物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 61, No. 17 (2012) 170401

自由质点测地线仿射参量时空坐标系

卞保民† 赖小明 杨玲 李振华 贺安之

(南京理工大学信息物理与工程系, 南京 210094)

(2012 年 1 月 7 日收到; 2012 年 2 月 23 日收到修改稿)

以时序 t 为自变量, 可给出自由质点空间测地线的参数方程组 $\{X^i(t)\}$, 借助于仿射参量 $R(t)$ 变换实现测地线微分方程的齐次化, 推导出仿射参量 R 满足的一阶微分方程、获得以有理数 C_u 为标志的序列解析解 R. 基于 R 定义平直四维坐标系 $\{t, r, \theta, \varphi\}$ 的空间距离单位, 建立自由质点测地线仿射参量时空坐标系 $\{t, \xi, \theta, \varphi\}$. 研究 $\{t, \xi, \theta, \varphi\}$ 中狭义相对论时空间隔模型度规张量 g 的对角化过程, 发现与对角化度规对应的特征量 $t_1(t, \xi)$, $\tau_1(\tau, \xi)$, $t_t(t, \tau, \xi)$, $\tau_{\tau_1}(t, \tau, \xi)$; 从而推出时空坐标系 $\{t, \xi, \theta, \varphi\}$ 维数小于 4.

关键词: 广义相对论, 测地线仿射参量, 时空度规

PACS: 04.20.–q, 03.30.+p, 02.40.–k

1 引 言

非欧氏几何时空坐标系是广义相对论引力场、宇宙模型的逻辑基础 [1,2], 测地线是其重要的基本概念. 描述宇宙基本演化过程的大爆炸模型已经得到广泛认可. 河外星系光谱普遍性红移、宇宙大尺度结构物质分布均匀性、宇宙微波背景辐射场参量精确测量 [3−5]、Ia 超新星光度与光谱红移关系等天文观测数据的分析结论以及相关的理论研究结果 [6−8], 都支持物质宇宙处于持续膨胀、加速膨胀状态的观点. 但加速膨胀宇宙与广义相对论均匀宇宙模型空间尺度因子 $R(t)$ 的基本特性 $\ddot{R}(t) < 0$ 相矛盾, 即与引力是宇宙物质基本作用的模型相矛盾. 人们尝试在爱因斯坦方程的基础上建立具有负压强特性的暗能量宇宙模型 [9−14], 期望能化解这种矛盾. 还有一些研究者, 脱离标准的宇宙大爆炸模型探索解释加速膨胀现象的宇宙物质形态 [15−17]. 总体而言, 具有整体均匀性的宇宙模型趋于更加复杂.

另一方面, 自由质点测地线概念与相对论时空模型有密切联系. 在广义相对论中, 定义自由质点沿测地线运动, 与运动质点本征时 τ 对应的时空间隔参量 $\mathrm{d}s = \mathrm{i}\mathrm{d}\tau$, 及其线性变换 $s' = as + s'_0$ 是公认的测地线仿射参量 [2,18]. 但是, 除了 s 以外的其他仿射参量, 以及它们在宇宙模型中的应用却极少被关注.

原点辐射光子自由传播, 最终被非原点实物元 P 吸收. 受这种实物元之间基本能量子作用过程的启发, 在文献 [19, 20] 研究工作的基础上, 本文进一步以光子作用过程为基础, 定义非零、连续、单调的测地线仿射参量函数 $R(t)$, 并将 $R(t)$ 作为新自变量引入微分流形测地线微分方程的一般形式

$$\frac{\mathrm{d}^2 X^\mu}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\mu_{\nu o}\frac{\mathrm{d}X^\nu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}X^o}{\mathrm{d}t} = f\frac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}t}, \qquad (1)$$

推导出函数 R 满足的一阶微分方程, 获得序列解 $R(t)$,

$$R(t) = R_0\ \sqrt[(1-C_u)]{(1-C_u)\,H_0 t + 1}, \quad 1 - C_u \geqslant 0, \qquad (2)$$

† E-mail: bianbaomin_56@yahoo.com.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

取具有长度量纲的 R 函数, 定义变尺度因子空间坐标系 $\{\xi, \theta, \varphi\}$ 的径向坐标

$$\xi \equiv r/R, \tag{3}$$

将平直时空坐标系 $\{t, \varsigma, \theta, \varphi\}$ 狭义相对论自由质点四维间隔 $\mathrm{d}s^2 \equiv g_{\mu\nu}\mathrm{d}X^\mu \mathrm{d}X^\nu$ 变换成时空坐标系 $\{t, \xi, \theta, \varphi\}$ 形式, 发现 $\{t, \xi, \theta, \varphi\}$ 模型下与时空度规 $g_{\mu\nu}$ 对角化过程密切相关的特征时间函数 $t_1(t, \xi)$, $\tau_1(\tau, \xi)$, $t_t(t, \tau_1)$, $\tau_{\tau_1}(t, \tau_1)$; 提出坐标时 τ_ξ 概念, 基于坐标时 τ_ξ 与原点时 t 的积分计算, 获得序列常数 $C_u = 1/N$, 其中 N 为整数; 证明变尺度因子时空坐标系 $\{t, \xi, \theta, \varphi\}_{C_u>0}$ 的维数小于 4. 且均匀宇宙模型在仿射参量时空坐标系中形式明显趋于简化.

2 自由质点测地线仿射参量微分方程及序列解

设 n 维空间数组 $\{X^\mu(t)\}, t \geqslant 0$. 连续、光滑曲线 $\{X^\mu\}$ 的切矢量 $\left\{A^\mu \equiv \dfrac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}t}\right\}$ 描述其局域特征. 基于矢量 $\{A^\mu\}$ 沿光滑曲线平行移动保持张量特征不变的定义, 微分流形更为直观地引入测地线微分方程 [2,21]. 矢量 $\{A^\mu\}$ 平行移动可表示成

$$A^\mu(t \to t + \mathrm{d}t) // A^\mu(t + \mathrm{d}t), \tag{4}$$

与 (4) 式对应有

$$A^\mu(t + \mathrm{d}t) = (1 + f\mathrm{d}t) A^\mu(t \to t + \mathrm{d}t), \tag{5}$$

f 为数值有限的非零待定函数. 微分流形矢量平行移动的定义 [1,2,21]

$$A^\mu(t \to t + \mathrm{d}t) \equiv A^\mu(t) - \Gamma^\mu_{\nu o}\frac{\mathrm{d}X^\nu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}X^o}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t, \tag{6}$$

$\Gamma^\mu_{\nu o}$ 称为仿射联络. 光滑曲线 $\{X^\mu\}$ 的切矢量微元形式

$$A^\mu(t + \mathrm{d}t) \equiv A^\mu + \mathrm{d}A^\mu = \frac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2X^\mu}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t. \tag{7}$$

将 (5), (7) 两式分别代入 (6) 式的两边, 整理后可得测地线微分方程的一般形式

$$\frac{\mathrm{d}A^\mu}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\mu_{\nu o}A^\nu A^o = f \cdot A^\mu. \tag{8}$$

业已证明 [18,21] 沿上述曲线必定存在测地线仿射参量 $R(t)$ 使微分方程组 (8) 齐次化

$$\frac{\mathrm{d}A^\mu}{\mathrm{d}R} + \Gamma^\mu_{\nu o}A^\nu A^o = 0. \tag{9}$$

(9) 式中 $\Gamma^\mu_{\nu o}$, A^μ, A^ν, A^o 均以 R 为自变量.

在物理学四维平直时空中, 考虑原点实物元辐射光子群 $\{p_{\bar{O}P}\}$(本文以符号 “{ }” 代表集合) 被非原点实物元 $\{P\}$ 吸收, 取 $\{R(t)\}$ 代表光子特征参量, 原点时序参量 $\{t\}$ 代表光子 $\{p_{\bar{O}P}\}$ 的传播时间过程. 与 $R(t)$ 对应, P 相对于原点的空间位置定义为 $X^i(t), t > 0, i = (1, 2, 3)$.

