

一种异结构分数阶混沌系统投影同步的新方法*

黄丽莲[†] 马楠

(哈尔滨工程大学信息与通信工程学院, 哈尔滨 150001)

(2011年12月15日收到; 2012年1月16日收到修改稿)

基于 Lyapunov 稳定性理论和分数阶系统稳定理论以及分数阶非线性系统性质, 提出了一种用来判定分数阶混沌系统是否稳定的新的判定定理, 并把该理论运用于对分数阶混沌系统的控制与同步, 同时给出了数学证明过程, 严格保证了该方法的正确性与一般适用性. 运用所提出的稳定性定理, 实现了异结构分数阶混沌系统的投影同步. 对分数阶 Lorenz 混沌系统与分数阶 Liu 混沌系统实现了投影同步; 针对四维超混沌分数阶系统, 也实现了异结构投影同步. 该稳定性定理避免了求解分数阶平衡点以及 Lyapunov 指数的问题, 从而可以方便地选择出控制律, 并且所得的控制器结构简单、适用范围广. 数值仿真的结果取得了预期的效果, 进一步验证了这一稳定性定理的正确性及普遍适用性.

关键词: 分数阶混沌系统, 稳定性, Lyapunov 理论, 投影同步

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Gg, 05.45.Pq

1 引言

混沌揭示了自然界以及人类社会中普遍存在的复杂性, 由于它对初始条件及其微小变化的高度敏感性及不稳定性, 长久以来人们觉得混沌是不可控制的、不可靠的, 因此在应用及工程领域中总是回避或抵制混沌现象. 1990年, Ott等^[1]首先提出了著名的 OGY 混沌控制方法, 从此, 混沌控制受到各个领域学者的高度重视^[2,3].

分数阶微积分已有 300 年的历史, 而分数阶微分理论也可追溯到 19 世纪. 虽然分数阶有着悠久的历史, 但将其应用到物理学和工程学的研究热潮还只是近几十年兴起的. 自 Pecora 和 Carroll 证明了两个混沌系统可以实现同步这一理论以来, 越来越多的学者致力于研究混沌系统的控制与同步^[4,5]. 近年来, 分数阶动力学系统的混沌控制与混沌同步也成了研究的重点^[6]. 对于整数阶混沌系统的研究已取得了诸多成果, 但研究表明, 整数阶只是分数阶的特例^[7], 分数阶比整数阶具有更普遍的意义.

1999年, Mainieri 和 Rehacek^[8]在部分线性混

沌系统中观察到一种新的同步——投影同步, 即驱动-响应系统同步到一个比例因子上, 这一比例因子统一了不同类型的混沌同步现象. 研究发现, 在保密通信中, 这一比例特性可将二进制数扩展到 M 进制数, 以实现更快的传输^[9,10]. 随后, 该类同步现象立即引起人们重视, Wang 和 Bu^[11]则首次将投影同步应用于混沌加密领域, 并取得了良好效果; Xu^[12]对混沌系统的投影同步现象进行深入研究, 提出了三维混沌系统投影同步的稳定性标准、任意维连续混沌系统出现投影同步的判断准则以及任意维离散混沌系统出现投影同步的必要条件, 又将投影同步技术应用于混沌保密通信. 2005年, Wen 和 Xu^[13]提出了全局映射同步的概念, Hu 等^[14]在此基础上又提出全局混合映射同步. 因此, 对投影同步的研究具有重要的理论意义和应用前景.

本文在上述研究的基础上, 基于 Lyapunov 第二稳定性理论、分数阶系统稳定理论和分数阶非线性系统性质, 提出了一个新的稳定理论, 并将其应用到异结构投影同步中. 该理论很好地避免了以往必须求取平衡点和 Lyapunov 指数的难题, 得到的控制器结构简单且适用范围广, 通过仿真实例证

* 国家自然科学基金 (批准号: 61172038) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: HEUCFT1203) 资助的课题.

[†] E-mail: lilian.huang@163.com

明了该理论在异结构分数阶混沌系统投影同步中的可行性.

