

基于库仑定律的二极管空间电荷限制效应研究

左应红^{1)2)†} 王建国²⁾ 朱金辉²⁾ 范如玉¹⁾²⁾

1) (清华大学工程物理系, 北京 100084)

2) (西北核技术研究所, 西安 710024)

(2011年12月19日收到; 2012年1月28日收到修改稿)

真空二极管是电子束源装置中的一个关键部件, 其阴极发射的电子束进入二极管阴阳极间隙区会产生很强的空间电荷限制效应. 本文针对平板真空二极管中的空间电荷限制效应物理模型, 从库仑定律的积分形式出发, 选取了不同参数的阴极半径与阴阳极间隙距离之比, 计算得到了真空二极管阴阳极间隙区的电场分布情况, 从而避免了采用 Poisson 方程求解时需要处理复杂的非线性偏微分方程这一问题. 结果表明, 基于库仑定律的计算结果与从 Child-Langmuir 定律分析得到的结果仅相差一个与二极管极板边界条件有关的修正量. 当二极管阴极半径与阴阳极间隙距离之比 $R/D > 10$ 时, 一维空间电荷限制定律将是一个较好的近似结果, 当 R/D 较小时, 用该定律计算误差较大, 在实际物理问题中需要谨慎使用.

关键词: 真空二极管, 空间电荷限制效应, Child-Langmuir 定律, 库仑定律

PACS: 52.59.Sa, 52.59.Mv, 85.30.Fg

1 引言

真空二极管是获得高功率带电粒子束、X 射线、 γ 射线以及高功率微波等的关键部件^[1-3]. 在高电压作用下, 当二极管阴极表面电场强度超过某个特定阈值时, 阴极表面将爆炸发射电子, 如果在阴阳极间隙区没有磁场作用, 则这些电子将在电场作用下朝阳极运动, 形成空间电荷流. 同时由于电子束集聚, 使得阴极表面电场降低而不再发射电子, 空间电荷流将会受到限制^[4-8].

Child^[9] 和 Langmuir^[10] 在一个无限大平板二极管中对空间电荷限制发射规律进行了研究, 得到了非相对论情况下描述平板二极管中空间电荷限制流定律, 该空间电荷限制定律是在一维假设基础上得出的, 并且假定了阴极的发射面积为无限大. 但在实际情况中, 二极管阴极尺寸都是有限的^[11-13], 一维空间电荷定律得到的空间电荷限制效应与实际情况会产生偏差, 并且该偏差值和阴极半径与阴阳极间隙的比值有关. 研究一维空间电荷限制效应和二极管阴极半径与阴阳极间隙比值之

间的关系有重要意义, 可以为实际工作提供理论指导, 为评估在何种情况下考虑为一维模型较为准确而提供理论依据.

由 Poisson 方程出发研究空间电荷限制定律时, 需要求解复杂的非线性微分方程, 且不利于直观理解物理问题的本质. 本文先以 Poisson 方程为基础得出二极管进入空间电荷限制状态时的电荷密度分布, 然后在此电荷密度分布前提下, 从库仑定律出发研究这种分布的限制效应. 计算过程中, 避开了求解非线性微分方程的问题, 从电荷积分的角度进行研究, 重点考虑了不同长径比对空间电场分布的影响, 最后比较了从库仑定律推出的结论与 Child-Langmuir (CL) 推导出的结论之间的差别, 讨论了两者的联系.

2 物理及模拟模型

二极管中的空间电荷限制效应是指当阴极发射体表面的电场减小到零时, 二极管能发射的电流密度已经达到最大, 不能再继续增加时的情况^[6,14]. 描述空间电荷限制效应的 CL 定律, 从 Poisson 方程

† E-mail: zuoyinghong@tsinghua.org.cn

出发, 在一个平行无限大平板二极管中采用一维边界条件, 得到了发射的最大电流密度. 平行无限大平板二极管的几何结构如图 1 所示, 阴极电势为 0, 阳极电势为 V_0 , 该二极管的两块平板之间的距离为 D . 当电子从阴极板上发射进入二极管真空区域后, 空间区域电流产生的电场会对由于两极板电势差产生的电场起平衡作用.