设 $R > 0$, $\dot{R} = \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} > 0$. 作自变量变换 $t \to R$, 空间曲线 $\{X^i\}$ 的切矢量满足

$$u^i \equiv \frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \dot{R}\frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}R}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} &\equiv \frac{\mathrm{d}^2X^i}{\mathrm{d}t^2} = \dot{R}^2\frac{\mathrm{d}^2X^i}{\mathrm{d}R^2} + \frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}R}\frac{\mathrm{d}\dot{R}}{\mathrm{d}t}\\ &= \dot{R}\left(\dot{R}\frac{\mathrm{d}^2X^i}{\mathrm{d}R^2} + \frac{\mathrm{d}\dot{R}}{\mathrm{d}R}\frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}R}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

将 (10), (11) 式代入 (8) 式, 整理后可得

$$\frac{\mathrm{d}^2X^i}{\mathrm{d}R^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}X^j}{\mathrm{d}R}\frac{\mathrm{d}X^k}{\mathrm{d}R} = \frac{1}{\dot{R}}\frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}R}\left(f - \frac{\mathrm{d}\dot{R}}{\mathrm{d}R}\right), \tag{12}$$

式中游动指标 $(i, j, k) \in (1, 2, 3)$. 由于 f 为待定函数, 则可令

$$f - \frac{\mathrm{d}\dot{R}}{\mathrm{d}R} \equiv 0, \tag{13}$$

此条件下, 微分方程 (12) 被齐次化, 与 (9) 式形式相同

$$\frac{\mathrm{d}^2X^i}{\mathrm{d}R^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}X^j}{\mathrm{d}R}\frac{\mathrm{d}X^k}{\mathrm{d}R} = 0. \tag{14}$$

考虑到 $R(t)$ 函数的非零、单调性, 以及 (14) 式的普遍性, 定义无量纲有理数 C_u,

$$C_u \equiv \frac{R}{\dot{R}}f. \tag{15}$$

将 C_u 代入 (13) 式, 可得仿射参量 $R(t)$ 满足的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\ln\dot{R}}{\mathrm{d}\ln R} = C_u. \tag{16}$$

由 (16) 式可得

$$\mathrm{d}\ln\left(\dot{R}R^{-C_u}\right) = 0, \tag{17}$$

$$\dot{R}R^{-C_u} = \dot{R}_0R_0^{-C_u} = \mathrm{const} > 0. \tag{18}$$

(16), (18) 式表明, 仿射参量 $\left\{R, \dot{R}\right\}$ 具有标度不变的分形特征, $\{C_u\}$ 即分形维数. 微分方程 (18) 式的解函数见 (2) 式, 且 $H_0 \equiv \dfrac{\dot{R}_0}{R_0} > 0, 1 - C_u \equiv \alpha \geqslant 0$. 由 (2) 式可得

$$\frac{R(t+t')}{\sqrt[\alpha]{\alpha H_0 t' + 1}} = R_0 \cdot \sqrt[\alpha]{\alpha H_0 \frac{t}{\alpha H_0 t' + 1} + 1}. \quad (19)$$

令 $B \equiv \alpha H_0 t' + 1$. 由 (19) 式可看出, 将 $R(t)$ 曲线截出的 $t \geqslant t'$ 部分乘 $B^{-1/\alpha}$、自变量 t 乘 B^{-1}, 获得的新曲线与 $R(t)$ 几何同构. 即整体曲线 $R(t)$ 与部分曲线 $R(t \geqslant t')$ 相似, 这意味着 $R(t)$ 函数中 t 起点值具有相对意义. 由 (2) 式还可得

$$\dot{R} = \frac{H_0 R_0}{\alpha H_0 t + 1} \sqrt[\alpha]{\alpha H_0 t + 1}. \quad (20)$$

则待定函数 f 可表示成

$$\begin{aligned} f &\equiv C_u \frac{\dot{R}}{R} = (1-\alpha) \frac{H_0}{\alpha H_0 t + 1} \\ &= (1-\alpha) H_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\alpha}. \end{aligned} \quad (21)$$

取 $C_u = 0$ 条件, 由 (2) 式可得

$$R_{\alpha=1} = R_0 (H_0 t + 1) = \dot{R}_0 t + R_0. \quad (22)$$

(22) 式代入 (21) 式, 可得

$$\lim_{C_u = 0} \frac{f}{C_u} \equiv \frac{\dot{R}_{\alpha=1}}{R_{\alpha=1}} = \frac{H_0}{H_0 t + 1} \neq 0, \quad (23)$$

$C_u = 0$ 条件意味着存在极限近似 $f \to 0$. 由 (5), (10) 式可推知, 极限值 $f = 0$ 对应的 $\left\{u^i\right\}$ 为常矢量, $\left\{X^i\right\}$ 代表有限长直线簇 (在微分流形中不代表空间坐标点!).

取 $C_u \to 1$ 条件, 由 (2) 式可得

$$\lim_{C_u \to 1} R_{\alpha=0} = R_0 \mathrm{e}^{H_H t}, \quad (24)$$

对应的 $f \equiv \lim\limits_{C_u \to 1} \dfrac{\dot{R}}{R} = H_H$ 为常量, 作为均匀物质统计平衡模型中的光子传播特征量.

从数学形式考虑, 还可讨论 $\lim\limits_{C_u \to -\infty} \alpha \to \infty$ 的情况. 由 (2) 式可得 $R_\infty \to R_0$ 常量 (本文后续部分以 R_∞ 代替 R_0), 等价于 $H = \dfrac{\dot{R}}{R} = 0$. 由 (17) 式可知, $\dot{R} = 0$ 是将 (18) 式拓展到了 $\dot{R} R^{-C_u} = \mathrm{const} \to 0$ 的极限情况. 但 R_∞ 不能作为曲线 $\{X^\mu\}$ 的自变量.

3 自由质点仿射参量时空坐标系及度规

在均匀物质背景环境中, 原点光源 O 辐射的任意光子 $p_{\bar{OP}}$ 被实物 P 吸收, 对应的光子光程为 r. 光子 $p_{\bar{OP}}$ 在 O 处的辐射能量为 $h\nu_0 = h/T_0$, 在 P 处的吸收能量为 $h\nu = h/T$, h 为普朗克常数. 考虑光源 O 处相隔时序 Δt 先后辐射出的两个光子都被 P 吸收的情况, P 吸收这两个光子的本征时间隔微元为 $\Delta\tau$, P 对应的空间位置变化为 $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$. 上述过程可用狭义相对论时空间隔描述

$$\begin{aligned} ds^2 &\equiv \lim_{\Delta t \to 0} \Big[-(c\Delta t)^2 + (\Delta X)^2 \\ &\quad + (\Delta Y)^2 + (\Delta Z)^2\Big] \\ &= -c^2 \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}X^2 + \mathrm{d}Y^2 + \mathrm{d}Z^2 \\ &= -c^2 \mathrm{d}\tau^2. \end{aligned} \quad (25)$$

(25) 式也可取球空间模型 $\{r, \theta, \varphi\}$, 对应的形式为

$$\begin{aligned} -c^2 \mathrm{d}\tau^2 &= -c^2 \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 \\ &\quad + r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right). \end{aligned} \quad (26)$$

取具有长度量纲的 $R_\infty = cT_\infty$ 为距离尺, 定义 P 的径向坐标

$$\varsigma \equiv r/R_\infty, \quad (27a)$$

$$\mathrm{d}\varsigma \equiv \frac{\mathrm{d}r}{R_\infty}. \quad (27b)$$

(27) 式代入 (26) 式, 可得四维坐标系 $\{t, \varsigma, \theta, \varphi\}$ 形式下的时空间隔

$$\begin{aligned} -c^2 \mathrm{d}\tau^2 &= -c^2 \mathrm{d}t^2 \\ &\quad + R_\infty^2 \left[\mathrm{d}\varsigma^2 + \varsigma^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right)\right]. \end{aligned} \quad (28)$$

由 (26), (28) 式中, $\lim\limits_{r, \zeta \to 0} \mathrm{d}\tau \to \mathrm{d}t$ 也可看出, $\mathrm{d}t$ 即光源 O 处的本征时微元. (25), (26), (28) 式分别代表平直时空 “实物元吸收原点辐射相邻光子对过程” 光程差微元的三种形式.

