

## 截断的有振幅调制和位相畸变光束的等效曲率半径\*

邵晓利 季小玲<sup>†</sup>

(四川师范大学物理学院, 成都 610068)

(2012年1月3日收到; 2012年1月19日收到修改稿)

高功率激光通常具有振幅调制和相位畸变. 采用统计光学方法推导了截断的有振幅调制和位相畸变光束在大气湍流中传输的等效曲率半径  $R$  的解析公式. 研究表明: 随着位相畸变参量、振幅调制参量和光束截断参量的增大, 光束在自由空间中的  $R$  增大, 但  $R$  受湍流的影响也会增大; 并且高斯光束在自由空间中的  $R$  最大, 但其受湍流影响也最大. 因此, 在大气湍流中传输到足够远时, 截断的有振幅调制和位相畸变光束的  $R$  就要比高斯光束的大. 特别地, 相对等效曲率半径  $R_r$  随传输距离为非单调变化, 存在一个最小值, 即在该位置处  $R$  受湍流的影响最大. 此外, 达到  $R_r$  最小值所需传输距离随光束位相畸变和振幅调制的加剧而增大.

**关键词:** 截断的有振幅调制和位相畸变光束, 等效曲率半径, 大气湍流

**PACS:** 42.68.Bz, 42.25.Dd, 42.25.Kb

## 1 引言

在许多高功率激光系统(如高功率钕玻璃固体激光驱动器)中, 由于工作介质的增益饱和和效应、增益的非均匀性和非线性效应的影响, 使得激光束具有振幅调制和相位畸变<sup>[1]</sup>. 因此, 研究具有振幅调制和位相畸变光束的传输特性具有重要的理论和应用意义. Manes 和 Simmons<sup>[1]</sup> 指出, 这种畸变光束可以用具有高斯型相位随机变量的统计光学模型来描述. 美国劳伦兹-利弗莫尔国家实验室的 Novette 大型固体激光器的实验结果以及计算机 MALAPROP 程序数值模拟的结果均表明, 用统计光学方法描述具有振幅调制和位相畸变的光束是可行的<sup>[1,2]</sup>. 文献 [3, 4] 用统计光学方法分别推导出了有振幅调制和位相畸变光束通过多个硬边光阑 ABCD 光学系统和分数傅里叶光学系统的光强公式, 研究了其传输特性. 激光束的大气传输在遥感、跟踪和远距离光通信等领域的应用中都具有十分重要的意义, 近年来已有大量文献研究了各种激光束在湍流大气中的传输特性<sup>[5-17]</sup>. 迄今为止, 大气湍流对有振幅调制和位相畸变光束传输特性影响的研究涉及甚少. 最近, 我们研究了受光阑

限制的振幅调制和位相畸变光束通过大气湍流传输的光强分布和远场光束质量<sup>[18]</sup>.

用统计光学方法描述的具有振幅调制和位相畸变光束, 由于振幅调制扩展到整个空间, 使得其光束的二阶矩发散. 实际激光在产生和传输过程不可避免地要受到光阑限制. 但是, 截断光束的二阶矩也会遇到发散问题. 本文将采用硬边光阑窗口函数复高斯展开法<sup>[19]</sup>, 克服二阶矩发散问题. 硬边光阑窗口函数复高斯展开法是用若干个软光阑的叠加近似代替硬边光阑的方法. 已证明该近似方法的精度高<sup>[20]</sup>.

光束的等相面曲率半径是描述光束波前特性的重要参数, 但是由于一般光束的等相面为非球面或非高斯面, 使得解析方法研究等相面传输特性遇到很大困难. Miguel 等<sup>[21]</sup> 提出采用球面拟合非球面或非高斯等相面的方法, 但没有能够给出拟合等相面曲率半径的简单解析式. Ricklin 和 Davidson<sup>[22]</sup> 利用互相干函数给出了高斯-谢尔模型光束在大气湍流中的曲率半径公式, 但该方法仅适用于只含高斯项的光束. 值得指出的是, Weber<sup>[23]</sup> 提出的等效曲率半径的概念是解析研究非球面或非高斯等相面特性的有力工具. 最近, 我们采用等效曲率半径的方法解析研究了高斯阵列

\* 国家自然科学基金(批准号: 61178070)和四川省高校科研创新团队建设计划(批准号: 12TD008)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: jixl100@163.com

光束和部分相干平顶光束的曲率半径在湍流大气中的传输特性<sup>[24,25]</sup>. 迄今为止, 大气湍流对振幅调制和位相畸变光束的曲率半径的影响未见报道. 众所周知, 畸变光束比理想高斯光束质量差, 但理论和实验均证明, 部分相干光比理想高斯光束受湍流影响要小<sup>[5,6]</sup>. 那么振幅调制和位相畸变光束与理想高斯光束的等效曲率半径在自由空间的传输特性有何关系? 大气湍流对两者等效曲率半径传输特性的影响又如何? 本文拟对这些问题进行深入研究.