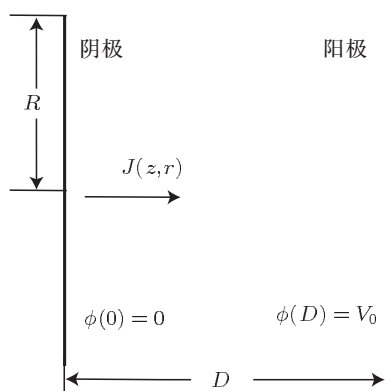


图 1 真空平板二极管的几何结构

2.1 Child-Langmuir 空间电荷限制效应物理模型

二极管中产生的最大电流密度 $J(z, r)$ 属于未知量, $\phi(z, r)$ 为电势, $\rho(z, r)$ 为电荷密度, 对于一维的情况, 电势在径向不发生变化, 只在轴向会有所改变, 且认为电荷密度在径向也近似均匀分布. 因此 Poisson 方程为

$$\frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} = -\frac{\rho(z)}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

电流密度与电荷、速度之间的关系为

$$J(z) = \rho(z)v(z). \quad (2)$$

假设电子从阴极表面发射出来时初速度为 0, 即离开阴极表面时电子的动能为 0. 阴极的电势为 0, 忽略重力作用, 则电势和电子动能之间的关系可表示为

$$\frac{1}{2}m_e v(z)^2 - 0 = e\phi(z). \quad (3)$$

结合 (1), (2) 和 (3) 式, 在 Poisson 方程中消去电荷密度, 可得到电势与电流密度之间的关系, 该关系式是一个二阶非线性微分方程:

$$\frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} = -\frac{J(z)}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} \frac{1}{\sqrt{\phi(z)}}. \quad (4)$$

上述二阶非线性微分方程求解时, 需要给出边界条件, 即阴极和阳极表面的电势, 以及在阴极表面的

电场为 0, 即

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(D) = V_0, \quad \left. \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (5)$$

利用这几个边界条件则可求解出空间电荷限制流. 将 (4) 式两边乘以电势的导数, 并进行积分可得

$$\int \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} dz = -\frac{J(z)}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} \int \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{\phi(z)}} dz. \quad (6)$$

利用 (5) 式中阴极表面电势和阴极表面电场均为 0 这两个边界条件, 得到

$$\frac{4}{3}\phi(z)^{\frac{3}{4}} = 2\sqrt{\frac{J(z)}{\epsilon_0}} \left(\frac{m_e}{2e}\right)^{\frac{1}{4}} z. \quad (7)$$

当阳极的电势为 V_0 时, 则可得到发射的最大电流密度, 即 CL 定律的表达形式

$$J_{CL} = \frac{4}{9}\epsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{V_0^{3/2}}{D^2}, \quad (8)$$

这就是当给定外加电压和阴阳极之间的距离后, 从一个平行无限大平板二极管中能产生的最大电流密度. CL 定律有其固有的局限性, 该定律只适用于一维情况, 对于无限大的圆柱或者球体结构也近似适用, 但是对于有限发射面积条件即一维条件不满足的结构则会有很大误差. 由 (4) 式可知, 上述求解过程中还会遇到复杂的非线性微分方程. 如果变换一种思路, 基于库仑定律的积分形式, 也能研究空间电荷限制效应, 且能够直观考虑二极管阴极半径与间隙距离比值对空间电荷效应的影响.

2.2 基于库仑定律的空间电荷限制模型

在推导空间电荷限制流表达式时, 假定二极管已经处于稳定的空间电荷限制阶段, 即二极管状态已不随时间而变化.