若基于 $R(t)$ 定义变尺度空间球坐标系 $\{\xi, \theta, \varphi\}$, 对应的径向坐标

$$\xi \equiv r/R(t), \quad (29)$$

因均匀平直时空模型中 $r/t \equiv c$ 常量, 所以基于原点辐射光子光程 r 概念可建立不同空间球坐标系径向坐标的变换关系

$$r = \xi R = \xi c T, \tag{30}$$

$$r = \varsigma R_\infty = \varsigma c T_\infty. \tag{31}$$

以 ς 为形式自变量, 两个空间坐标系之间径向坐标的变换关系为

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{R_\infty}{R}\varsigma = \frac{\varsigma}{\sqrt[\alpha]{\alpha H_0 t+1}} = \frac{\varsigma}{\sqrt[\alpha]{\alpha H_0 r/c+1}}\\ &= \frac{\varsigma}{\sqrt[\alpha]{\alpha H_0 T_\infty \varsigma+1}} = \frac{\varsigma^{1-1/\alpha}}{\sqrt[\alpha]{\alpha H_0 T_\infty+1/\varsigma}}.\end{aligned} \tag{32}$$

定义 $\xi_H H_0 T_\infty \equiv 1$. $\alpha\varsigma/\xi_H \ll 1$ 条件下, 有 $\xi \approx \varsigma$; $\alpha\varsigma/\xi_H \gg 1$ 条件下, 有 $\alpha\varsigma/\xi_H + 1 \approx \alpha\varsigma/\xi_H$, 即非线性近似 $\xi \approx \dfrac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha H_0 T_\infty}}\varsigma^{1-1/\alpha} = \sqrt[\alpha]{\dfrac{\xi_H}{\alpha}}\varsigma^{1-1/\alpha}$.

平直时空坐标系 $\{t,\varsigma,\theta,\varphi\}$ 为四维空间 [22]. 基于前述原点辐射光子光程概念, 空间坐标系 $\{\varsigma,\theta,\varphi\}$, $\{\xi,\theta,\varphi\}$ 之间对应的径向坐标变换 $\xi = \dfrac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha/\xi_H+1/\varsigma}}\varsigma^{1-1/\alpha}$, 角参量 (θ,φ) 保持不变. 在 $0<\alpha<1$ 条件下, 由 (32) 式可得径向坐标 ξ 取极大值条件 $\dfrac{d\xi}{d\varsigma}=0$ 对应于

$$1-\alpha = \frac{\xi_H}{\varsigma_{\xi_M}} > 0, \quad (0<\alpha<1), \tag{33}$$

ξ 的极大值为

$$\xi_M = (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\xi_H < \xi_H, \quad (0<\alpha<1). \tag{34}$$

取 $\alpha=0$, 径向坐标 ξ 取极大值条件 $\dfrac{d\xi}{d\varsigma}=0$ 对应于 $\varsigma_{\xi_M}=\xi_H$, 极大值 $\xi_M = \dfrac{\varsigma_H}{e}$. 可见, $0\leqslant\alpha<1$ 条件下的坐标变换 $\{\varsigma,\theta,\varphi\}\to\{\xi,\theta,\varphi\}_{0\leqslant\alpha<1}$ 不是一一对应的.

取 $\alpha=1$, $\dfrac{d\xi}{d\varsigma}>0$, 且有极限过程 $\lim\limits_{\varsigma\to\infty}\xi_M = \dfrac{1}{H_0T_\infty}=\xi_H$. 即平直无限三维空间坐标系 $\{\varsigma,\theta,\varphi\}$ 一对一变换到三维坐标系 $\{\xi,\theta,\varphi\}$ 的有限值域 $\xi\in(0,\xi_H)$. 在 $\alpha>1$ 条件下, $\dfrac{d\xi}{d\varsigma}>0$, $\{\varsigma,\theta,\varphi\}$ 一对一变换到三维坐标系 $\{\xi,\theta,\varphi\}$, 且有极限过程

$$1 > \lim_{\varsigma\to\infty}\frac{d\ln\xi}{d\ln\varsigma} = 1-1/\alpha > 0, \quad (\alpha>1). \tag{35}$$

比较 (16) 式可知, 极限过程 $\lim\limits_{\varsigma\to\infty}\{\varsigma\}\to\{\xi\}_{\alpha>1}$ 变换关系趋于分形, 分维数小于 1. 由此可得推论: 基于原点辐射光子过程, 进行四维平直时空坐标系 $\{t,\varsigma R_\infty,\theta,\varphi\}$ 与变尺度因子时空坐标系变换 $\{t,\xi R(t),\theta,\varphi\}_{\alpha>1}$, 由于尺度因子的约束效应, 时空坐标系 $\{t,\xi,\theta,\varphi\}_{\alpha>1}$ 的维数小于 4. 取 $\alpha=1$, 时空坐标系 $\{t,\xi,\theta,\varphi\}_{\alpha=1}$ 成为与 $\{t,\varsigma,\theta,\varphi\}$ 对应的 “无限有界弯曲时空” 模型.

由 (2), (31) 式可得平直空间坐标系 $\{\varsigma,\theta,\varphi\}$ 的 ς 与参量 $T=R/c$ 的对应关系

$$\varsigma = \frac{(T/T_\infty)^\alpha - 1}{\alpha H_0 T_\infty}, \quad (\alpha\neq 0). \tag{36}$$

由 (2), (30) 式可得变尺度因子空间坐标系 $\{\xi,\theta,\varphi\}$ 的 ξ 与参量 T 的对应关系

$$\xi = \frac{(T/T_\infty)^\alpha - 1}{\alpha H_0 T}, \quad (\alpha\neq 0). \tag{37}$$

取物质均匀分布模型, 若实物元 P 持续吸收原点辐射光子 $\{p_{\bar{O}P}\}_{\tau_1<\tau<\tau_2}$, 且光子参量 T/T_∞ 恒定, 则在此时间段内光子 $\{p_{\bar{O}P}\}_{\tau_1<\tau<\tau_2}$ 自由程 r 相同. R 函数中的 H, α 可根据沿 $\{p_{\bar{O}P}\}$ 传播方向 (θ,φ) 的 T 参数变化率来计算

$$\begin{aligned}H &\equiv \frac{\dot R}{R} = \frac{c\dot T}{cT}\\ &= \frac{1}{T(t)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{T\Delta t},\end{aligned} \tag{38a}$$

$$\begin{aligned}1-\alpha &\equiv \frac{c\ddot T}{cTH^2}\\ &= T\lim_{\Delta t\to 0}\frac{T(t+\Delta t)-T(t-\Delta t)}{[T(t+\Delta t)-T(t)][T(t)-T(t-\Delta t)]}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{T}{\Delta T}\frac{\Delta(\Delta T)}{\Delta T}\right],\end{aligned} \tag{38b}$$

H, α 为 $\{p_{\bar{O}P}\}$ 中相邻光子观测参量 T 微小差异的不同组合, 是光辐射源、光探测器、信号过程以及背景环境特性的反映. 取变尺度因子时空坐标系 $\{t,\xi,\theta,\varphi\}$ 形式, $\{p_{\bar{O}P}\}$ 中两个相邻光子的光程差微元

$$\begin{aligned}dr &\equiv \lim_{\Delta t\to 0}(R\Delta\xi + \xi\Delta R)\\ &= Rd\xi + \xi dR = Rd\xi + \xi\dot R dt.\end{aligned} \tag{39}$$

将 (29), (39) 式代入 (26) 式, 狭义相对论时空间隔对应的形式为

$$-c^2d\tau^2 = -c^2dt^2 + \left(Rd\xi + \xi\dot R dt\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&+R^2\xi^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\\
&=-\left(c^2-\dot{R}^2\xi^2\right)\mathrm{d}t^2+2R\dot{R}\xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t\\
&+R^2\left[\mathrm{d}\xi^2+\xi^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right],
\end{aligned}
\tag{40}
$$