## 2 理论模型及公式

在准单色场近似和高斯型随机位相畸变假设下, 有振幅调制和位相畸变光束的场分布可以用互强度描述为<sup>[1]</sup>

$$J(\rho'_1, \rho'_2, 0) = I \exp \left[ -\frac{(\rho'_1 - \rho'_2)^2 \sigma_p^2}{L_p^2} \right] + \sigma_A^2 \exp \left[ -\left( \frac{1}{L_A^2} + \frac{\sigma_p^2}{L_p^2} \right) (\rho'_1 - \rho'_2)^2 \right], \quad (1)$$

式中,  $\rho'_1 \equiv (x'_1, y'_1)$ ,  $\rho'_2 \equiv (x'_2, y'_2)$ ,  $L_A, L_p$  分别表示振幅调制和位相畸变的尺度,  $\sigma_A^2$  和  $\sigma_p^2$  分别为光强调制强度和位相误差幅度的尺度.  $\sigma_A^2$  越大,  $L_A$  越小, 表明振幅调制越显著.  $\sigma_p^2$  越大,  $L_p$  越小, 表明位相畸变越显著. 通常,  $I$  远大于噪声光强  $\sigma_A^2$ , 设  $I$  具有高斯分布, 即

$$I = \exp \left[ -(\rho_1'^2 + \rho_2'^2)/w_0^2 \right], \quad (2)$$

式中,  $w_0$  为光束的束腰半径.

硬边光阑的窗口函数可表示为二维矩形函数, 即

$$T(x, y) = \begin{cases} 1 & |x| \leq b, |y| \leq d \\ 0 & |x| > b, |y| > d \end{cases}, \quad (3)$$

式中  $b, d$  分别是  $x$  方向和  $y$  方向的光阑半宽度.

(3) 式表示的有限矩孔函数可展为有限级次的复高斯函数的叠加, 即<sup>[19]</sup>

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^M F_i \exp \left( -\frac{G_i x^2}{b^2} \right) \times \sum_{j=1}^M F_j \exp \left( -\frac{G_j y^2}{d^2} \right), \quad (4)$$

式中,  $F_i, F_j$  和  $G_i, G_j$  分别为展开系数和复高斯函数系数, 它们可由计算机优化得到. 当  $M = 10$  时, 其值见文献 [19] 中表 1.

根据广义惠更斯-菲涅耳衍射积分公式, 截断的有振幅调制和位相畸变光束在大气湍流中传输的互强度为<sup>[26]</sup>

$$J(\rho_1, \rho_2, z) = \left( \frac{k}{2\pi z} \right)^2 \int_{-b}^b \int_{-d}^d d^2 \rho'_1 d^2 \rho'_2 J(\rho'_1, \rho'_2, 0) \times \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(\rho_1'^2 - \rho_2'^2) - 2(\rho_1 \rho'_1 - \rho_2 \rho'_2) + (\rho_1^2 - \rho_2^2)] - H(\rho'_1, \rho'_2, \rho_1, \rho_2, z) \right\} = \left( \frac{k}{2\pi z} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho'_1 d^2 \rho'_2 T^*(\rho'_1) \times T(\rho'_2) J(\rho'_1, \rho'_2, 0) \times \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(\rho_1'^2 - \rho_2'^2) - 2(\rho_1 \rho'_1 - \rho_2 \rho'_2) + (\rho_1^2 - \rho_2^2)] - H(\rho'_1, \rho'_2, \rho_1, \rho_2, z) \right\}, \quad (5)$$

式中,  $*$  表示复共轭; 波数  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  为波长;  $z$  为传播距离;  $\exp[-H(\rho'_1, \rho'_2, z)]$  代表大气湍流的影响, 并且<sup>[26]</sup>

$$H(\rho'_1, \rho'_2, \rho_1, \rho_2, z) = 4\pi^2 k^2 z \int_0^1 d\xi \int_0^\infty [1 - J_0(\kappa|\xi(\rho'_1 - \rho'_2) + (1 - \xi)(\rho_1 - \rho_2))|] \kappa \Phi_n(\kappa) d\kappa, \quad (6)$$

式中,  $J_0$  是零阶 Bessel 函数,  $\Phi_n(\kappa)$  为大气湍流介质的折射率起伏功率谱函数.

令  $\rho' = (\rho'_1 + \rho'_2)/2$ ,  $\rho'_d = \rho'_1 - \rho'_2$ ,  $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$ ,  $\rho_d = \rho_1 - \rho_2$ , (5) 式变换为

$$J(\rho, \rho_d, z) = \left( \frac{k}{2\pi z} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho' d^2 \rho'_d W(\rho', \rho'_d, 0) \times \exp \left\{ \frac{ik}{z} [(\rho - \rho')(\rho_d - \rho'_d)] - H(\rho_d, \rho'_d, z) \right\}, \quad (7)$$

式中

$$W(\rho', \rho'_d, 0) = T^*(\rho', \rho'_d) T(\rho', \rho'_d) J(\rho', \rho'_d, 0).$$

根据  $\delta$  函数的性质, 即

$$\delta(\rho'' - \rho') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\pm i\kappa_d \cdot (\rho'' - \rho')] d^2 \kappa_d, \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0), \quad (9)$$

可以得到

$$\begin{aligned} & W(\rho', \rho'_d, 0) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\rho'', \rho'_d, 0) \\ & \quad \times \exp[i\kappa_d \cdot (\rho'' - \rho')] d^2\kappa_d d^2\rho'', \quad (10) \end{aligned}$$

(9) 式中  $f$  为任意函数.