2 分数阶系统基本理论

2.1 分数阶系统稳定性理论

1996年, Matignon^[15]提出分数阶系统稳定性理论,给出了判断分数阶系统稳定性的充要条件.

引理 1 考虑分数阶混沌系统

$$D^\alpha X(t) = AX(t), \quad (1)$$

其中 $0 < \alpha < 1$, $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ 为系统的状态变量, A 为系数矩阵. 当矩阵 A 的特征值满足 $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ 时, 该系统为渐进稳定. 当矩阵 A 的特征值满足 $|\arg(\lambda)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$ 时, 该系统稳定. α 阶线性系统的稳定区域如图 1 所示.

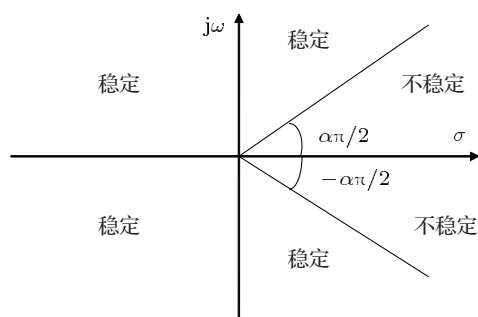


图 1 分数阶状态空间系统的稳定区间图

2.2 基于 Lyapunov 第二方法的稳定性理论

根据 Lyapunov 第二方法的基本思想, 考虑如下系统

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad (2)$$

对于系统 (2), 在区域 $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^n$ 内, 如果存在一个具有连续一阶导数的标量函数 $V(x)$, 使得对于 $x \in \mathbb{D}$, $V(x)$ 是正定的, $\dot{V}(x)$ 是半负定的, 则系统的平衡点是稳定的; 如果在 \mathbb{D} 内, $\dot{V}(x)$ 是负定的, 则系统的平衡点是渐近稳定的. 由此, 我们可以找到相对应的 Lyapunov 方法.

定理 1 若对系统 (2), 有如下 Lyapunov 方程

$$A^T(P^T Q + P Q^T) + (P^T Q + P Q^T)A + P^T P = 0, \quad (3)$$

其中, $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 均为正定对称阵. 当取 $V = X^T P^T Q X + X^T P Q^T X$ 时, 则有

$$\dot{V} = X^T A^T P^T Q X + X^T P^T Q A X$$

$$\begin{aligned} &+ X^T A^T P Q^T X + X^T P Q^T A X \\ &= X^T (A^T P^T Q + P^T Q A + A^T P Q^T \\ &\quad + P Q^T A) X \\ &= X^T [A^T (P^T Q + P Q^T) \\ &\quad + (P^T Q + P Q^T) A] X, \end{aligned} \quad (4)$$

由于 $P \neq 0$, 则有 $P^T P > 0$, 即 $A^T (P^T Q + P Q^T) + (P^T Q + P Q^T) A < 0$, 从而 $\dot{V} < 0$, 系统稳定.

当 Q 为单位阵时, 取 Lyapunov 方程为

$$A^T (P^T + P) + (P^T + P) A + P^T P = 0, \quad (5)$$

令 $V = X^T P^T X + X^T P X$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= X^T [A^T (P^T + P) + (P^T + P) A] X \\ &= -X^T P^T P X < 0, \end{aligned} \quad (6)$$

P 为实对称正定矩阵, 则 $P^T = P$, 有

$$\begin{aligned} &A^T (P^T + P) + (P^T + P) A \\ &= 2A^T P + 2P A \\ &= 2(A^T P + P A) < 0, \end{aligned} \quad (7)$$

因此, 系统 (2) 渐进稳定.

上述定理是对 Lyapunov 第二方法的引申, 下面我们将根据这一定理, 给出新的分数阶稳定判定定理.

3 分数阶系统稳定判定新方法

由于整数阶微积分是分数阶微积分的特例, 若整数阶系统稳定, 则其同形的分数阶系统也稳定^[16]. 因此, 根据上述理论, 本文提出了分数阶混沌系统的新的稳定判定定理.