(40) 式中消去 c, 可得以 t 为自变量的实物元径向坐标计算公式

$$
\xi=\frac{\sqrt{\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)^2\left[1-\left(\frac{\Delta\tau}{\Delta t}\right)^2\right]+C_{\theta\varphi}^2T^2\left[1-\left(\frac{\Delta\tau}{\Delta t}\right)^2-T^2\left(\frac{\Delta\xi}{\Delta t}\right)^2\right]}-\left(\frac{\Delta\xi}{\Delta t}\right)\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)T}{\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)^2+\dot{C}_{\theta\varphi}^2T^2},
\tag{41}
$$

其中与 R 无关的角量参数 $\dot{C}_{\theta\varphi}$ 满足

$$
\begin{aligned}
\dot{C}_{\theta\varphi}^2&\equiv\lim_{\Delta t\to0}\left[\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)^2+\sin^2\theta\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right)^2\right]\\
&=\frac{1}{\xi^2T^2}\lim_{\Delta t\to0}\left\{\left[1-\left(\frac{\Delta\tau}{\Delta t}\right)^2\right]\right.\\
&\left.-\left(\frac{\Delta\xi}{\xi\Delta t}+\frac{\Delta T}{T\Delta t}\right)^2\right\}.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

取导数形式, 由 (40) 式可得

$$
\begin{aligned}
&\left(\xi+\frac{T\dot{T}}{\dot{T}^2+T^2\dot{C}_{\theta\varphi}^2}\dot{\xi}\right)^2\\
&+\frac{\dot{C}_{\theta\varphi}^2T^2}{\dot{T}^2}\left(\frac{T\dot{T}}{\dot{T}^2+T^2\dot{C}_{\theta\varphi}^2}\dot{\xi}\right)^2\\
&=\frac{1-\dot{\tau}^2}{\dot{T}^2+T^2\dot{C}_{\theta\varphi}^2}.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

考虑到 $T,\dot{T},\dot{\tau}$ 非零且有限, 可知 (43) 式的几何形式对应于 ξ-$\dot{\xi}$ 平面上的封闭二次曲线. 该曲线表明, 取变尺度因子时空坐标系 $\{t,\xi,\theta,\varphi\}$ 形式, 非原点实物元 P 的状态参数 $\xi,\dot{\xi}$ 为不完全独立的有限值.

在时空间隔矩阵形式中, (25), (26), (28) 式对应于对角化时空度规 g. 其中 (28) 式的度规与 Friedmann 均匀宇宙模型 R-W 度规 $k=0$ 的形式一致. 取变尺度因子时空坐标系 $\{t,\xi,\theta,\varphi\}$, (40) 式对应的时空度规则呈现非对角化形式

$$
g\equiv\begin{bmatrix}
-\left(c^2-\dot{R}^2\xi^2\right) & R\dot{R}\xi & 0 & 0\\
R\dot{R}\xi & R^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & R^2\xi^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & R^2\xi^2\sin^2\theta
\end{bmatrix}.
\tag{44}
$$

4 仿射参量时空坐标系度规的对角化

4.1 原点辐射光子射线簇时空坐标系度规对角化

取与极限 $C_u\to0,\alpha=1$ 对应的仿射参量

$$
R_{\alpha=1}\equiv R_\infty\left(H_0t+1\right).
\tag{45}
$$

根据 (23) 式的讨论, 结合 (25) 式原点辐射光子光程差模型可知, 与常矢量对应的 $R_{\alpha=1}$ 函数可作为平直空间原点辐射光子 $\{p_{\bar{O}P}\}$ 射线簇的映射模型 $\{r,\theta,\varphi\}$. $\{\theta,\varphi\}$ 代表光子辐射方向, 径向距离 $\{r\}$ 代表原点辐射光子光程. 光程 r 与光子传播时间 t 成正比, 定义基本物理单位 $\frac{r}{t}\equiv c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $\varepsilon_0\mu_0$ 代表一般物质属性. 由 (45) 式可以看出, $R_{\alpha=1}$ 与光子光程成正比, 即可取合适单位使 $\dot{R}_{\alpha=1}\equiv R_\infty H_0=c$.

为了实现 (44) 式对角化, 定义非线性时空坐标变换 $\{t,\xi\}\to\{t_1,\zeta\}$,

$$
t_1\equiv\sqrt{1-\xi^2}\left(t+R_\infty/c\right),
\tag{46a}
$$

$$
\zeta\equiv\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}},
\tag{46b}
$$

$t_1(t,\xi)$ 代表平面 $\{t,\xi\}_{R_{\alpha=1}}$ 内的积分特征线簇 [20]. 与 $\mathrm{d}\tau$, $\mathrm{d}t$ 不同, $\mathrm{d}t_1$ 不代表实物计时间隔元! 将 t_1 和 ζ 代入 (40) 式, 可得

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{d}\tau^2=&-\mathrm{d}t_1^2+t_1^2\left[\frac{\mathrm{d}\zeta^2}{1+\zeta^2}\right.\\
&\left.+\zeta^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right].
\end{aligned}
\tag{47}
$$

令 $R(t_1) \equiv ct_1$, 与 (47) 式对应的对角化度规

$$g_{t_1} \equiv c^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t_1^2}{1+\zeta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_1^2\zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_1^2\zeta^2\sin^2\theta \end{bmatrix}, \tag{48}$$

g_{t_1} 与 Friedmann 均匀宇宙模型 $k=-1$ 的 R-W 度规形式一致.

若以实物元本征时 τ 为自变量定义仿射参量

$$R(\tau) \equiv R_\infty (H_0\tau + 1) = c\tau + R_\infty, \tag{49}$$

即定义空间坐标系 $\{\xi, \theta, \varphi\}_{\alpha=1}$ 的径向坐标 $\xi \equiv r/R(\tau)$. (40) 式可变换成

$$\begin{aligned} c^2\mathrm{d}t^2 = {} & \left(c^2 + \dot{R}^2\xi^2\right)\mathrm{d}\tau^2 + 2R\dot{R}\xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t \\ & + R^2\left[\mathrm{d}\xi^2 + \xi^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{50}$$

定义非线性时空坐标变换 $\{\tau, \xi\} \to \{\tau_1, \eta\}$,

$$\tau_1 \equiv \sqrt{1+\xi^2}\,(\tau + R_\infty/c), \tag{51a}$$

$$\eta \equiv \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}, \tag{51b}$$

$\tau_1(\tau, \xi)$ 代表平面 $\{\tau, \xi\}_{R(\tau)}$ 内的积分特征线簇 [20], $\mathrm{d}\tau_1$ 也不是实物计时间隔元. 将 τ_1, η 和 $R(\tau)$ 代入 (50) 式, 可得

$$\begin{aligned} -\mathrm{d}t^2 = {} & -\left[\mathrm{d}\tau_1^2 + \tau_1^2\frac{\mathrm{d}\eta^2}{1-\eta^2}\right. \\ & \left. + \tau_1^2\eta^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{52}$$

(47) 式左侧微元 $\mathrm{d}\tau$ 代表光子对接收时序间隔元, 而 (52) 式左侧微元 $\mathrm{d}t$ 则代表同一对光子的辐射时序间隔元, 两者的物理意义不同. 但就数学形式而言, (52) 式可理解为时空间隔在时空坐标系 $\{\tau_1, \eta, \theta, \varphi\}$ 中推广. 令 $R(\tau_1) \equiv c\tau_1$, 与 (52) 式对应的对角化度规

$$g_{\tau_1} \equiv c^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tau_1^2}{1-\eta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_1^2\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau_1^2\eta^2\sin^2\theta \end{bmatrix}. \tag{53}$$