将 (10) 式代入 (7) 式, 并对  $\rho', \rho'_d$  进行积分得

$$\begin{aligned} & J(\rho, \rho_d, z) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\rho'', \rho_d + z\kappa_d/k, 0) \\ & \quad \times \exp[-i\rho \cdot \kappa_d + i\kappa_d \cdot \rho'' \\ & \quad - H(\rho_d, \rho_d + z\kappa_d/k, z)] d^2\kappa_d d^2\rho'', \quad (11) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} & W(\rho'', \rho_d + z\kappa_d/k, 0) \\ &= \sum_{i_1=1}^M \sum_{j_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \sum_{j_2=1}^M F_{i_1}^* F_{j_1}^* F_{i_2} F_{j_2} \\ & \quad \times \exp\left[-\frac{G_{i_1}^*}{b^2} \left(x'' + \frac{\rho_{dx} + z\kappa_{dx}/k}{2}\right)^2\right] \\ & \quad \times \exp\left[-\frac{G_{j_1}^*}{d^2} \left(y'' + \frac{\rho_{dy} + z\kappa_{dy}/k}{2}\right)^2\right] \\ & \quad \times \exp\left[-\frac{G_{i_2}}{b^2} \left(x'' - \frac{\rho_{dx} + z\kappa_{dx}/k}{2}\right)^2\right] \\ & \quad \times \exp\left[-\frac{G_{j_2}}{d^2} \left(y'' - \frac{\rho_{dy} + z\kappa_{dy}/k}{2}\right)^2\right] \\ & \quad \times \left\{ \exp\left[-\frac{4\rho''^2 + (\rho_d + z\kappa_d/k)^2}{2w_0^2}\right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{(\rho_d + z\kappa_d/k)^2 \sigma_p^2}{L_p^2}\right\} + \sigma_A^2 \exp\left[-\left(\frac{1}{L_A^2}\right.\right. \\ & \quad \left.\left. + \frac{\sigma_p^2}{L_p^2}\right)(\rho_d + z\kappa_d/k)^2\right]. \quad (12) \end{aligned}$$

截断的有振幅调制和位相畸变光束在大气湍流中传输到  $z$  处的 Wigner 分布函数 (WDF) 可用互强度表示为 [27]

$$\begin{aligned} h(\rho, \theta, z) &= \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} J(\rho, \rho_d, z) \\ & \quad \times \exp(-ik\theta \cdot \rho_d) d^2\rho_d, \quad (13) \end{aligned}$$

式中,  $\theta = (\theta_x, \theta_y)$ ,  $k\theta_x, k\theta_y$  是沿着  $x, y$  轴的波矢量.

在湍流中的三维光束的 WDF 的  $n_1 + n_2 + m_1 + m_2$  阶强度矩表示为 [27]

$$\begin{aligned} & \langle x^{n_1} y^{n_2} \theta_x^{m_1} \theta_y^{m_2} \rangle \\ &= \frac{1}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n_1} y^{n_2} \theta_x^{m_1} \theta_y^{m_2} \\ & \quad \times h(\rho, \theta, z) d^2\rho d^2\theta, \quad (14) \end{aligned}$$

其中  $P = \iint h(\rho, \theta, z) d^2\rho d^2\theta$  代表光束总能量. 光束的强度矩具有明确的物理意义, 例如: 二阶矩  $\langle \rho^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle$  表示束宽的平方,  $\langle x\theta_x \rangle$  和  $\langle y\theta_y \rangle$  与光束等相面曲率半径成反比.

将 (13) 式代入 (14) 式, 并运用积分公式

$$\delta^{(n)}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^n \exp(-isx) dx, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0) \\ & \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (16) \end{aligned}$$