用狄拉克函数积分形式来表示空间电荷密度为

$$\rho(\mathbf{r}) = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dv, \quad (9)$$

格林函数与狄拉克函数之间的关系为

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \nabla \cdot \left[\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^3} \right]. \quad (10)$$

空间电荷密度表达式 (9) 式中, 积分针对的是源点 \mathbf{r}' , 而求导数则是针对场点 \mathbf{r} . 从描述电场散度方程的高斯定律可得到库仑定律表达式如下:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^3} \right] \rho(\mathbf{r}') dv. \quad (11)$$

由上述过程可以看出, 库仑定律和 Poisson 方程这两者均是从高斯定律导出的, 因此运用库仑定律或者泊松方程得到的空间电荷限制效应, 理论上应该等价.

2.3 模拟计算模型

当给定二极管的外加电压 V_0 以及阴阳极距离 D , 则二极管区最大的空间电荷限制流将由 (8) 式来描述, 将其代入 (7) 式中可得出处于空间电荷限制状态下二极管区的如下物理量:

电势分布

$$\phi(z) = V_0 \left(\frac{z}{D}\right)^{4/3}, \quad (12)$$

沿 z 方向的电场分布

$$E_{CL} = -\frac{4}{3} \frac{V_0}{D} \left(\frac{z}{D}\right)^{1/3}, \quad (13)$$

电荷密度分布

$$\rho(z) = -\frac{4}{9} \frac{V_0}{\epsilon_0 D} \left(\frac{z}{D}\right)^{-2/3}. \quad (14)$$

从库仑定律出发得到的空间电荷分布产生的电场为 (11) 式, 在圆柱坐标系下, 电荷源点指向场点的矢量为 $\lambda = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, 分析与二极管阴极表面垂直方向的电场, 空间电荷在径向和角向均匀分布. 对图 1 二极管的几何结构, 则有 $\mathbf{r} = r_c \mathbf{e}_r + z_c \mathbf{e}_z$ 和 $\mathbf{r}' = r_s \mathbf{e}_r + z_s \mathbf{e}_z$.

因为考虑的是轴向的电场, 因此 $r_c = 0$,

$$E_{CB}(z_c) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^D \int_0^R \frac{(z_c - z_s)\rho(z_s, r_s)2\pi r_s dr_s}{(\sqrt{r_s^2 + (z_c - z_s)^2})^3} dz_s. \quad (15)$$

当 $R \gg D$ 时, 则空间电荷密度可粗略地考虑为仅依赖于 z_s , 即 $\rho(z_s, r_s) = \rho(z_s)$, 由此, 则积分方程 (15) 式可变为

$$E_{CB}(z_c) = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_0^D (z_c - z_s) \left[\frac{1}{\sqrt{(z_c - z_s)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z_c - z_s)^2}} \right] \rho(z_s) dz_s. \quad (16)$$

此处假设了 $R \gg D$ 这一限制条件, 这一假设不仅能起到简化模型运算的作用, 并且和 CL 定律的无限大平板这一假设基本一致. 文献 [15,16] 通过实际的粒子模拟研究表明, 在该假设前提下得出的公式对 $R < D$ 的情况仍然成立.

3 结果及分析

模拟计算时需要的输入参数有: 二极管阴极之间的间隙距离 D , 二极管阴阳极电势差 V_0 , 自由空间电容率 ϵ_0 . 为了计算方便, 取长度的无量纲化单位为 D , 电势差的无量纲化单位为 V_0 , 则电场的无量纲化单位为 V_0/D . 考虑到电荷密度 $\rho(z_s)$ 与 $z^{-2/3}$ 成正比 [15], 且为了便于和 CL 一维空间电荷限制效应的结果进行比较, 将 CL 得到的电荷密度分布代入 (16) 式中作为电荷密度的源项.