定理 2 考虑分数阶系统

$$D^\alpha X(t) = AX(t), \quad (8)$$

其中, α 为阶数且 $0 < \alpha < 1$, A 为系数矩阵, $X^H(t)$ 是 $X(t)$ 的厄米矩阵. 有实对称正定矩阵 P , 若

$$\begin{aligned} &(D^\alpha X(t))^H P X(t) + X^H(t) P D^\alpha X(t) \\ &+ X^H(t) P X(t) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^H,$$

成立, 则系统 (8) 稳定.

证明 由于 P 为实对称正定矩阵, 有 $-X^H(t) P X(t) \leq 0$, 即

$$(D^\alpha X(t))^H P X(t) + X^H(t) P D^\alpha X(t) \leq 0, \quad (10)$$

将 (8) 式代入 (10) 式可得

$$(\mathbf{A}\mathbf{X}(t))^{\mathbf{H}}\mathbf{P}\mathbf{X}(t) + \mathbf{X}^{\mathbf{H}}(t)\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{X}(t) \leq 0, \quad (11)$$

则有

$$\begin{aligned} & \mathbf{X}^{\mathbf{H}}(t)\mathbf{A}^{\mathbf{H}}\mathbf{P}\mathbf{X}(t) + \mathbf{X}^{\mathbf{H}}(t)\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{X}(t) \\ & = \mathbf{X}^{\mathbf{H}}(t)(\mathbf{A}^{\mathbf{H}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{X}(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

假设以 λ 为 \mathbf{A} 的特征值, 对应的特征向量为 ξ , 并分别以 $\xi^{\mathbf{H}}$ 和 ξ 表示 $\mathbf{X}^{\mathbf{H}}(t)$ 和 $\mathbf{X}(t)$, 显然 $\mathbf{A}\xi = \lambda\xi$, $(\mathbf{A}\xi)^{\mathbf{H}} = \xi^{\mathbf{H}}\mathbf{A}^{\mathbf{H}} = \bar{\lambda}\xi^{\mathbf{H}}$, 则 (12) 式改写为 $\xi^{\mathbf{H}}(\mathbf{A}^{\mathbf{H}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\xi \leq 0$, 即 $(\bar{\lambda} + \lambda)\xi^{\mathbf{H}}\mathbf{P}\xi \leq 0$, 由于 $\xi^{\mathbf{H}}\mathbf{P}\xi > 0$, 因此 $(\bar{\lambda} + \lambda) \leq 0$, 即 λ 实部不大于零, 也就是矩阵 \mathbf{A} 的任意特征值 λ 都满足 $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$, $0 < \alpha < 1$. 根据引理 1, 则系统 (8) 稳定, 得证.

通过定理 2, 我们可以很方便地判断一个分数阶系统是否稳定, 同时避免了计算平衡点以及 Lyapunov 指数的步骤. 在判断异结构系统是否同步时, 我们可以将定理 2 中的状态变量 $\mathbf{X}(t)$ 换成误差系统. 下面我们通过投影同步, 来验证这一定理在异结构分数阶系统中是否有效.

4 异结构分数阶系统投影同步

投影同步是由 Mainieri 和 Rehacek 首先提出来的, 他们在研究部分线性混沌系统中观察到这种新的同步现象, 即在一定条件下耦合某些部分线性混沌系统时, 不仅可以使耦合的驱动系统和响应系统状态的相位锁定, 而且各对应状态的振幅还按某一固定的比例关系同步, 他们将这种同步方式取名为投影同步. 这一比例因子统一了不同类型的混沌同步现象, 反相同步和完全同步分别是映射同步中比例因子为 -1 和 1 的特殊情况. 投影同步以其在保密通信中的高安全性和高传输速度, 引起了众多学者的关注 [17].

文献 [10] 提出全局混合投影同步, 即设系统 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ 为驱动系统, $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是响应系统, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ 为相应的状态变量. 如果存在一个非零常数矩阵 $\mathbf{k} = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y} - \mathbf{k}\mathbf{x}\| = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i - k_i x_i\| = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则该驱动系统和响应系统之间是全局混合投影同步的.