式中  $\delta^{(n)}$  和  $f^{(n)}$  分别表示  $\delta$  函数和  $f$  函数的  $n$  阶导数, 经过复杂的积分运算得到

$$\langle x^2 \rangle = A + (D/k)z + (B/k^2)z^2 + (2/3)Tz^3, \quad (17)$$

$$\langle x\theta_x \rangle = (D/2k) + (B/k^2)z + Tz^2, \quad (18)$$

其中

$$A = \frac{\pi\zeta_x\zeta_y w_0^2}{P} \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M \left[ C \frac{\zeta_x^2 w_0^2}{2(G_{i_1}^* + G_{i_2}) + 4\zeta_x^2} + \sigma_A^2 E \frac{\zeta_x^2 w_0^2}{2(G_{i_1}^* + G_{i_2})} \right], \quad (19)$$

$$D = \frac{i\pi\zeta_x\zeta_y w_0^2}{P} \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M \left( C \frac{G_{i_1}^* - G_{i_2}}{G_{i_1}^* + G_{i_2} + 2\zeta_x^2} + \sigma_A^2 E \frac{G_{i_1}^* - G_{i_2}}{G_{i_1}^* + G_{i_2}} \right), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\pi\zeta_x\zeta_y w_0^2}{P} \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M \left\{ C \left[ \frac{1}{w_0^2} + \frac{2}{\alpha^2 w_0^2} + \frac{\zeta_x^2 (G_{i_1}^* + G_{i_2}) + 2G_{i_1}^* G_{i_2}}{(G_{i_1}^* + G_{i_2}) w_0^2 \zeta_x^2 + 2\zeta_x^4 w_0^2} \right] \right. \\ & \quad \left. + \sigma_A^2 E \left[ \frac{2}{L_A^2} + \frac{2}{\alpha^2 w_0^2} + \frac{2G_{i_1}^* G_{i_2}}{(G_{i_1}^* + G_{i_2}) \zeta_x^2 w_0^2} \right] \right\}, \quad (21) \end{aligned}$$

$$P = \pi \zeta_x \zeta_y w_0^2 \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \sum_{j_1=1}^M \sum_{j_2=1}^M (C + \sigma_A^2 E), \quad (22)$$

$$C = \frac{F_{i_1}^* F_{i_2}^* F_{j_1}^* F_{j_2}^*}{\sqrt{G_{i_1}^* + G_{i_2} + 2\zeta_x^2} \sqrt{G_{j_1}^* + G_{j_2} + 2\zeta_y^2}}, \quad (23)$$

$$E = \frac{F_{i_1}^* F_{i_2}^* F_{j_1}^* F_{j_2}^*}{\sqrt{G_{i_1}^* + G_{i_2}} \sqrt{G_{j_1}^* + G_{j_2}}}, \quad (24)$$

$$T = \pi^2 \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa, \quad (25)$$

$\alpha = (L_p/w_0)/\sigma_p$  表示位相畸变参量, 描述位相畸变的强弱;  $\alpha$  越小, 表明位相畸变越显著.  $\zeta_x = a/w_0$  和  $\zeta_y = b/w_0$  分别表示  $x, y$  轴方向上的光束截断参量, 描述光阑对光束截断的强弱. 光束截断参量越小, 表明截断越强.

根据文献 [23], 任意场沿  $x$  轴的等效曲率半径可表示为

$$R = \langle x^2 \rangle / \langle x \theta_x \rangle. \quad (26)$$

将 (17) 式和 (18) 式代入 (26) 式, 得到截断的有振幅调制和位相畸变光束在大气湍流中传输的等效曲率半径

$$R = \frac{A + (D/k)z + (B/k^2)z^2 + (2/3)Tz^3}{(D/2k) + (B/k^2)z + Tz^2}. \quad (27)$$

同理, 将 (27) 式中  $G_{i_1}^*, G_{i_2}, \zeta_x, \zeta_y$  替换为  $G_{j_1}^*, G_{j_2}, \zeta_y, \zeta_x$  即可得到  $y$  方向上的等效曲率半径.

(27) 式是本文的主要结果. 从该式可以看出: 截断的有振幅调制和位相畸变光束的等效曲率半径不仅与位相畸变参量  $\alpha$ , 振幅调制参量  $\sigma_A^2$ , 光束截断参量  $\zeta_x, \zeta_y$  有关, 还与湍流强弱  $C_n^2$  有关. (27) 式具有一般性, 当  $\sigma_A^2 = 0$  时, (27) 式简化为截断的仅有位相畸变光束通过大气湍流传输的等效曲率半径; 当  $\alpha \rightarrow \infty$  ( $\sigma_p^2 \rightarrow 0$ ) 时, (27) 式简化为截断的仅有振幅调制光束通过大气湍流传输的等效曲率半径; 当  $\sigma_A^2 = 0$  和  $\alpha \rightarrow \infty$  同时满足时, (27) 式简化为截断的高斯光束通过大气湍流传输的等效曲率半径; 当  $T = 0$ , (27) 式简化为截断的有振幅调制和位相畸变光束在自由空间中传输的等效曲率半径.

### 3 数值计算结果与分析

数值计算中采用 Tatarskii 谱, 即 [26]

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3} \exp(-\kappa^2/\kappa_m^2), \quad (28)$$

式中,  $\kappa_m = 5.92/l_0$ ,  $l_0$  是湍流内尺度,  $C_n^2$  是折射率结构常数, 表征湍流的强弱. 当湍流内尺度取值  $l_0 = 0.01$  m 时, 将 (28) 式代入 (25) 式积分后得:  $T = 7.6113 C_n^2$ .

