

三光子 GHZ 态中不同 Bell 型不等式的实验研究*

赵加强[†] 曹连振 王晓芹 逯怀新

(山东省多光子纠缠与操纵重点实验室, 潍坊学院物理与光电工程学院, 潍坊 261061)

(2012 年 1 月 15 日收到; 2012 年 2 月 17 日收到修改稿)

实验研究了 Bell 不等式、Mermin 不等式和 Svetlichny 不等式在 GHZ 态中对定域实在论结果的破坏. 采用目标态密度矩阵的方法给出了实验制备的 GHZ 态的保真度, 得到了三个不等式在 GHZ 态中的测量值. 实验结果表明, 三个 Bell 型不等式在同一个状态下对定域实在论结果破坏程度不同, 在量子密钥分配中可以选择合适的非定域性描述方式考察所用信道的安全性.

关键词: 量子纠缠, GHZ 纠缠态, 非定域性

PACS: 03.65.Ud, 03.67.-a, 42.50.Dv

1 引言

纠缠是量子力学中最奇特的性质, 来源于体系中各组分的量子关联^[1,2], 是近年来人们研究的热点方向之一. 纠缠体系是量子信息处理过程中最基本的资源^[3-5]. 纠缠体系也可以用来证明量子力学体系所具有的非定域特性^[6,7], 而且非定域特性和两体间的纠缠度相关^[8,9]. 理论研究表明, 两体以上的纠缠体系, 如三体 GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger) 态和 GGHZ (generalized Greenberger-Horne-Zeilinger) 态也可用来研究纠缠和非定域性之间的关系^[10]. 但是, 这个推广是非常复杂的. 而量子信息研究中纠缠和非定域性之间的关系是非常重要的问题^[11,12]. 最大纠缠态是量子信息处理中的理想资源, 因为非最大纠缠态会使量子信息处理过程的效率降低或变的不可靠^[13-15]. 实际上, 由于各种非理想因素的存在, 实验中制备的纠缠态往往很难是最大纠缠态. 但 Ekert 已证明, 只要纠缠态破坏了 Bell 定理, 用非最大纠缠态来进行量子密码分发也是安全的^[16], Ekert

的 B91 协议也是量子密码分发的理论基础. 因此, 研究实验制备的量子态的非定域性具有重要的现实意义.

本文在我们已制备的 GHZ 态的基础上^[17], 进一步研究 Bell 不等式、Mermin 不等式和 Svetlichny 不等式对定域实在论结果的破坏程度, 从而给出三个 Bell 型不等式描述的非定域性的对比关系. 实验结果表明, 所测量的三个不等式在同一个状态下对定域实在论结果破坏程度不同, 在量子密钥分配中可以选择合适的非定域性描述方式考察所用信道的安全性. 这将为量子态在量子通信中的应用提供实验支持.

2 Bell 型不等式和非定域性

三光子偏振 GHZ 纠缠态 $|\psi_g\rangle$ 为

$$|\psi_g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle_1 |V\rangle_2 |V\rangle_3 + |H\rangle_1 |H\rangle_2 |H\rangle_3). \quad (1)$$

假设有空间上分离的三个观测者 A, B 和 C, 每人可能得到 0 和 1 两个测量结果. 用 X_i 表示不同的观测者, 用 x_i 表示相应的测量结果,

* 国家自然科学基金 (批准号: 11174224), 山东省科技发展计划 (批准号: 2011GGA07158), 山东省自然科学基金 (批准号: ZR2011AL012, ZR2009AL018) 和山东省高等学校科技计划 (批准号: J11LA56) 资助的课题.