下面我们通过两组数值仿真实例, 来验证投影同步异结构分数阶系统时定理 2 是否有效.

4.1 仿真实例

自 1963 年, 美国气象学家 Lorenz [18] 发现了第一个数学和物理模型 Lorenz 系统以来, 人们已不断地探索寻找出了很多的混沌系统. 这里我们首先以分数阶 Lorenz 混沌系统为驱动系统, 以分数阶 Liu 混沌系统为响应系统. 驱动系统及响应系统模型分别为

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = -10x_1 + 10x_2, \\ D^\alpha x_2 = 28x_1 - x_2 - x_1x_3, \\ D^\alpha x_3 = x_1x_2 - \frac{8}{3}x_3, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} D^\alpha y_1 = -10y_1 + 10y_2 + u_1(t), \\ D^\alpha y_2 = 40y_1 - y_1y_3 + u_2(t), \\ D^\alpha y_3 = 4y_1^2 - 2.5y_3 + u_3(t). \end{cases} \quad (14)$$

定义投影同步误差为 $e_i = y_i - kx_i$, 则有

$$\begin{cases} D^\alpha e_1 = -10e_1 + 10e_2 + u_1(t), \\ D^\alpha e_2 = 28e_1 + 12y_1 + kx_2 + kx_1x_3 \\ \quad - y_1y_3 + u_2(t), \\ D^\alpha e_3 = -\frac{8}{3}e_3 + 4y_1^2 + \frac{0.5}{3}y_3 \\ \quad - kx_1x_2 + u_3(t). \end{cases} \quad (15)$$

对于误差系统 (15) 式, 可选取合适的实对称正定

矩阵 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$. 为计算简便, 此处选 \mathbf{P}

为单位阵. 要使两个系统同步, 也就是要选择合适的控制器 $\mathbf{U}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$, 使得误差系统趋于 0, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0$. 根据定理 2, 选取控制器 $\mathbf{U}(t)$ 为

$$\begin{cases} u_1(t) = -10y_2 + 10kx_2, \\ u_2(t) = -28kx_1 - 40y_1 - y_2 \\ \quad - kx_1x_3 + y_1y_3, \\ u_3(t) = kx_1x_2 - 4y_1^2 - \frac{0.5}{3}y_3. \end{cases} \quad (16)$$

本文中均采用预估 - 校正法 [19] 来对系统进行数值仿真. 令 $\alpha = 0.9$, 选取比例系数 $k = -0.3$, 系统初值分别为 $(x_{10}, x_{20}, x_{30})^{\mathbf{T}} = (-3.5, 4.2, 2.5)^{\mathbf{T}}$ 和 $(y_{10}, y_{20}, y_{30})^{\mathbf{T}} = (6, 4, 2)^{\mathbf{T}}$. 当 $t = 10$ s 时加入控制量 $\mathbf{U}(t)$, 仿真结果如图 2 所示.

通过图 2 我们可以看出, 当加入控制器即 $t = 10$ s 后, 两系统的误差快速的向零趋近, 两系统达到同步.

由于不同结构混沌系统之间的同步现象广泛存在,超混沌系统^[20]具有比低维混沌系统更加复杂的动力学特性,使得实现超混沌的控制、同步问题成为一项更具有挑战性的研究工作.尤其在保密通信^[20]中,超混沌比低维混沌系统具有更加良好的保密性能,增加了数据传输的复杂性,提高了数据通讯的保密性.这使得超混沌的研究成为近几年的热点^[21].下面我们以一组分数阶超混沌系统为例,来验证该理论的可行性.以分数阶超混沌 Lorenz 系统为驱动系统,选取一个新的分数阶超混沌系统为响应系统^[22].驱动系统及响应系统模型分别为