数值计算中取光束参数  $\lambda = 1.06$   $\mu\text{m}$ ,  $w_0 = 0.05$  m,  $\zeta_x = \zeta_y = \zeta$ ;  $M, F_i, F_j, G_i$  和  $G_j$  采用文献 [19] 表 1 中的数据. 由于截断的有振幅调制和位相畸变光束在  $x$  方向和  $y$  方向的等效曲率半径变化特性相同, 本文数值计算中仅对  $x$  方向的等效曲率半径在大气湍流中的变化做研究. 同时, 引入相对等效曲率半径  $R_r = R/R_{\text{free}}$  来描述湍流对等效曲率半径的影响, 式中  $R_{\text{free}}$  表示真空中对应光束的等效曲率半径.  $R_r$  越小, 表示  $R$  受湍流的影响越大.

图 1 为  $R$  随  $C_n^2$  的变化曲线. 图 1 表明湍流使  $R$  减小, 湍流越大,  $R$  越小. 图 2(a) 为不同位相畸变参量  $\alpha$  下, 截断的仅有位相畸变光束的  $R$  随传输距离  $z$  的变化曲线. 图 2(a) 表明: 自由空间中随着  $\alpha$  的增大,  $R$  及  $R$  最小值距  $z = 0$  面的距离增大. 显然, 截断高斯光束 ( $\alpha \rightarrow \infty$ ) 的  $R$  及  $R$  最小值距  $z = 0$  面的距离比截断的仅有位相畸变光束的要大. 随着  $z$  的增大, 不同  $\alpha$  的  $R$  曲线靠拢. 图 2(b) 为  $R_r$  随位相畸变参量  $\alpha$  的变化曲线. 图 2(b) 表明:  $\alpha$  越大,  $R$  受湍流的影响越大. 截断高斯光束的  $R$  受湍流的影响比截断的有位相畸变光束的要大, 这就使得光束在湍流中传输到一定距离之后,  $R$  随着  $\alpha$  的增大而减小 (见图 2(a)).

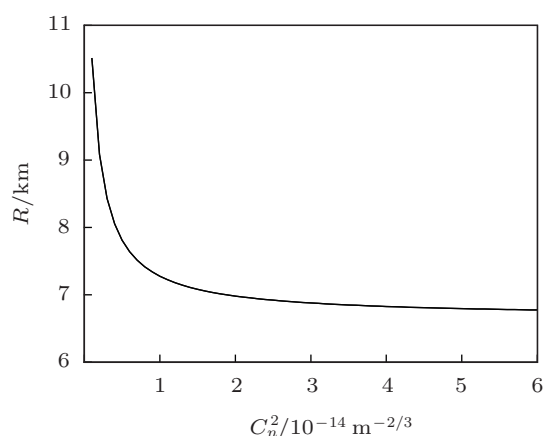


图 1 截断的有振幅调制和位相畸变光束  $R$  随  $C_n^2$  的变化  $\alpha = 0.5, \sigma_A^2 = 0.2, L_A^2 = 1, \zeta = 1, z = 10$  km

图 3(a) 为不同振幅调制参量  $\sigma_A^2$  下, 截断的仅有振幅调制光束的  $R$  随  $z$  的变化曲线. 图 3(a) 表明: 自由空间中  $\sigma_A^2$  越大,  $R$  及  $R$  最小值距  $z = 0$  面的距离越大. 显然, 截断高斯光束 ( $\sigma_A^2 = 0$ ) 的  $R$

及  $R$  最小值距  $z = 0$  面的距离比截断的仅有振幅调制光束的要小. 随着  $z$  的增大, 不同  $\sigma_A^2$  的  $R$  曲线靠拢. 图 3(b) 为  $R_r$  随振幅调制参量  $\sigma_A^2$  的变化曲线. 图 3(b) 表明:  $\sigma_A^2$  越大, 湍流对  $R$  的影响越大. 截断高斯光束的  $R$  受湍流的影响比截断的仅有振幅调制光束的要小, 因此, 光束在湍流中传输到一定距离之后,  $R$  随着  $\sigma_A^2$  的增大而

减小 (见图 3(a)).

图 4(a) 为不同截断参量  $\zeta$  下  $R$  随  $z$  的变化曲线. 图 4(a) 表明: 在自由空间中随着  $\zeta$  的增加,  $R$  及  $R$  最小值距  $z = 0$  面的距离均增大. 图 4(b) 为  $R_r$  随截断参量  $\zeta$  的变化曲线. 图 4(b) 表明:  $\zeta$  越大,  $R$  受湍流的影响越大, 所以, 光束在湍流中传输到一定距离之后,  $R$  随着  $\zeta$  的增加而减小 (见图 4(a)).