3.1 不同的 R/D 参数对电场分布的影响

R/D 为二极管阴极的径向尺寸与阴阳极间隙距离的比值, 该比值的大小可以作为平板二极管近似为一维结构的符合程度, 该比值越大, 则平板二极管近似为一维结构这一假设就越接近真实情况. 图 2(a) 是在不同的 R/D 情况下得到的处于空间电荷限制效应状态二极管间隙区的电场分布, E_{CL} 是由 CL 定律计算得到的电场的空间分布情况, 其他曲线则是基于库仑定律计算得到的电场分布结果. 由图 2(a) 中可以看出, 基于库仑定律计算的结果在整体上与 E_{CL} 有个偏差, 随着 R/D 取值从 0.1, 0.5 到 30 不断增大时, 基于库仑定律计算的电场分布在形状上与 E_{CL} 越来越接近.

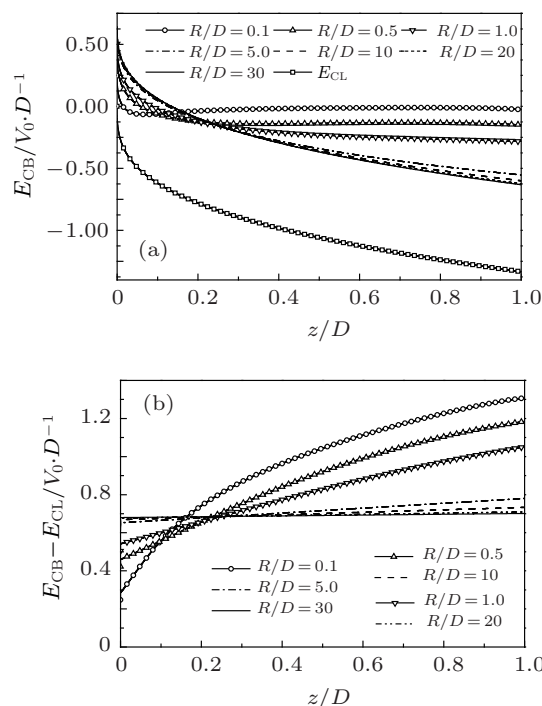


图 2 不同 R/D 值下的结果 (a) 二极管间隙区电场分布曲线; (b) 基于库仑定律的计算结果与 Child-Langmuir 定律计算结果之间的比较

由图 2(a) 可看到, 随着 R/D 的不断增大, 基于库仑定律的计算结果与 CL 定律计算结果的曲线走势趋于一致, 但是两者之间存在一个整体的偏差.

3.2 基于库仑定律计算结果的修正

E_{CB} 与 E_{CL} 之间存在一个整体偏差的原因在于, 基于库仑定律积分累积了二极管区空间电荷的效应, 但没有涉及到两个极板之间的电势差的影响, 而从 CL 定律得到的是包含了两电极板之间电势差影响之后的空间电荷限制电场.

考虑阴阳极间隙区电势边界条件, 则有

$$V_0 = - \int_0^D E_{ztotal}(z_c) dz_c, \quad (17)$$

其中, E_{ztotal} 是空间电荷的电场 $E_z(z_c)$ 和由于阴阳极极板边界间电势差的存在而应加入的修正电场的总和, 即

$$E_{ztotal} = E_z(z_c) + E_{zboundary}. \quad (18)$$

图 2(b) 是将基于库仑定律计算得到的结果与 E_{CL} 相减之后得到的电场曲线, 从图中来看, 随着 R/D 增大, 两者相减后得到的曲线趋于一条定直线.

由图 2(b) 所示, 当 $R/D \rightarrow \infty$ 时, 与边界条件有关的修正电场为

$$E_{zboundary}(z_c) = -\frac{2}{3} \frac{V_0}{D}, \quad (19)$$

(19) 式即为基于库仑定律计算结果需增加的修正量. 表 1 是选取位置 $z_c = 1.0$ 处, 用基于库仑定律计算得到的阳极板上电场值加修正量后与用 CL 定律计算结果相比较得到的相对偏差.