取参量 T_∞ 为统一计时单位, 定义非线性时序变换 $\{t, \tau_1\} \to \{t_t T_\infty, \tau_{\tau_1} T_\infty\}$,

$$t/T_\infty \equiv \left(e^{t_t} - e^{-t_t}\right)e^{\tau_{\tau_1}} = 2\exp\tau_{\tau_1}\mathrm{sh}t_t, \tag{54a}$$

$$\tau_1/T_\infty \equiv \left(e^{t_t} + e^{-t_t}\right)e^{\tau_{\tau_1}} = 2\exp\tau_{\tau_1}\mathrm{ch}t_t, \tag{54b}$$

$$t_t = \ln\sqrt{\frac{t+\tau_1}{\tau_1 - t}}, \tag{55a}$$

$$\tau_{\tau_1} = \ln\sqrt{\frac{t+\tau_1}{2T_\infty}\cdot\frac{\tau_1 - t}{2T_\infty}}, \tag{55b}$$

$t_t(t, \tau_1)$, $\tau_{\tau_1}(t, \tau_1)$ 代表平面 $\{t, \tau_1\}$ 内一对特征线簇 [20], $\mathrm{d}t_t$, $\mathrm{d}\tau_{\tau_1}$ 同样不代表实物计时间隔元. (54) 式取微分, 代入 (52) 式, 可得

$$\begin{aligned} -\mathrm{d}\tau_{\tau_1}^2 = {} & -\mathrm{d}t_t^2 + \mathrm{ch}^2 t_t\left[\frac{\mathrm{d}\eta^2}{1-\eta^2}\right. \\ & \left. + \eta^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{56}$$

(56) 式作为时空间隔在时空坐标系 $\{t_t, \eta, \theta, \varphi\}$ 中推广. 取 $R(t_t) \equiv cT_\infty\mathrm{ch}t_t$, (56) 式对应的对角化度规为

$$g_{t_t} \equiv c^2 T_\infty^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{ch}^2 t_t}{1-\eta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^2\mathrm{ch}^2 t_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta^2\mathrm{ch}^2 t_t\sin^2\theta \end{bmatrix}, \tag{57}$$

g_{t_t} 与 Friedmann 均匀宇宙模型 $k=1$ 的 R-W 度规形式一致.

综上所述, 借助于仿射参量 $R_{\alpha=1}$ 和具有时间量纲的特征量 $t_1, \tau_1, t_t, \tau_{\tau_1}$, 由平直时空间隔 (40) 式可推导出 (47), (56) 式. 本文据此推定, 时空度规 g_{t_1}, g_{t_t} 对应于 Friedmann 均匀宇宙模型, 它们是四维平直时空均匀性在原点辐射光子射线簇时空坐标系中的具体形式.

4.2 实物元时钟时空坐标系度规对角化

取一般仿射参量形式

$$R(t) = cT = cT_\infty(\alpha H_0 t + 1)^{1/\alpha}. \tag{58}$$

令 (40) 式中实物元 P 的径向坐标 ξ 满足以下变化规律

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2\dot{T}\xi}{T\dot{\xi}} & \equiv \frac{1}{1-\dot{T}^2\xi^2} \\ & = 1 + \dot{T}^2\xi^2 + \left(\dot{T}^2\xi^2\right)^2 + \left(\dot{T}^2\xi^2\right)^3 \\ & \quad + \cdots \end{aligned} \tag{59}$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{2}{T\dot{\xi}} &= \dot{T}\xi\left[1+\dot{T}^2\xi^2+\left(\dot{T}^2\xi^2\right)^2\right.\\&\quad\left.+\left(\dot{T}^2\xi^2\right)^3+\cdots\right]\\&=\frac{\dot{T}\xi}{1-\dot{T}^2\xi^2},\end{aligned}\tag{60}$$

可得函数 ξ 满足的一阶非齐次微分方程 (伯努利方程)

$$\dot{\xi}+2\frac{\dot{T}}{T}\xi=\frac{2}{T\dot{T}}\xi^{-1},\tag{61a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi^2+4\frac{\dot{T}}{T}\xi^2=\frac{4}{T\dot{T}}.\tag{61b}$$

非原点实物 P 坐标 $\xi>0$, (61) 式存在唯一解 $\xi(t)$. 将 (59) 式代入 (40) 式 [20], 可得

$$\begin{aligned}-\mathrm{d}\tau^2 &= -\left(1-\dot{T}^2\xi^2\right)\mathrm{d}t^2\\&\quad+T^2\left[\frac{\mathrm{d}\xi^2}{1-\dot{T}^2\xi^2}\right.\\&\quad\left.+\xi^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right].\end{aligned}\tag{62}$$

与 (62) 式对应的对角化度规

$$g_\alpha\equiv c^2\begin{bmatrix}-\left(1-\dot{T}^2\xi^2\right) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{T^2}{1-\dot{T}^2\xi^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & T^2\xi^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & T^2\xi^2\sin^2\theta\end{bmatrix}.\tag{63}$$

(62) 式中两个时序参量均代表实物元时钟. 为了帮助理解度规 g_α 的物理意义, 考虑空间球对称物质分布的引力场环境. 由引力常数 G、空间球半径 $r\equiv R\xi$、球体内的总物质量 M 以及 $\dot{R}^2\xi^2=\dfrac{\dot{R}^2}{R^2}r^2=H^2r^2$ 可构成无量纲参数 χ,

$$\chi=\frac{GM}{r\dot{R}^2\xi^2}=\frac{GM}{\dot{R}^2R\xi^3},\tag{64}$$

χ 取常数对应的物理条件与仿射参量有关. 如 $\alpha=0$, $\dot{R}/R=H_H$ 常数, 则有

$$\begin{aligned}H_H^2 &= \frac{GM}{\chi R^3\xi^3}\\&=\frac{4\pi G}{3\chi}\rho_\mathrm{c}\to\frac{3M}{4\pi r^3}\\&=\rho_\mathrm{c}=\mathrm{const},\end{aligned}\tag{65}$$

物质密度常量 ρ_c 是爱因斯坦宇宙学原理的具体表现形式, (65) 式代表 $\{t,\xi\}_{R_{\alpha=0}}$ 平面内的均匀宇宙物态方程. $R=R_0\mathrm{e}^{H_Ht}$ 也出现在 "早期真空为主的宇宙暴胀" 模型中 [2,23]. 将常量 ρ_c 代入 (62) 式, 可得

$$\begin{aligned}-\mathrm{d}\tau^2\big|_{\alpha=0} &= -\left(1-\frac{4\pi G\rho_\mathrm{c}}{3\chi}T^2\xi^2\right)\mathrm{d}t^2\\&\quad+T^2\left[\frac{\mathrm{d}\xi^2}{1-(4\pi G\rho_\mathrm{c}/3\chi)T^2\xi^2}\right.\\&\quad\left.+\xi^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right].\end{aligned}\tag{66}$$

与 (66) 式对应的对角化度规

$$g_{\alpha=0}\equiv c^2\begin{bmatrix}-\left(1-\dfrac{4\pi G\rho_\mathrm{c}}{3\chi}T^2\xi^2\right) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{T^2}{1-\dfrac{4\pi G\rho_\mathrm{c}}{3\chi}T^2\xi^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & T^2\xi^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & T^2\xi^2\sin^2\theta\end{bmatrix}.\tag{67}$$

由微分方程 (61) 式, 可计算出

$$T^2\xi^2=\frac{\mathrm{ch}\,(4H_Ht)}{3H_H^2}+T_\infty^2\xi_0^2\mathrm{e}^{-4H_Ht}.$$

取 $\alpha=3/2$, $R=R_\infty(3H_0t/2+1)^{2/3}$, 有 $R^3H^2=R_\infty^3H_0^2$ 常数. χ 为常数的条件

$$\begin{aligned}R_\infty^3H_0^2&=\frac{GM}{\chi\xi^3R^3}R^3\\&=\frac{4\pi G}{3\chi}\rho_cR^3\to\frac{4\pi}{3}\rho R^3\\&=M_{3/2}=\mathrm{const.}\end{aligned}\tag{68}$$