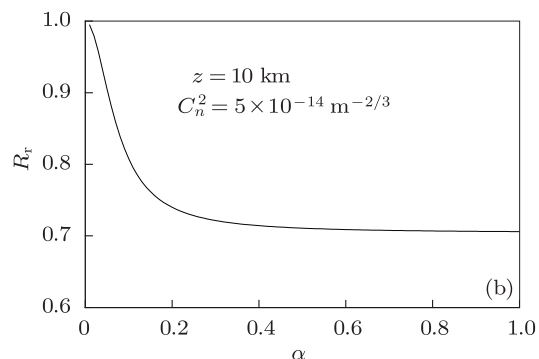
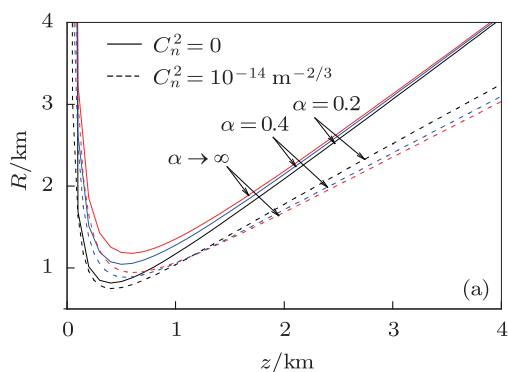


图 2 截断的仅有位相畸变光束,  $L_A^2 = 1, \sigma_A^2 = 0, \zeta = 0.5$  (a)  $R$  随  $z$  的变化; (b)  $R_r$  随  $\alpha$  的变化

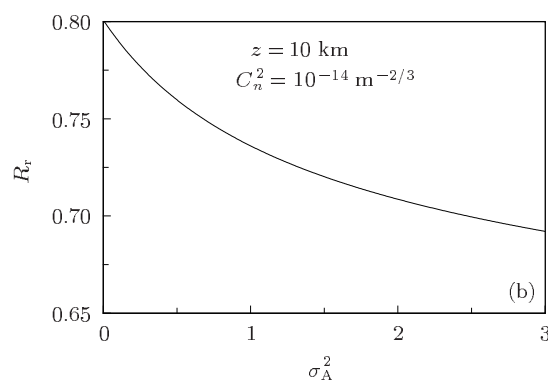
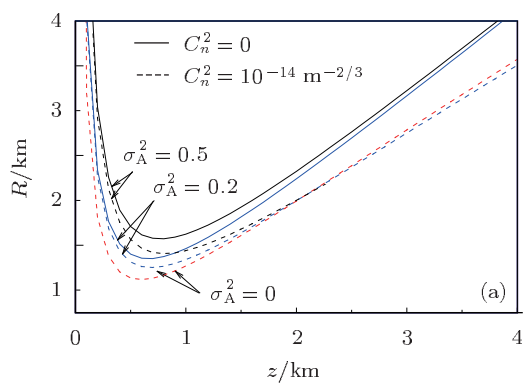


图 3 截断的仅有振幅调制光束,  $L_A^2 = 1, \alpha \rightarrow \infty, \zeta = 0.5$  (a)  $R$  随  $z$  的变化; (b)  $R_r$  随  $\sigma_A^2$  的变化

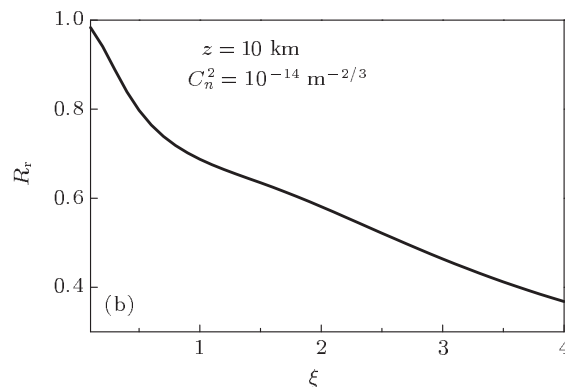
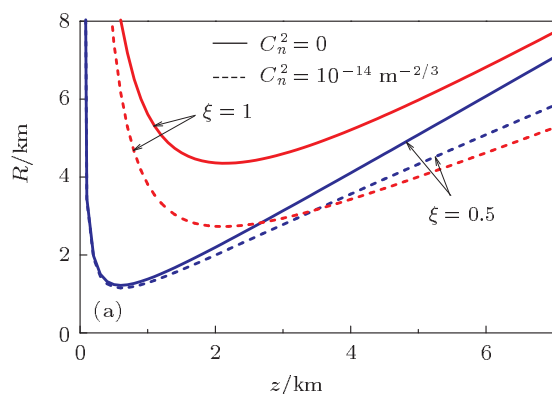


图 4 截断的有振幅调制和位相畸变光束,  $L_A^2 = 1, \alpha = 0.5, \sigma_A^2 = 0.2$  (a)  $R$  随  $z$  的变化; (b)  $R_r$  随  $\zeta$  的变化