[†] E-mail: zhaojiaqiang@eyou.com

则 $X = A; B; C$, $x = a; b; c$. 如果三个观测者的测量结果分别为 0, 1 和 1, 则测量概率记为 $P(a_1 = 0, b_1 = 1, c_2 = 1)$. 实验中可用一个 8×8 的联合测量给出每个可测力学量的量子力学统计概率. 对于 Bell 不等式, 定域实在论的描述为 [18]

$$\begin{aligned} & P(a_1 + b_1 + c_1 = 0) + P(a_1 + b_1 + c_1 = 3) \\ & + P(a_1 + b_2 + c_2 = 2) + P(a_2 + b_1 + c_1 = 0) \\ & + P(a_2 + b_1 + c_1 = 3) + P(a_2 + b_2 + c_2 = 1) \\ & - P(a_1 + b_1 + c_1 = 1) - P(a_1 + b_2 + c_2 = 1) \\ & - P(a_2 + b_1 + c_1 = 2) - P(a_2 + b_2 + c_2 = 2) \\ & \leq 2, \end{aligned} \quad (2)$$

这里 $P(a_i + b_j + c_k = r)$ 为某一力学量的联合测量概率, 例如 $P(a_i + b_j + c_k = 1) = P(a_i = 1, b_j = 0, c_k = 0) + P(a_i = 0, b_j = 1, c_k = 0) + P(a_i = 0, b_j = 0, c_k = 1)$. 量子力学给出的 Bell 不等式在 GHZ 态下的结果会破坏定域实在论结果. 量子力学中, 测量概率为 $P^{\text{QM}}(a_i = m, b_j = n, c_k = l) = \langle \psi | \hat{P}(a_i = m) \otimes \hat{P}(b_j = n) \otimes \hat{P}(c_k = l) | \psi \rangle$, 其中

$$\begin{aligned} & \hat{P}^{\text{QM}}(a_i = m) \\ & = \frac{1 + (-1)^m \hat{n}_{a_i} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \\ & = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-1)^m \cos \theta_{a_i} & (-1)^m \sin \theta_{a_i} e^{-i\phi_{a_i}} \\ (-1)^m \sin \theta_{a_i} e^{i\phi_{a_i}} & 1 - (-1)^m \cos \theta_{a_i} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

$\hat{P}^{\text{QM}}(b_j = n)$ 和 $\hat{P}^{\text{QM}}(c_k = l)$ 利用类似的定义方法给出. $\hat{P}^{\text{QM}}(a_i = 0)$ 表示观测者 A 在基矢 $\cos \frac{\theta_{a_i}}{2} |H\rangle + \sin \frac{\theta_{a_i}}{2} e^{i\phi_{a_i}} |V\rangle$ 上作投影测量, $\hat{P}^{\text{QM}}(a_i = 1)$ 则表示在基矢 $\cos \frac{\theta_{a_i}}{2} |H\rangle - \sin \frac{\theta_{a_i}}{2} e^{i\phi_{a_i}} |V\rangle$ 上作投影测量. 对 GHZ 态, 可以得到力学量的联合测量概率为

$$\begin{aligned} & P^{\text{QM}}(a_i = m, b_j = n, c_k = l) \\ & = \frac{1}{16} [1 + (-1)^m \cos \theta_{a_i}] [1 + (-1)^n \cos \theta_{b_j}] \\ & \quad \times [1 + (-1)^l \cos \theta_{c_k}] [1 + (-1)^n \cos \theta_{b_j}] \\ & + \frac{1}{16} [1 - (-1)^m \cos \theta_{a_i}] [1 - (-1)^n \cos \theta_{b_j}] \\ & + \frac{1}{8} (-1)^{m+n+l} [1 - (-1)^l \cos \theta_{c_k}] \end{aligned}$$

$$\times \sin \theta_{a_i} \sin \theta_{b_j} \sin \theta_{c_k} \cos(\phi_{a_i} + \phi_{b_j} + \phi_{c_k}), \quad (4)$$

等式左端的则为 Bell 算符 B . 若取如下特殊角度:

$$\begin{aligned} \theta_{a_1} & = \theta_{a_2} = \pi/4, & \phi_{a_1} & = \pi/3, & \phi_{a_2} & = 2\pi/3, \\ \theta_{b_1} & = \theta_{c_1} = \phi_{b_1} = \phi_{c_1} = 0, \\ \theta_{b_2} & = \theta_{c_2} = \pi/2, & \phi_{b_2} & = \phi_{c_2} = \pi/2. \end{aligned} \quad (5)$$

Bell 不等式的值为其上边界值 $(1 + 3\sqrt{2})/2 \approx 2.62$, 大于定域实在论的边界值 2, 也就是说量子力学结果破坏了定域实在论结果.