常量 ρ_cR^3 对应于 $\{t,\xi\}_{R_{\alpha=3/2}}$ 平面内实物密度均匀分布的宇宙物态方程 [2,23]. 将 $M_{3/2}$ 代入 (62) 式后可得

$$\begin{aligned}-\mathrm{d}\tau^2\big|_{\alpha=\frac{3}{2}}=&-\left(1-\frac{GM_{3/2}}{\chi c^3}\frac{\xi^2}{T}\right)\mathrm{d}t^2\\&+T^2\left[\frac{\mathrm{d}\xi^2}{1-(GM_{3/2}/\chi c^3)(\xi^2/T)}\right.\\&\left.+\xi^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right].\end{aligned}\tag{69}$$

与 (69) 式对应的对角化度规

$$g_{\alpha=\frac{3}{2}}\equiv c^2\begin{bmatrix}-\left(1-\frac{GM_{3/2}}{\chi c^3}\frac{\xi^2}{T}\right)&0&0&0\\0&\dfrac{T^2}{1-\dfrac{GM_{3/2}}{\chi c^3}\dfrac{\xi^2}{T}}&0&0\\0&0&T^2\xi^2&0\\0&0&0&T^2\xi^2\sin^2\theta\end{bmatrix}.\tag{70}$$

由微分方程 (61) 式, 可计算出

$$\begin{aligned}\frac{\xi^2}{T}=&\frac{4}{5H_0^2T_\infty^3}+\left(\frac{\xi_0^2}{T_\infty}-\frac{4}{5H_0^2T_\infty^3}\right)\\&\times(3H_0t/2+1)^{-\frac{10}{3}}.\end{aligned}$$

取 $\alpha=2$, $R=R_\infty(2H_0t+1)^{1/2}$, $R\dot{R}=R_\infty^2H_0$ 常数. χ 为常数的条件

$$\begin{aligned}R_\infty^2H_0&=\sqrt{\frac{GM}{\chi\xi^3R^3}R^4}\\&=\sqrt{\frac{G}{\chi}\frac{4\pi}{3}\rho_cR^4}\to\sqrt{\frac{4\pi}{3}\rho_cR^4}\\&=S_{\alpha=2}=\mathrm{const.}\end{aligned}\tag{71}$$

常量 ρ_cR^4 对应于 $\{t,\xi\}_{R_{\alpha=2}}$ 平面内的辐射场密度均匀分布的宇宙物态方程 [18,23]. 将 $S_{\alpha=2}$ 代入 (62) 式后可得

$$\begin{aligned}-\mathrm{d}\tau^2\big|_{\alpha=2}=&-\left(1-\frac{GS_{\alpha=2}^2}{\chi c^4}\frac{\xi^2}{T^2}\right)\mathrm{d}t^2\\&+T^2\left[\frac{\mathrm{d}\xi^2}{1-(GS_{\alpha=2}^2/\chi c^4)(\xi^2T^2)}\right.\\&\left.+\xi^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right].\end{aligned}\tag{72}$$

与 (72) 式对应的对角化度规

$$g_{\alpha=2}\equiv c^2\begin{bmatrix}-\left(1-\frac{GS_{\alpha=2}^2}{\chi c^4}\frac{\xi^2}{T^2}\right)&0&0&0\\0&\dfrac{T^2}{1-\dfrac{GS_{\alpha=2}^2}{\chi c^4}\dfrac{\xi^2}{T^2}}&0&0\\0&0&T^2\xi^2&0\\0&0&0&T^2\xi^2\sin^2\theta\end{bmatrix}.\tag{73}$$

由微分方程 (61) 式, 可计算出

$$\frac{\xi^2}{T^2}=\frac{2}{3H_0^2T_\infty^4}+\left(\frac{\xi_0^2}{T_\infty^2}-\frac{2}{3H_0^2T_\infty^4}\right)(2Ht+1)^{-3}.$$

取总质量为 M_s 的星球外 "真空" 近似, $\alpha=3/2$[19,20], (64) 式 χ 为常数的条件

$$\begin{aligned}\xi^2R^2&=\frac{GM_s}{\chi R\xi}\\&=\frac{GM_s}{\chi r}\rightarrow\chi\xi^2R^2-\frac{GM_s}{r}\\&=0.\end{aligned}\tag{74}$$

(74) 式中 $\frac{GM_s}{r}$ 对应于星球外空间引力势函数 $V(r)$. 代入 (62) 式后可得

$$\begin{aligned}-c^2\mathrm{d}\tau^2\big|_{M_s}=&-\left(1-\frac{2GM_s}{c^2R\xi}\right)c^2\mathrm{d}t^2\\&+\left[\frac{R^2\mathrm{d}\xi^2}{1-(2GM_s/c^2R\xi)}\right.\\&\left.+R^2\xi^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right].\end{aligned}\tag{75}$$

(75) 式中取 $\chi=1/2$. 与 (75) 式对应的对角化度规

$$g_{M_s}\equiv\begin{bmatrix}-\left(1-\frac{2GM_s}{c^2R\xi}\right)c^2&0&0&0\\0&\frac{R^2}{1-\frac{2GM_s}{c^2R\xi}}&0&0\\0&0&R^2\xi^2&0\\0&0&0&R^2\xi^2\sin^2\theta\end{bmatrix}.\tag{76}$$

在星球外空间进一步取仿射参量近似为常量, 即 $R\mathrm{d}\xi\approx\mathrm{d}(R\xi)=\mathrm{d}r$, 则 g_{M_s} 与广义相对论 Schwarzschild 时空度规形式趋于一致.

5 自由质点仿射参量时空模型空间坐标时 τ_ξ

(40) 式消去常量 c, 以 t 为实物元 P 空间坐标 $\{\xi,\theta,\varphi\}$ 的形式自变量, 可得

$$\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t\sqrt{1-\left(T\dot{\xi}+\xi\dot{T}\right)^2-\xi^2T^2\left(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)}.\tag{77}$$

(77) 式对应于相对论运动时钟变慢效应. 令 $\mathrm{d}\xi\equiv\mathrm{d}\theta\equiv\mathrm{d}\varphi\equiv0$, 定义空间坐标时 τ_ξ,

$$\mathrm{d}\tau_\xi\equiv\mathrm{d}t\sqrt{1-\xi^2\dot{T}^2},\quad\left(1>\xi^2\dot{T}^2\right).\tag{78}$$

由于自由状态实物元 P 吸收光子过程一般不满足 $\mathrm{d}\xi\equiv\mathrm{d}\theta\equiv\mathrm{d}\varphi\equiv0$, 故 τ_ξ 也不代表实物元时序. 将 $\mathrm{d}\tau_\xi$ 与 (46), (51), (55) 式的特征时钟微元作一比较,

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}t_1(t,\xi)\\&\equiv\mathrm{d}\left[\sqrt{1-H_0^2T_\infty^2\xi^2}\left(t+\frac{1}{H_0}\right)\right],\end{aligned}\tag{79a}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\tau_1(\tau,\xi)\\&\equiv\mathrm{d}\left[\sqrt{1+H_0^2T_\infty^2\xi^2}\left(\tau+\frac{1}{H_0}\right)\right],\end{aligned}\tag{79b}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}t_t(t,\tau,\xi)\\&\equiv\mathrm{d}\left(\ln\sqrt{\frac{\tau_1+t}{\tau_1-t}}\right)\\&=\mathrm{d}\left(\ln\sqrt{\frac{\sqrt{1+H_0^2T_\infty^2\xi^2}(\tau H_0+1)+tH_0}{\sqrt{1+H_0^2T_\infty^2\xi^2}(\tau H_0+1)-tH_0}}\right),\end{aligned}\tag{79c}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\tau_{\tau_1}(t,\tau,\xi)\\&\equiv\mathrm{d}\left(\ln\sqrt{\frac{\tau_1^2-t^2}{4T_\infty^2}}\right)\\&=\mathrm{d}\left(\ln\sqrt{\frac{(1+H_0^2T_\infty^2\xi^2)(H_0\tau+1)^2-H_0^2t^2}{4T_\infty^2H_0^2}}\right).\end{aligned}\tag{79d}$$

可看出 τ_ξ 不是时空积分特征量. 将 (58) 式代入 (78) 式, 可得

$$\tau_\xi=\int\mathrm{d}t\sqrt{1-\xi^2H_0^2T_\infty^2(\alpha H_0t+1)^{2\frac{1-\alpha}{\alpha}}}.\tag{80}$$

