物理学报 **58** 1456]
- [19] Wu Z M, Xie J Y 2007 *Chin. Phys. B* **16** 1901
- [20] Fu J, Yu M, Ma T D 2011 *Chin. Phys. B* **20** 120508
- [21] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2007 *Acta Phys. Sin.* **58** 2235 (in Chinese) [胡建兵, 韩焱, 赵灵冬 2007 物理学报 **58** 2235]
- [22] Matignon D 1996 *IMACS, IEEE SMC Proceedings Conference Lille, France, July 9–12, 1996* p963
- [23] Lu J G 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **26** 1125
- [24] Gao T G, Chen Z Q, Yuan Z Z, Yu D C 2007 *Chaos Soliton. Fract.* **33** 922

Adaptive synchronization of a class of fractional-order chaotic systems*

Ma Tie-Dong^{1)†} Jiang Wei-Bo¹⁾ Fu Jie²⁾ Chai Yi¹⁾
Chen Li-Ping¹⁾ Xue Fang-Zheng¹⁾

1) (College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

2) (Key Laboratory of Optoelectronic Technology and System, Ministry of Education, College of Optoelectronic Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

(Received 19 December 2011; revised manuscript received 15 January 2012)

Abstract

In view of chaos synchronization of a class of fractional-order chaotic systems, a novel adaptive controller and adaptive updating law are designed based on the quasi-Lyapunov stability theory for fractional-order systems. The derived method has some advantages such as simple structure, low control cost and high generality compared with the existing results. Furthermore, the method can be applied to most typical fractional-order chaotic systems. Finally, numerical simulations are used to illustrate the effectiveness of the proposed synchronization method.

Keywords: chaos synchronization, fractional-order chaotic systems, adaptive synchronization

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Jn, 05.45.Pq

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61104080), the Natural Science Foundation of Chongqing, China (Grant No. CSTC, 2010BB2238), the Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20100191120025), the China Postdoctoral Science Foundation (Grant Nos. 20100470813, 20100480043), and the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant No. CDJXS12170005).

† E-mail: tdma@cqu.edu.cn