对于 Mermin 算符 [19]

$$\begin{aligned} M & = \sigma_{y1}\sigma_{x2}\sigma_{x3} + \sigma_{x1}\sigma_{y2}\sigma_{x3} \\ & \quad + \sigma_{x1}\sigma_{x2}\sigma_{y3} - \sigma_{y1}\sigma_{y2}\sigma_{y3}, \end{aligned} \quad (6)$$

σ_x, σ_y 为 Pauli 算符, 分别可以在 $+/-$ 基矢和 R/L 基矢上测量, 其中 $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$, $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle)$, $|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i|V\rangle)$, $|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle)$, $|H\rangle$ 表示竖直极化光子, $|V\rangle$ 表示水平极化光子. 量子力学理论 (QM) 和定域实在论 (LR) 给出的值分别为

$$|\langle M \rangle_{\text{LR}}| \leq 2, |\langle M \rangle_{\text{QM}}| \leq 4, \quad (7)$$

也就是说, 算符 M 的期望值的定域实在论结果不超过 2, 而在量子力学理论中不大于 4, 在 2 和 4 之间就是对定域实在论的破坏.

我们可以利用实验所制备出的 GHZ 三体纠缠态实验测量 Mermin 不等式描述的非定域特性. 例如, 对于算符 $\sigma_{x1}\sigma_{x2}\sigma_{y3}$ 的期望值, 可以在 8 组极化基矢 $++R, ++L, +-R, +-L, -+R, -+L, --R, --L$ 上测量得到. 对于 $\sigma_{y1}\sigma_{x2}\sigma_{x3}, \sigma_{x1}\sigma_{y2}\sigma_{x3}, \sigma_{y1}\sigma_{y2}\sigma_{y3}$ 也作类似的测量.

Svetlichny 把两比特的 Bell 不等式推广到三比特, 给出了描述三体纠缠体系非定域性的 Bell 型 Svetlichny 算符为 [20]

$$S = A(BK + B'K') + A'(BK' + B'K), \quad (8)$$

其中, $K = C + C', K' = C - C', A = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1$ 和 $A' = \mathbf{a}' \cdot \boldsymbol{\sigma}_1$ 作用于比特 1, $B = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$ 和 $B' = \mathbf{b}' \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$ 作用于比特 2, $C = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma}_3$ 和 $C' = \mathbf{c}' \cdot \boldsymbol{\sigma}_3$ 作用于比特 3. $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'$ 和 \mathbf{c}, \mathbf{c}' 是单位矢量, σ_i 为可写作 Pauli 矩阵的自旋投影算符.

类似其他的 Bell 型算符, S (Svetlichny) 不等式的经典理论期望值为

$$|\langle S \rangle|_{LR} \leq 4. \quad (9)$$

量子力学理论给出 S 算符期望值的上边界为 $|\langle S \rangle|_{GHZ} \leq 4\sqrt{2} \approx 5.656^{[20]}$. 为了方便实验中的测量, 我们可以把 (8) 式改造为一组实验可测量

$$\begin{aligned} S = & \sigma_x \sigma_b \sigma_x + \sigma_y \sigma_b \sigma_x - \sigma_y \sigma_a \sigma_x \\ & - \sigma_y \sigma_a \sigma_y - \sigma_y \sigma_b \sigma_y - \sigma_x \sigma_a \sigma_y \\ & + \sigma_x \sigma_a \sigma_x + \sigma_x \sigma_b \sigma_y, \end{aligned} \quad (10)$$

其中, σ_x, σ_y 为 Pauli 算符, $\sigma_a = (\sigma_x + \sigma_y)/\sqrt{2}$, $\sigma_b = (\sigma_x - \sigma_y)/\sqrt{2}$.