(80) 式中 $H_0T_\infty\left(\alpha H_0t+1\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=\dot{T}$, 应用积分变量 $\mathrm{d}t\to\mathrm{d}\left(\xi\dot{T}\right)$ 置换, 可得

$$\tau_\xi=\frac{\left(\xi H_0T_\infty\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\left(1-\alpha\right)H_0}\int_{\xi H_0T_\infty}^{\xi\dot{T}}\sqrt{1-B^2}B^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}\mathrm{d}B,$$

$$\left(B^2<1\right), \tag{81}$$

τ_ξ 取有限级数解的条件为有理数 $\alpha=\dfrac{N+1}{N+2}$, N 为整数. 具体情况分述如下:

$N=0,\alpha=\dfrac{1}{2}$ 时有

$$\begin{aligned}\tau_{\xi,\frac{1}{2}}=&\frac{\dfrac{H_0t+2}{2}\sqrt{1-\xi^2H_0^2T_\infty^2\left(\dfrac{H_0}{2}t+1\right)^2}-\sqrt{1-\xi^2H_0^2T_\infty^2}}{H_0}\\&+\frac{\arcsin\left(\dfrac{H_0t+2}{2}\xi H_0T_\infty\right)-\arcsin\left(\xi H_0T_\infty\right)}{\xi T_\infty H_0^2}.\end{aligned}\tag{82}$$

$N=1,\alpha=\dfrac{2}{3}$ 时有

$$\tau_{\xi,\frac{2}{3}}=\frac{1}{\xi^2H_0^3T_\infty^2}\left[\sqrt{1-\xi^2H_0^2T_\infty^2}^3-\sqrt{1-\xi^2H_0^2T_\infty^2\left(2H_0t/3+1\right)}^3\right].\tag{83}$$

$N=2,\alpha=\dfrac{3}{4}$ 时有

$$\begin{aligned}\tau_{\xi,\frac{3}{4}}=&\frac{2\xi^2H_0^2T_\infty^2\left(\dfrac{3H_0}{4}t+1\right)^{2/3}-1}{2\xi^2H_0^3T_\infty^2}\\&\times\sqrt[3]{\frac{3H_0}{4}t+1}\sqrt{1-\xi^2H_0^2T_\infty^2\left(\frac{3H_0}{4}t+1\right)^{2/3}}\\&+\frac{\left(1-2\xi^2H_0^2T_\infty^2\right)\sqrt{1-\xi^2H_0^2T_\infty^2}}{2\xi^2H_0^3T_\infty^2}\\&+\frac{\arcsin\left(\xi H_0T_\infty\sqrt[3]{\frac{3H_0}{4}t+1}\right)-\arcsin\left(\xi H_0T_\infty\right)}{2\xi^3H_0^4T_\infty^3}.\end{aligned}\tag{84}$$

对 $N\geqslant3$ 的正整数, $\alpha=\dfrac{N+1}{N+2}$, 有

$$\begin{aligned}\tau_{\xi,\frac{N+1}{N+2}}=&\frac{\sqrt{1-\xi^2H_0^2T_\infty^2}^3-\left(\dfrac{\dot{T}}{H_0T_\infty}\right)^{N-1}\sqrt{1-\xi^2\dot{T}^2}^3}{H_0}\\&+\frac{\left(N-1\right)\displaystyle\int_{\xi H_0T_\infty}^{\xi\dot{T}}\sqrt{1-B^2}B^{N-2}\mathrm{d}B}{H_0\left(\xi H_0T_\infty\right)^{N-1}}.\end{aligned}\tag{85}$$

$N\to\infty$, 有 $\lim\limits_{N\to\infty}\alpha=1$, $\lim\limits_{N\to\infty}T_{\alpha=1}=T_\infty\left(H_0t+1\right)$, 即 $\dot{T}=H_0T_\infty$, 由 (80) 式直接可得

$$\begin{aligned}\tau_{\xi,1}&=\int_0^t\sqrt{1-\xi^2H_0^2T_\infty^2}\mathrm{d}t\\&=\sqrt{1-\xi^2H_0^2T_\infty^2}t.\end{aligned}\tag{86}$$

结合 (79a) 式, 还可看到两个 “时间参量”$\tau_{\xi,1}$, τ_ζ 之间的区别.

$N=-1, \alpha=0$, 有 $\dot{T}=H_H T_\infty \mathrm{e}^{H_H t}$, 代入 (78) 式可得

$$\tau_{\xi,0}=t+\frac{1}{H_H}\ln\frac{1+\sqrt{1-\xi^2H_H^2T_\infty^2}}{1+\sqrt{1-\xi^2H_H^2T_\infty^2e^{2H_Ht}}}+\frac{\sqrt{1-\xi^2H_H^2T_\infty^2e^{2H_Ht}}-\sqrt{1-\xi^2H_H^2T_\infty^2}}{H_H}. \tag{87}$$

$N=-2$ 意味着 $\alpha\to\infty, \dot{T}\equiv 0$, 即极限条件对应于平直空间坐标系 $\{\varsigma,\theta,\varphi\}$, 代入 (78) 式可得

$$\tau_{\xi,\infty}\equiv\tau_\varsigma=\int_0^t \mathrm{d}t=t, \tag{88}$$

τ_ς 代表经典物理学的绝对时钟模型 (惯性系坐标时钟全同性). 对 $N\leqslant -3$ 的负整数, α 可用自然数 n 来表示, $\alpha=\dfrac{n+1}{n}$, 可得

$$\begin{aligned}\tau_{\xi,\frac{n+1}{n}}=\;&\frac{n}{n+1}\frac{1}{H_0}\left[\left(\frac{n+1}{n}H_0t+1\right)^{n+1}\right.\\&\times\sqrt{1-\xi^2H_0^2T_\infty^2\left(\frac{n+1}{n}H_0t+1\right)^{-\frac{2}{n+1}}}^{\,3}\\&-\sqrt{1-\xi^2H_0^2T_\infty^2}^{\,3}-(n-2)\left(\xi H_0T_\infty\right)^{n+1}\\&\left.\times\int_{\xi H_0T_\infty}^{\xi\dot{T}}\sqrt{1-B^2}B^{-n}\mathrm{d}B\right].\end{aligned} \tag{89}$$

α 可全部用自然数 n 表示

$$\alpha=\frac{n\pm1}{n}\in\left\{\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots,1,\cdots,\frac{4}{5},\frac{3}{4},\frac{2}{3},\frac{1}{2},0\right\}, \tag{90}$$

且 (58) 式可写成

$$\frac{R_{n\pm1}(t)}{R_\infty}=\frac{T_{n\pm1}(t)}{T_\infty}=\left(\frac{n\pm1}{n}H_0t+1\right)^{\frac{n}{n\pm1}}. \tag{91}$$

径向坐标变换一一对应条件为 $\alpha>1$, 即取 $\alpha=\dfrac{n+1}{n}$. 代入 (38b) 式可得

$$1-\alpha=C_u=-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\cdots,-\frac{1}{n},\cdots \tag{92}$$

(92) 式对应的 $\ddot{R}<0$.

若仅从形式上考虑, 基于 τ_ξ-t 关系也可定义四维坐标系 $\{\tau_\xi,\xi,\theta,\varphi\}$. 但是, 坐标系 $\{\tau_\xi,\xi,\theta,\varphi\}$ 形式下不存在与相对论时空间隔对应的度规变换关系, 该坐标系的意义还有待进一步研究.