在 R/D 的值较小时, 尤其是在 $R/D < 10$ 时, 基于库仑定律计算的结果与 E_{CL} 相对偏差较大 (见表 1), 当 $R/D > 10$ 之后, 基于库仑定律计算的结果与 E_{CL} 的相对偏差在 10% 以内. 因此, 在实际情况中, 当 $R/D > 10$ 时, 采用一维的 CL 定律描述二极管空间电荷限制效应是较为准确的, 而当该比值较小时, 则需要谨慎使用该一维的 CL 定律.

图 3(a) 和 (b) 是在二极管间隙区不同位置点处, 基于库仑定律计算得到的电场与对应位置处的 E_{CL} 相减后得到的电场差值随参数 R/D 变化的情况. 由图 3(a) 可以看出, 当 z_c 较小即位置离阴极面较近时, 随着 R/D 的增大, $E_{CB} - E_{CL}$ 的值先是比 $0.667V_0/D$ 小, 之后快速趋向于 $0.667V_0/D$. 而从图 3(b) 中可看出, 当 z_c 较大即位置远离阴极表面时, 随着 R/D 的增大, $E_{CB} - E_{CL}$ 的值先是比 $0.667V_0/D$ 大, 之后快速趋向于 $0.667V_0/D$. 并且从图 3 中看出, 当 R/D 较小时, 电场差值随 R/D 的变化而剧烈变化, 说明阴极表面附近的电荷密度较大且变化明显.

表 1 基于库仑定律计算的结果与 CL 定律计算得到相对偏差

| R/D | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 1.0 | 2.0 | 5.0 | 10 | 20 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 相对偏差 | -96.2% | -91.8% | -77.6% | -57.5% | -35.5% | -16.5% | -9.41% | -5.80% |

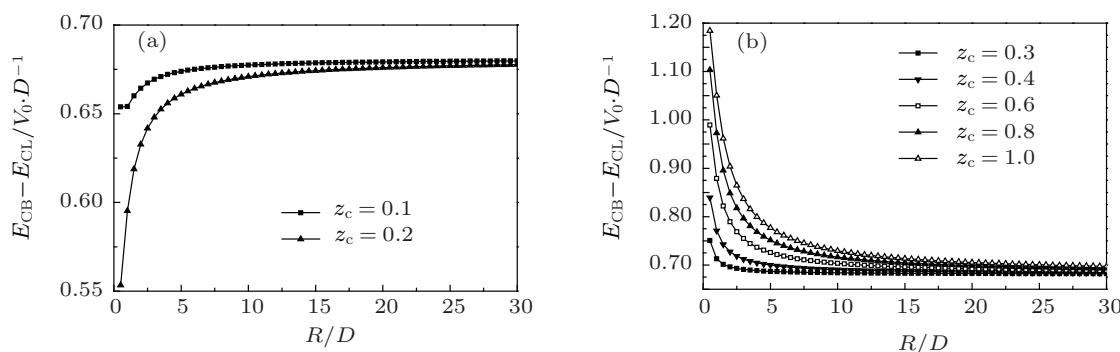


图 3 不同位置点处基于库仑定律计算的结果与 E_{CL} 相减后得到的电场差值随参数 R/D 变化的情况 (a) $z_c = 0.1, 0.2$; (b) $z_c = 0.3, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$

4 结论

由于库仑定律是对空间电荷在空间区域中进行积分,因此可以用于研究二维乃至三维几何结构的问题. 本文从库仑定律出发,数值研究了当反映二维结构的 R/D 取不同值时,二极管区空间电荷产生的电场分布的差异. CL 空间电荷限制定律是在一维假设的前提下得到的结论,当 R/D 较小时,

用该定律计算误差较大,需要寻求修正后的更高维的物理规律表达式,而当 $R/D > 10$ 时,将是一个比较合适的近似理论. 因此在实际运用时,需要根据误差允许范围来确定是否选用该空间电荷限制流公式.

感谢西北核技术研究所的段耀勇研究员和蔡利兵硕士的讨论.