3 实验系统及测量结果

本实验中 GHZ 态的制备采用文献 [17] 相同的实验方案, 并对探测效率和 EPR 对比度进行了优化, 实验装置如图 1 所示.

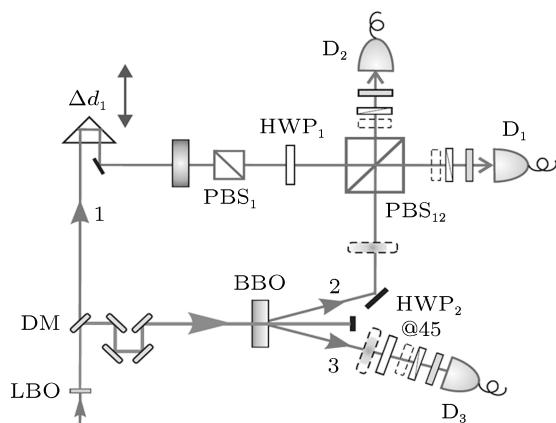


图 1 GHZ 纠缠态装置图

532 nm 的激光 (Millennia Pro 10s, Newport Co.) 抽运锁模钛宝石激光器 (Tsunami, Newport Co.) 产生 780 nm 的飞秒激光脉冲, 重复频率为 80 MHz, 脉宽约 100 fs. 非线性晶体 LBO (LiB_3O_5) 可使 780 nm 的红外光倍频产生波长为 390 nm 的紫外光脉冲, 通过 5 个 DM (dichroic beamsplitters, 双色镜, 反射 390 nm 光、透射 780 nm 光) 将未发生参量上转换的红外光滤除后, 入射到 BBO (β -barium borate, β -硼酸钡) 晶体上, 产生 II 型参量下转换, 把一个 390 nm 的光子劈裂为两个 780 nm 的光子, 由此产生 2, 3 路的 EPR 纠缠对, 可表示

为 $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_2\rangle|H_3\rangle + |V_2\rangle|V_3\rangle)$. LBO 晶体上未产生参量转换的 780 nm 红外光通过衰减并经过一个置于 $\pi/8$ 的半波片后被制备为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|H_1\rangle + |V_1\rangle)$. 经过仔细的补偿光程与 2 路同时到达 polarizing beam splitter (PBS_{12}) 上, 我们得到的输出态为 $|\psi_g\rangle = 1/\sqrt{2}(|V\rangle_1|V\rangle_2|V\rangle_3 + |H\rangle_1|H\rangle_2|H\rangle_3)$, 这就是我们要制备的三光子 GHZ 态. 实验中所用的抽运光功率约为 90 mW, 得到的 GHZ 态三体符合计数为 $\sim 40/\text{s}$. 利用目标态密度矩阵的方法测得了所制备的 GHZ 态的保真度 $F = \langle \psi_{\text{exp}} | \rho | \psi_{\text{exp}} \rangle = 0.84 \pm 0.01$, 其中误差采用蒙特卡洛方法循环 100 次计算得到.

利用制备的 GHZ 态, 对 Bell 不等式、Mermin 不等式和 Svetlichny 不等式进行了实验研究, 测量结果如表 1 所示. 实验中我们测得了三个不等式在制备的 GHZ 纠缠态中的期望值. 并且结果也显示三个不等式对定域实在论结果破坏的标准差是不同的, 利用 Bell 不等式可以容易地刻画体系的非定域特性. 并且也说明, 实验中制备出的 GHZ 纠缠态虽然不是纯态, 但对 Bell 型不等式的破坏达到 33 个标准差, 所以用此作为量子信道是安全的. 需要特别指出的是实验中存在很多非理想的因素使得制备的 GHZ 态不是纯态, 比如参量转换过程中的双对效应、非线性晶体晶格及相位匹配的不完美以及实验系统的电子学噪声和杂散光都会对纠缠态的制备产生不利影响, 这些都会使得制备出的 GHZ 纠缠态不是纯态, 所以继续优化实验系统, 也是一个非常有意义的研究方向.