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = 10(x_2 - x_1) + x_4, \\ D^\alpha x_2 = 28x_1 - x_2 - x_1x_3, \\ D^\alpha x_3 = x_1x_2 - \frac{8}{3}x_3, \\ D^\alpha x_4 = -x_2x_3 - x_4, \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} D^\alpha y_1 = -10y_1 + y_2y_3 + y_3 + u_1(t), \\ D^\alpha y_2 = 2.5y_2 - y_1y_3 + u_2(t), \\ D^\alpha y_3 = y_1y_2 - 4y_3 - 2y_4 + u_3(t), \\ D^\alpha y_4 = -0.25y_1 + u_4(t). \end{cases} \quad (18)$$

同步误差为 $e_i = y_i - kx_i$, 则有

$$\begin{cases} D^\alpha e_1 = -10e_1 - 10kx_2 - kx_4 + y_3 + y_2y_3 + u_1(t), \\ D^\alpha e_2 = -e_2 - 28kx_1 + 3.5y_2 + kx_1x_3 - y_1y_3 + u_2(t), \\ D^\alpha e_3 = -4e_3 - \frac{4}{3}kx_3 - 2y_4 - kx_1x_2 + y_1y_2 + u_3(t), \\ D^\alpha e_4 = -e_4 - 0.25y_1 + y_4 + kx_2x_3 + u_4(t). \end{cases} \quad (19)$$

根据定理 2, 选取控制项 $U(t)$ 为

$$\begin{cases} u_1 = 10kx_2 + kx_4 - y_3 - y_2y_3, \\ u_2 = 28kx_1 - 3.5y_2 - kx_1x_3 + y_1y_3, \\ u_3 = \frac{4}{3}kx_3 + 2y_4 + kx_1x_2 - y_1y_2, \\ u_4 = 0.25y_1 - y_4 - kx_2x_3. \end{cases} \quad (20)$$

令 $\alpha = 0.98$, 比例系数 $k = 1.7$, 系统初值分别为

$$(x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})^T = (1, 2, 2, 3)^T,$$

$$(y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{40})^T = (2, 1, 1, 1)^T.$$