- [1] Barker R J, Schamiloglu E (translated by Zhou C M, Liu G Z et al.) 2005 *High-Power Microwave Sources and Technologies* (Beijing: Tsinghua University Press) p284 (in Chinese) [Barker R J, Schamiloglu E 著 (周传明, 刘国治等译) 2005 高功率微波源与技术 (北京: 清华大学出版社) 第 284 页]
- [2] Han M, Zou X B, Zhang G X 2010 *Fundamental of Pulsed Power Technology* (Beijing: Tsinghua University Press) p124 (in Chinese) [韩旻, 邹晓兵, 张贵新 2010 脉冲功率技术基础 (北京: 清华大学出版社) 第 124 页]
- [3] Xia L S, Wang M, Huang Z P, Zhang K Z, Shi J S, Zhang L W, Deng J J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3435 (in Chinese) [夏连胜, 王勤, 黄子平, 张开志, 石金水, 章林文, 邓建军 2004 物理学报 **53** 3435]
- [4] Lin M C 2005 *J. Vac. Sci. Technol. B* **23** 636
- [5] Litvinov E A 1985 *IEEE Trans. Electr. Insul.* **20** 683
- [6] Zhang Y H, Jiang J S, Chang A B 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1676 (in Chinese) [张永辉, 江金生, 常安碧 2003 物理学报 **52** 1676]
- [7] Liu X S 2007 *Intense Particle Beams and its Applications* (Beijing: National Defense Industry Press) p25 (in Chinese) [刘锡三 2007 强流粒子束及其应用 (北京: 国防工业出版社) 第 25 页]
- [8] Anderson W A 1993 *J. Vac. Sci. Technol. B* **11** 383
- [9] Child C D 1911 *Phys. Rev.* **32** 492
- [10] Langmuir I 1913 *Phys. Rev.* **2** 450
- [11] Feng Y, Verboncoeur J P, Lin M C 2008 *Phys. Plasmas* **15** 043301
- [12] Luginsland J W, Lau Y Y, Umstadtd R J, Watrous J J 2002 *Phys. Plasmas* **9** 2371
- [13] Zhang Y H, Chang A B, Xiang F, Song F L, Kang Q, Luo M, Li M J, Gong S G 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5754 (in Chinese) [张永辉, 常安碧, 向飞, 宋法伦, 康强, 罗敏, 李名加, 龚胜刚 2007 物理学报 **56** 5754]
- [14] Birdsall C K, Bridges W B 1966 *Electron Dynamics of Diode Regions* (New York: Academic Press) p239
- [15] Lau Y Y 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 278301
- [16] Luginsland J W, Lau Y Y, Gilgenbach R M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 4668

Investigations of space charge limited effects in diode with Coulomb's law

Zuo Ying-Hong^{1)2)†} Wang Jian-Guo²⁾ Zhu Jin-Hui²⁾ Fan Ru-Yu¹⁾²⁾

1) (*Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

2) (*Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710024, China*)

(Received 19 December 2011; revised manuscript received 28 January 2012)

Abstract

Vacuum diode is a critical component of the apparatus which is the source of electron beams, the emitted electrons from the cathode of the diode have strong space charge limited effects. Based on Coulomb's law, the distributions of electric field in cathode-anode gap for different values of the ratio of radius to gap distance, R/D , are calculated numerically with the model of space charge limited effects in a planar vacuum diode. This method can avoid solving a non-linear differential equation which is used to yield the Child-Langmuir law from Poisson's equation. The results demonstrate that the only difference between the results from Coulomb's law and Child-Langmuir law is a modification factor, which is shown to be related to the potential difference across the gap. The results also show that one-dimensional space charge limited law will be a good approximation for the practical planar diode if the parameter R/D is beyond 10, but it can present a large error if the parameter R/D is small. Therefore it should be cautiously used.

Keywords: vacuum diode, space charge limited effects, Child-Langmuir law, Coulomb's law

PACS: 52.59.Sa, 52.59.Mv, 85.30.Fg

† E-mail: zuoyinghong@tsinghua.org.cn