表 1 三个不等式的测量结果

	Bell 不等式	Mermin 不等式	Svetlichny 不等
测量值	2.446	3.393	4.483
误差	0.0136	0.0482	0.0351
标准差	32.79	28.90	13.57

4 结论

利用制备的 GHZ 态, 实验研究 Bell 不等式、Mermin 不等式和 Svetlichny 不等式对定域实在论结果的破坏程度, 从而给出三个 Bell 型不等式描述的非定域性的对比关系. 实验结果表明, 所测

量的三个不等式在同一个状态下对定域实在论结果破坏程度是不同的. 这一结果将有利于量子密钥分配中选择合适的非定域性描述方式考察所用信

道安全性. 这将为量子态在量子通信中的应用提供了实验支持.

-
- [1] Clauser J F, Horne M A, Shimony A 1969 *Phys. Rev. Lett.* **23** 880
- [2] Gisin N 2009 *Science* **326** 1357
- [3] Moehring D L, Maunz P, Olmschenk S 2007 *Nature* **449** 06118
- [4] Prevedel, Walther P, Tiefenbacher F 2007 *Nature* **445** 05346
- [5] Jeremy L, Breen O 2007 *Science* **318** 1142892
- [6] Chen Z B, Pan J W, Zhang Y D 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 160408
- [7] Zhao J Q, Lu H X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7875 (in Chinese) [赵加强, 遼怀新 2010 物理学报 **59** 7875]
- [8] Gisin N 1991 *Phys. Lett. A* **154** 201
- [9] Popescu S 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 797
- [10] Linden N, Popescu S, Wootters W K 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 207901
- [11] Lu H X, Zhao J Q, Wang X Q, Cao L Z 2011 *Phys. Rev. A* **84** 012111
- [12] Hossein N H, Stock R, James D F V 2009 *Phys. Rev. A* **80** 022308
- [13] Pan J W, Daniell M, Gasparoni S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 4435
- [14] Deutsch D, Ekert A, Jozsa R 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2818
- [15] Howell H C, Linares A L, Bouwmeester D 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 030401
- [16] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
- [17] Lu H X, Zhao J Q, Wang X Q 2011 *Phys. Lett. A* **375** 1850
- [18] Chen J L, Wu C, Kwek L C, Oh C H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 140407
- [19] Mermin N D 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 1838
- [20] Ghose S, Sinclair N, Debnath S 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 250404

Experimental investigation of different Bell-type inequality in three-qubit Greenberger-Horne-Zeilinger states*

Zhao Jia-Qiang[†] Cao Lian-Zhen Wang Xiao-Qin Lu Huai-Xin

(Shandong Provincial Key Laboratory of Multi-photon Entanglement and Manipulation, Department of Physics and Electronic Science,

Weifang University, Weifang 261061, China)

(Received 5 January 2012; revised manuscript received 17 February 2012)

Abstract

We investigate experimentally the violation of the Bell, Mermin and Svetlichny inequalities to local realism prediction. Using the maximum-likelihood technique to construct the density matrix and calculate the fidelity of the Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) state. The values of the three inequalities are measured. The experimental results show that the three inequalities have different violation degrees to local realism prediction. So we can choose a suitable method of nonlocality to estimate the security of quantum channel.

Keywords: quantum entanglement, GHZ entangled states, nonlocality

PACS: 03.65.Ud, 03.67.-a, 42.50.Dv

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11174224), the Science and Technology Development Program of Shandong Province (Grant No. 2011GGA07158), and the Natural Science Foundation of Shandong Province (Grant Nos. ZR2011AL012, ZR2009AL018).

[†] E-mail: zhaojiaqiang@eyou.com