仅有位相畸变和仅有振幅调制截断光束的  $R_r$  随  $z$  的变化曲线分别示于图 5(a) 和 (b). 图 5 表明  $R_r$  随  $z$  为非单调变化,  $R_r$  存在一个最小值, 即在该位置处  $R$  受湍流影响最大, 且在该位置附近不同光束间  $R_r$  的差别也最大. 此外, 达到  $R_r$  最小值光束的传输距离随  $\alpha$  的增大和  $\sigma_A^2$  的减小而减小, 截断高斯光束达到  $R_r$  最小值所需传输距离最短. 例如, 由图 5(a) 可知, 当  $\alpha = 0.5, 0.7$  和  $\infty$  时,  $R_r$  达到最小值的位置分别为 1957.6, 1825.78 和 1771.27 m; 由图 5(b) 可知, 当  $\sigma_A^2 = 0, 0.2$  和  $0.5$  时,  $R_r$  达到最小值的位置分别为 1771.27, 1913.63 和 2016.47 m. 另一方面, 当光束传输到足够远时, 不同光束的  $R_r$  相接近, 并趋于定值, 即当光束传输到足够远时,  $R_r$  与光束参数无关, 截断畸变光束的  $R_r$  与截断高斯光束的相同.

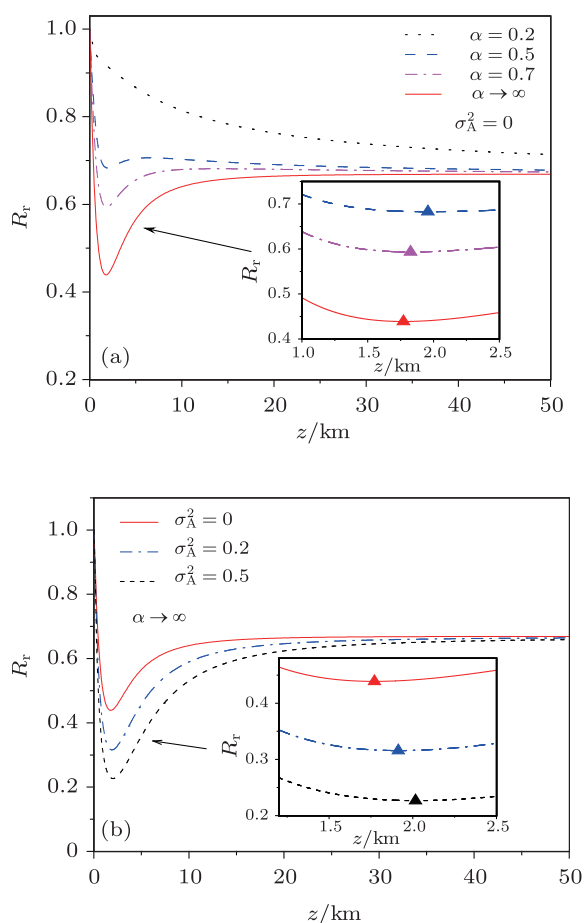


图 5  $R_r$  随  $z$  的变化,  $L_A^2 = 1, \zeta = 1, C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$   
(a) 仅有位相畸变光束; (b) 仅有振幅调制光束

激光在大气湍流中传输其光束等相面曲率半径由两个因素确定: 一是自由空间中光束的传输特性, 二是大气湍流的影响. 已证明, 湍流会导致光束等相面曲率半径减小 (见图 1). 物理上讲, 在自由空间中光束的等相面曲率半径越小就会导致大气湍流对等相面曲率半径的影响越小. 图 2(a) 和图 3(a) 表明, 在自由空间中, 光束等效曲率半径随位相畸变参量  $\alpha$  和振幅调制参量  $\sigma_A^2$  的减小而减小. 因此, 大气湍流对光束等效曲率半径的影响随  $\alpha$  和  $\sigma_A^2$  增大而增大.

### 4 结论

本文推导了截断的振幅调制和位相畸变光束在大气湍流中传输的等效曲率半径  $R$  的解析表达式. 该公式具有一般性, 几种典型光束 (如截断的仅位相畸变光束、仅振幅调制光束和高斯光束) 通过大气湍流和自由空间传输的等效曲率半径均可作为其特例给出. 研究表明: 在自由空间中,  $R$  随着位相畸变参量  $\alpha$ , 振幅调制参量  $\sigma_A^2$  和光束截断参量  $\zeta$  的增大而增大, 但随着折射率结构常数  $C_n^2$  的增大而减小. 然而,  $R$  受湍流的影响随着  $\alpha, \sigma_A^2$  和  $\zeta$  的增大而增大. 因此, 自由空间中高斯光束的等效曲率半径比截断的振幅调制和位相畸变光束的要大, 但受湍流影响也要大. 特别地, 相对等效曲率半径  $R_r$  随传输距离为非单调变化, 存在一个最小值, 即在该位置处  $R$  受湍流的影响最大, 且在该位置附近不同光束间  $R_r$  的差别也最大. 此外, 达到  $R_r$  最小值时的传输距离随  $\alpha$  的增大和  $\sigma_A^2$  的减小而减小, 截断高斯光束达到  $R_r$  最小值所需传输距离最短. 另一方面, 当光束传输到足够远时,  $R_r$  趋于定值, 且该定值与光束参数无关, 此时截断的振幅调制和位相畸变光束与截断高斯光束受湍流的影响近似相同.