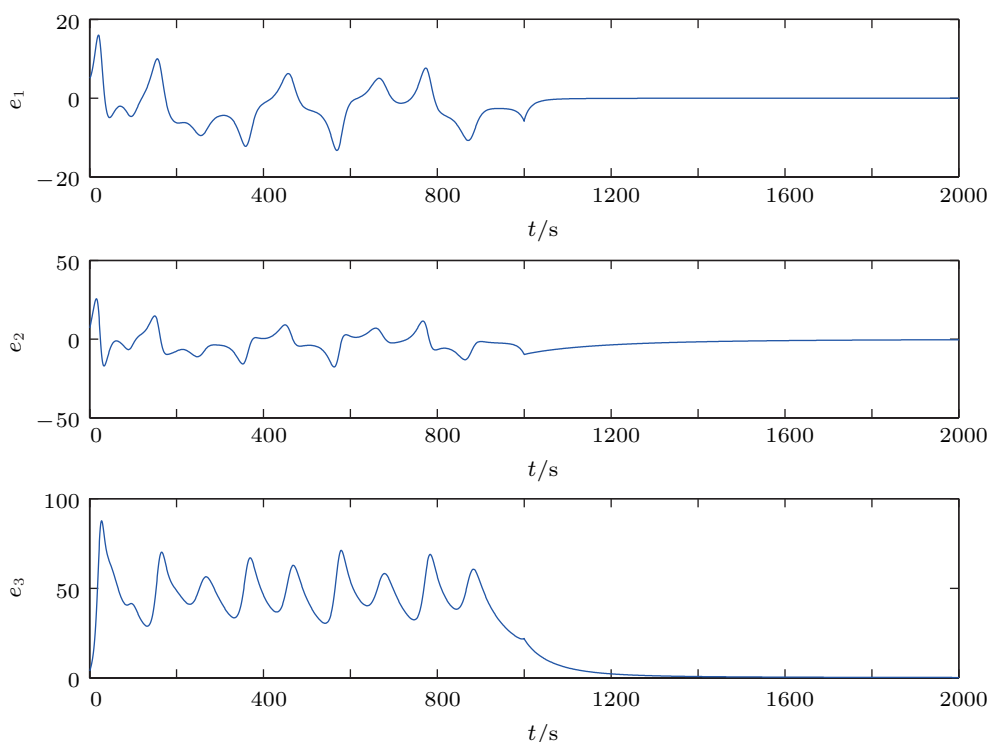


图 2 分数阶 Lorenz 系统与分数阶 Liu 系统投影同步误差

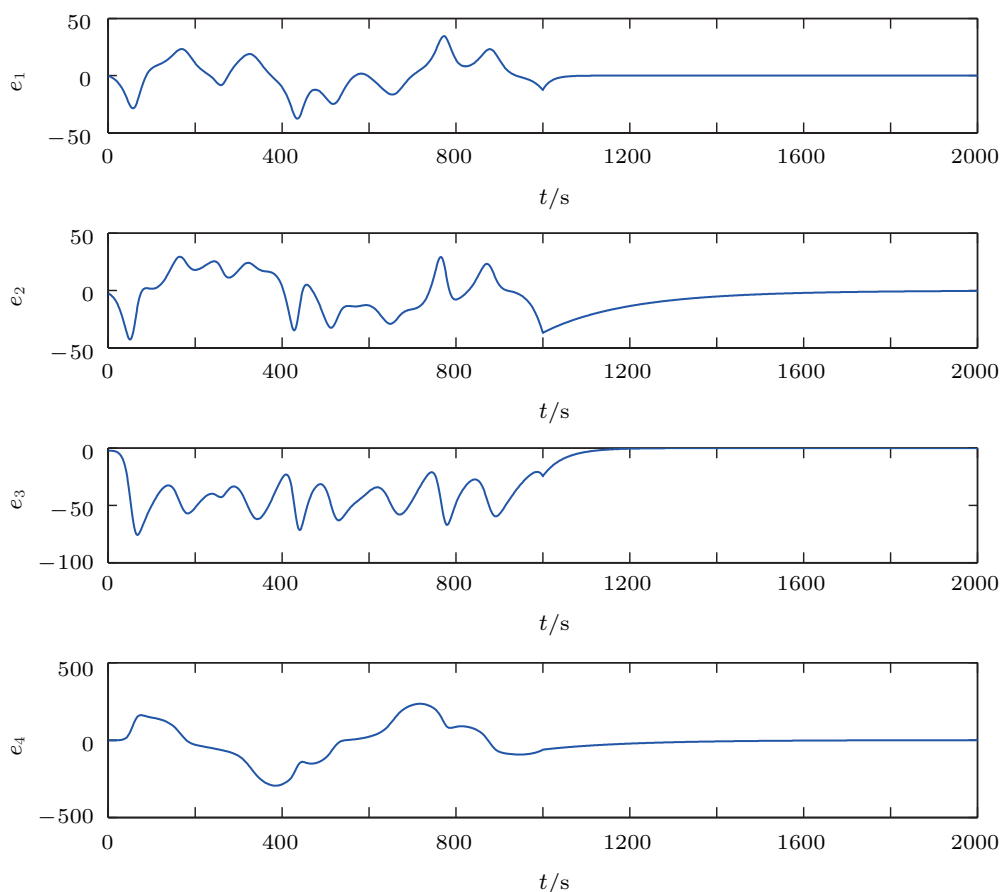


图3 两个分数阶超混沌系统同步误差

当 $t = 10 \text{ s}$ 时加入控制量 $U(t)$, 仿真结果如图 3 所示. 由图 3 可知, 两个超混沌系统在加入了控制器 $U(t)$ 之后, 能快速地达到同步.

由以上两个仿真结果我们可以得出, 通过定理 2 对分数阶混沌系统进行控制时, 两系统状态从任意初始条件出发, 当响应系统加上控制项 $U(t)$ 后, 随时间推移, 两系统能很快达到完全同步的效果, 这就证明了这个方法在异结构分数阶混沌系统投影同步中的可靠性.