6 结 论

基于自由质点测地线仿射参量 $R(t)$ 定义空间变尺度因子时空坐标系 $\{t,\xi,\theta,\varphi\}$, 将相对论时空间隔 $\mathrm{d}s^2\equiv g_{\mu\nu}\mathrm{d}X^\mu\mathrm{d}X^\nu$ 从四维平直空间 $\{t,\varsigma,\theta,\varphi\}$ 形式映射到 $\{t,\xi,\theta,\varphi\}$ 形式, 发现与仿射参量 R 对应的各种对角化度规 $g_{\mu\nu}$ 在物理宇宙学领域可能具有重要的理论意义. 其中 $R=R_\infty\mathrm{e}^{\sqrt{8\pi G\rho_c/3}\cdot t}$ 与空间物质均匀分布宇宙模型对应, ρ_c 为宇宙平均密度常量; $R=ct+R_\infty$ 与原点辐射光子集合 $\{p_{\overline{OP}}\}$ 射线簇对应, 可作为平直空间坐标系 $\{\varsigma,\theta,\varphi\}$ 的信号基础; $R=R_\infty(H3t/2+1)^{2/3}$ 与 $\rho_\mathrm{c}R^3$ 为常量的空间实物均匀分布宇宙模型对应; $R=R_\infty\sqrt{2Ht+1}$ 与 $\rho_\mathrm{c}R^4$ 为常量的空间辐射场均匀分布宇宙模型对应. 恒定尺度 $R_\infty=cT_\infty$ 则与数学的平直四维坐标系 $\{t,\varsigma,\theta,\varphi\}$ 对应. 与 $\{t,\varsigma,\theta,\varphi\}$ 存在一一映射的变尺度因子时空坐标系 $\{t,\xi,\theta,\varphi\}_{\alpha>1}$ 维数小于 4, 且有 $\ddot{R}(t)<0$. 原点辐射光子射线簇时空坐标系 $\{t,\xi,\theta,\varphi\}_{\alpha=1}$ 的度规 g_{t_1}, g_{τ_1} 与广义相对论 Friedmann 均匀宇宙模型的弯曲时空 R-W 度规对应.

[1] Weinberg S 1980 *Gravitation and Cosmology* (1st Ed.) (Beijing: Science Press) p168, 468 (in Chinese) [温伯格 S 1980 引力论和宇宙论 (第一版) (北京: 科学出版社) 第 168, 468 页]

[2] Liang C B, Zhou B 2006 *Introduction to Differential Geometry and General Relativity* (Beijing: Science Press) p69, 190, 192 (in Chinese) [梁灿彬, 周彬 2006 微分几何入门与广义相对论 (北京: 科学出版社) 第 69, 190, 192 页]

[3] Pope A C, Matsubara T, Szalay A S, Blanton M R, Eisenstein D J, Gray J, Lain B, Bahcall N A, Brinkmann J, Budavari T, Connolly A J, Frieman J A, Gunn J E, Johnston D, KentS M, Lupton R H, Meiksin A, Nichol R C, Scranton R, Strauss M A, Szapudi I, Tegmark M, Vogeley M S, Weinberg D H, Zehavi I 2004 *Astrophys*

J. **607** 655

[4] Bennett C L, Hill R S, Hinshaw G, Nolta M R, Odegard N, Page L, Spergel D N, Weiland J L, Wright E L, Halpem M, Larosik N, Kogut A, Limon M, Meyer S S, Tucker G S, Wollack E 2003 *The Astrophysical Journal* **148** 97

[5] Mather J C, Cheng E S, Cottingham D A, Eplee R E, Fixsen D J, Hewagama T 1994 *The Amer. Astro. Soc.* **420** 439

[6] Benítez N, Riess A, Nugent P, Dickingson M, Chornock E, Filippenko V 2002 *The Astrophysical Journal* **577** L1

[7] Riess A G, Filippenko A V, Challis P, Clocchiattia A, Diereks A, Gamavich P M, Gilliland R L, Hogan C J, Jha S, Kirshner R P, Lebundgut B, Phillips M M, Reiss D, Schmidt B P, Schommer R A, Smith R C, Spyromilio J, Stubbs C, Suntzeff N B, Tonry J 1998 *Astron. J.* **116** 1009

[8] Schmidt B P, Suntzeff N B, Phillips M M, Schommer R A, Clocchiatti A, Kirshner R P, Garnavich P, Challis P, Leibundgut B, Spyromilio J, Riess A G, Filippenko A V, Hamuy M, Smith R C, Hogan C, Stubbs C, Diercks A, Reiss D, Gilliland R, Tonry J, Maza J, Dressler A, Walsh J, Ciardullo R 1998 *The Astrophysical Journal* **507** 46

[9] Cai R G 2007 *Phys. Lett.* B **657** 228

[10] Zhai X H, Zhao Y B 2006 *Chin. Phys.* **15** 2465

[11] Feng B, Wang X L, ZhangX M 2005 *Phys. Lett.* B **607** 35

[12] Li M 2004 *Phys. Lett.* B **603** 1

[13] Carroll S M 2001 *Living Rev. Rel* **4** 1

[14] Kamenshchik A Y, Moschella U, Pasquier V 2001 *Phys. Lett.* B **511** 265

[15] Nottale L 2010 *Found. Sci.* **15** 101

[16] Sorrell W H 2009 *Astrophys. Space. Sci.* **323** 205

[17] Avinash K, Rvachev V L 2000 *Foundations of Physics* **30** 139

[18] Hawking S W, Ellis G F R 2006 *The Large Scale Structure of Space-Time* (Changsha: Hunan Science and Technology Press) p30 (in Chinese) [霍金 S W, 埃利斯 G F R 2006 时空的大尺度结构 (长沙: 湖南科学技术出版社) 第 30 页]

[19] Lai X M, Bian B M, Yang L, Yang J, Bian N, Li Z H, He A Z 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 7955 (in Chinese) [赖小明, 卞保民, 杨玲, 杨娟, 卞牛, 李振华, 贺安之 2008 物理学报 **57** 7955]

[20] Bian B M, Lai X M, Yang L, Li Z H, He A Z 2012 *Acta. Phys. Sin.* **61** 080401 (in Chinese) [卞保民, 赖小明, 杨玲, 李振华, 贺安之 2012 物理学报 **61** 080401]

[21] Yu Y Q 1997 *Introduction of general relativity* (Beijing: Peking University Press) p18, 133, 158 (in Chinese) [愈允强 1997 广义相对论引论 (北京: 北京大学出版社) 第 18, 133, 158 页]

[22] Zhu H, Ji C C 2011 *Fractal theory and its applications* (Beijing: Science Press) p23 (in Chinese)[朱华, 姬翠翠 2011 分形理论及应用 (北京: 科学出版社) 第 23 页]

[23] Yu Y Q 2002 *Cosmophysics lectures* (Beijing: Peking University Press) p104, 105, 214 (in Chinese)[俞允强 2002 物理宇宙学讲义 (北京: 北京大学出版社) 第 104, 105, 214 页]

Free particle geodesic affine parameter time-space coordinate systems

Bian Bao-Min† Lai Xiao-Ming Yang Lin Li Zhen-Hua He An-Zhi

(*Department of Information Physics and Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing* 210094, *China*)

(Received 7 January 2012; revised manuscript received 23 February 2012)

Abstract

Taking the time-series t as independent variable, the parameter equations $\left\{X^i\left(t\right)\right\}$ of free particle space geodesic can be given. By transforming affine parameter $R\left(t\right)$ we achieve homogeneous geodesic differential equations, and derive the first-order differential equations which are satisfied by affine parameter R and the sequence of analytical solutions R marked by rational number C_u. In light of R we define the distance unit of flat four-dimensional coordinate system $\{t, r, \theta, \varphi\}$, and then establish a free particle geodesic affine parameter time-space coordinate system $\{t, \xi, \theta, \varphi\}$. By the study of the diagonalization process of special relativity time-space interval model metric tensor g in $\{t, \xi, \theta, \varphi\}$, we find the spatial and temporal line characteristic quantities $t_1\left(t, \xi\right)$, $\tau_1\left(\tau, \xi\right)$, $t_t\left(t, \tau, \xi\right)$ and $\tau_{\tau_1}\left(t, \tau, \xi\right)$ corresponding to diagonal metric. Derived from these quantities, the dimension of time-space coordinate system is less than 4.

Keywords: general relativity, the geodesic affine parameter, time-space matric

PACS: 04.20.–q, 03.30.+p, 02.40.–k

† E-mail: bianbaomin_56@yahoo.com.cn