一方面, 激光传输特性由光场的振幅和位相特性确定, 光场的等相面曲率半径的大小对激光束传输变换及成像起着重要作用; 另一方面, 瑞利长度用来描述激光束无明显扩展的传输距离, 即光束准直范围. 瑞利长度可定义为激光束等相面曲率半径达到极小值时光束的传输距离 [23,28]. 因此, 本文所得结果对畸变光束湍流大气传输的相关应用具有重要意义.

- [1] Manes K R, Simmons W W 1985 *J. Opt. Soc. Am. A* **2** 528
- [2] Simmons W W, Hunt J T, Warren W E 1981 *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-17** 1727
- [3] Lü B D, Ji X L 2004 *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **6** 161
- [4] Jiang H L, Zhao D M 2006 *Opt. Commun.* **264** 18
- [5] Gbur G, Wolf E 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 1592
- [6] Dogariu A, Amarande S 2003 *Opt. Lett.* **28** 10
- [7] Dan Y Q, Zhang B 2009 *Opt. Lett.* **34** 563
- [8] Pu J X, Korotkova O 2009 *Opt. Commun.* **282** 1691
- [9] Korotkova O, Wolf E 2007 *Opt. Lett.* **32** 2137
- [10] Zhou G Q 2011 *Opt. Express* **19** 3945
- [11] Mao H D, Zhao D M 2010 *Opt. Express* **18** 1741
- [12] Chu X X 2011 *Opt. Lett.* **36** 2701
- [13] Wu G H, Guo H, Yu S, Luo B 2010 *Opt. Lett.* **35** 715
- [14] Ji X L, Pu Z C 2010 *Chin. Phys. B* **19** 029201
- [15] Chen X W, Ji X L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 024203
- [16] Tao R M, Si L, Ma Y X, Zou Y C, Zhou P 2011 *Chin. Phys. B* **20** 094208
- [17] Chu X X 2011 *Chin. Phys. B* **20** 014207
- [18] Ji X L, Li X Q 2011 *Appl. Phys. B* **104** 207
- [19] Wen J J, Breazeal M A 1988 *J. Acoust. Soc. Am.* **83** 1752
- [20] Li X Q, Ji X L 2011 *J. Modern Opt.* **58** 1060
- [21] Miguel A P, Javier A, Eusebio B 1992 *Appl. Opt.* **31** 6389
- [22] Ricklin J C, Davidson F M 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 1794
- [23] Weber H 1992 *Opt. Quantum Electron.* **24** 1027
- [24] Ji X L, Eyyuboğlu H T, Baykal Y 2010 *Opt. Express* **18** 6922
- [25] Ji X L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3953 (in Chinese) [季小玲 2010 物理学报 **59** 3953]
- [26] Andrews L C, Phillips R L 2005 *Laser Beam Propagation through Random Media* (2nd Ed.) (Bellingham, Washington: SPIE Press)
- [27] Serna J, Martinez-Herrear R, Mejias P M 1991 *Opt. Soc. Am. A* **8** 1094
- [28] Ji X L, Dou L Y 2012 *Opt. Laser Technol.* **44** 21

# Effective radius of curvature of truncated laser beams with amplitude modulation and phase fluctuation\*

Shao Xiao-Li Ji Xiao-Ling<sup>†</sup>

(Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China)

(Received 3 January 2012; revised manuscript received 19 January 2012)

## Abstract

Usually, high-power laser beams are amplitude modulated and have phase fluctuations (PFs). The analytic formula of the effective radius  $R$  of curvature of truncated laser beams with amplitude modulations (AMs) and PFs propagating through atmospheric turbulence is derived by using the statistical optics method. It is shown that the  $R$  in free space increases with the increases of the phase fluctuation parameter, the intensity modulation parameter and the truncated parameter. And the influence of turbulence on the  $R$  also increases with the increases of the three parameters. Furthermore, the  $R$  of Gaussian beams is largest in free space, but it is most affected by turbulence. Therefore, in turbulence the  $R$  of truncated laser beams with AMs and PFs is even larger than that of Gaussian beams when the propagation distance is large enough. In particular, the relative effective radius  $R_r$  of curvature varies non-monotonically with propagation distance, and there exists a minimum at a propagation distance where the influence of turbulence on the  $R$  is largest. In addition, the position where the  $R_r$  reaches its minimum increases with the increases of intensity modulation and phase fluctuation.

**Keywords:** truncated laser beams with amplitude modulations and phase fluctuations, effective radius of curvature, atmospheric turbulence

**PACS:** 42.68.Bz, 42.25.Dd, 42.25.Kb

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61178070) and the Project of Innovative Research Team in Universities of Sichuan Province, China (Grant No. 12TD008).

<sup>†</sup> E-mail: jixl100@163.com