5 结论

基于 Lyapunov 第二稳定性理论, 结合分数阶系统稳定理论和分数阶非线性系统性质, 提出了一种新的稳定性理论. 该理论避免了对系统平衡点及 Lyapunov 指数的计算, 可以方便地选取控制量, 对分数阶混沌系统进行同步控制. 然后分别以两组异结构分数阶混沌系统为控制对象, 运用新的稳定性理论, 均实现了分数阶系统的异结构投影同步. 数值仿真结果验证了这个新理论的有效性, 为今后混沌系统的进一步深入研究奠定了良好的基础.

- [1] Ott E, Grebogi C, Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1193
 [2] Liang C X, Tang J S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 135
 [3] Zhang H G, Fu J, Ma T D, Tong S C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 969
 [4] Li X J, Liu J, Dong P Z, Xing L F 2009 *J. Wuhan Univ. Sci. Eng.* **22** 30

- [5] Qiao Z M, Jin Y R 2010 *J. Anhui Univ. (Natural Science Edition)* **34** 23
 [6] Zhou P, Kuang F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6851 (in Chinese) [周平, 邝菲 2010 物理学报 **59** 6851]
 [7] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (New York:

- Academic Press)
- [8] Mainieri R, Rehacek J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 3042
- [9] Li Z G, Xu D 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **22** 477
- [10] Chee C Y, Xu D L 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **23** 1063
- [11] Wang B H, Bu S L 2004 *Int. J. Modern Phys. B* **18** 2415
- [12] Xu D L 2001 *Phys. Rev. E* **63** 027201
- [13] Wen G L, Xu D L 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **26** 71
- [14] Hu M F, Xu Z Y, Zhang R 2008 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **13** 456
- [15] Matignon D 1996 *IMACS, IEEE-SMC Lille, France, July, 1996* p963
- [16] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4402 (in Chinese) [胡建兵, 韩焱, 赵灵冬 2009 物理学报 **58** 4402]
- [17] Li N, Li J F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 110512 (in Chinese) [李农, 李建芬 2011 物理学报 **60** 110512]
- [18] Lorenz E N 1963 *Atmos. Sci.* **20** 130
- [19] Li C P, Peng G J 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **22** 443
- [20] Zhang R X, Yang S P, Liu Y L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1549 (in Chinese) [张若淘, 杨世平, 刘永利 2010 物理学报 **59** 1549]
- [21] Abdurahman K, Wang X Y, Zhao Y Z 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040506 (in Chinese) [阿布都热合曼·卡的尔, 王兴元, 赵玉章 2011 物理学报 **60** 040506]
- [22] Liu C X, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **22** 1031

A new method for projective synchronization of different fractional order chaotic systems*

Huang Li-Lian[†] Ma Nan

(College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

(Received 15 December 2011; revised manuscript received 16 January 2012)

Abstract

Based on the Lyapunov theory as the breakthrough point, and based on the fractional order system stability theory and properties of fractional nonlinear system, a kind of fractional-order chaotic system is proposed to determine whether the new theorem is stable, and the theory is used for fractional order control and synchronization of chaotic systems, and gives a mathematical proof process to strictly ensure the correctness of the method and general applicability. Then the proposed stability theorem is used to achieve the projective synchronization of fractional Lorenz chaotic system with fractional order chaotic Liu system, as well as the projective synchronization of four-dimensional hyperchaos of fractional order systems of different structures. In the stability theorem solving the fractional balance point and the Lyapunov index are avoided, therefore a control law can be easily selected, and the obtained controller has the advantages of simple structure and wide range of application. Finally, the expected numerical simulation results are achieved, which further proves the correctness and universal applicability of the stability theorem.

Keywords: fractional-order chaotic systems, stability, Lyapunov theory, projective synchronization

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Gg, 05.45.Pq

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61172038) and the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant No. HEUCFT1203).

[†] E-mail: lilian.huang@163.com