

线性过阻尼分数阶 Langevin 方程的共振行为*

钟苏川¹⁾²⁾ 高仕龙¹⁾³⁾ 韦鹏¹⁾ 马洪^{1)†}

1) (四川大学数学学院, 成都 610064)

2) (四川大学锦城学院, 成都 611731)

3) (乐山师范学院数信学院, 乐山 614000)

(2012 年 1 月 8 日收到; 2012 年 2 月 20 日收到修改稿)

通过将广义 Langevin 方程中的系统内噪声建模为分数阶高斯噪声, 推导出分数阶 Langevin 方程, 其分数阶导数项阶数由系统内噪声的 Hurst 指数所确定. 讨论了处于强噪声环境下的线性过阻尼分数阶 Langevin 方程在周期信号激励下的共振行为, 利用 Shapiro-Loginov 公式和 Laplace 变换, 推导了系统响应的一、二阶稳态矩和稳态响应振幅、方差的解析表达式. 分析表明, 适当参数下, 系统稳态响应振幅和方差随噪声的某些特征参数、周期激励信号的频率及系统部分参数的变化出现了广义的随机共振现象.

关键词: 分数阶 Langevin 方程, 线性过阻尼振子, 分数阶高斯噪声, 随机共振

PACS: 05.10.Gg, 05.40.-a, 02.50.-r

1 引言

20 世纪 70 年代以来, 非线性科学的研究发现, 在许多实际的反应系统 (如物理系统、生化系统) 中, 随机涨落现象普遍存在, 并且对于小尺度的反应系统而言, 随机涨落起着关键作用. 引起涨落的主要原因是系统本身动力学行为产生的系统内噪声或者是外部环境运动对系统影响而产生的系统外噪声 [1-3].

在以往的研究中, 系统内噪声常被建模为高斯白噪声, 此时粒子的平均平方位移与时间变化之间的关系为: $\langle x^2(t) \rangle = 2Dt$, 称为“正常”扩散; 然而, 当粒子在稠密的黏性流体、具有内部自由度的流体以及湍流集团中运动时, 粒子的平均平方位移是时间 t 的幂律非线性函数, 即 $\langle x^2(t) \rangle = 2D_\delta t^\delta$, $\delta \neq 1$, 称为“反常”扩散 [1], “反常”扩散可以通过广义 Langevin 方程刻画.

最近十多年来, 分数阶微积分理论受到极大关注 [4,5], 在黏性材料、色噪声、混沌、“反常”扩

散 [5,6] 等现象的研究中有广泛应用. 人们注意到, “反常”扩散在时间上具有记忆性、在空间上具有非局部性, 而分数阶微积分同样也具有时间记忆性和长程空间相关性, 已被证明能够比整数阶更精确地描述有记忆和遗传、路径依赖性质的物理过程和生化反应过程.

因此, 本文首先提出将广义 Langevin 方程中的系统内噪声建模为分数阶高斯噪声, 使其自相关函数为幂律衰减的“长拖尾”状, 通过涨落耗散定理, 推导了广义 Langevin 方程的阻尼力项为粒子位移 $x(t)$ 的 Caputo 分数阶导数, 因此称由分数阶高斯噪声驱动的广义 Langevin 方程为分数阶 Langevin 方程.

本文还进一步分析了线性过阻尼分数阶 Langevin 方程在周期信号激励下的共振行为, 为了研究方便, 将系统固有频率受到的外部干扰建模为乘性双态噪声. 通过 Shapiro-Loginov 公式和 Laplace 变换, 推导了线性过阻尼分数阶 Langevin 方程系统响应的一、二阶稳态矩和稳态响应振幅、方差的解析表达式, 讨论内、外噪

* 国家自然科学基金 (批准号: 11171238) 资助的课题.

† E-mail: zsczsc48@hotmail.com; mahong@scu.edu.cn

声及周期激励信号等对系统响应函数的影响, 分析表明, 在适当参数下, 本文提出的线性过阻尼分数阶 Langevin 方程存在随机共振现象.

需要说明的是, 本文所用的“随机共振”是指由 Gitterman 等提出的“广义随机共振”, 即系统响应的某些函数 (如矩、自相关函数、功率谱或信噪比等) 随系统的某些特征参数 (如周期激励信号振幅、频率或噪声强度、相关率等) 非单调变化的现象 [7-9]. 同时, 文中推导得到的系统响应函数的解析表达式是未作任何近似的精确表达式, 故不必限制在弱噪声和弱激励信号范围内, 适用于任意噪声强度和周期信号振幅、频率, 能解释更为广泛的物理现象.

2 系统模型

2.1 广义 Langevin 方程

一个处于强噪声环境的线性过阻尼振子可由广义 Langevin 方程描述 [10,11]:

$$\begin{aligned} & \gamma \int_0^t K(t-u) \dot{x}(u) du + [\omega^2 + Z(t)] x(t) \\ & = A_0 \sin(\Omega t) + F(t), \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $x(t)$ 为单位质量粒子的位移, A_0, Ω 为周期激励信号的振幅和频率, ω 为系统固有频率, $\gamma > 0$ 为阻尼系数, 随机力 $Z(t)$ 为固有频率 ω 受到的随机扰动, 本文将其视为系统外噪声, 建模为双态噪声 [12]: $Z(t)$ 能取两个离散值 $\{a, -a\}$, $a > 0$, 取值概率满足 $P_s(a) = P_s(-a) = 1/2$, $Z(t)$ 的均值和方差为

$$\begin{aligned} \langle Z(t) \rangle & = 0, \\ \langle Z(t)Z(s) \rangle & = a^2 \exp[-v|t-s|], \end{aligned} \quad (2)$$

其中, a^2 为噪声强度, v 为噪声相关率.

$K(t)$ 为系统阻尼核函数, $F(t)$ 为粒子受到的随机力, 本文将其视为系统内噪声 ($F(t)$ 与系统所受的阻尼同一起源 [1,13]), $F(t)$ 和 $K(t)$ 满足涨落耗散定理 [1]

$$\langle F(t)F(s) \rangle = k_B T \cdot K(t-s), \quad (3)$$

其中 k_B 为波尔兹曼常数, T 是介质温度.

在均匀介质中, 粒子的运动轨迹是一个马尔科夫过程, 对应的随机力 $F(t)$ 建模为高斯白噪声: $\langle F(t) \rangle = 0$, $\langle F(t)F(s) \rangle = k_B T \cdot \delta(t-s)$,

此时 $K(t) = \delta(t)$, 阻尼力 $\gamma \int_0^t \delta(t-u) \dot{x}(u) du = \gamma \dot{x}(t)$, 广义 Langevin 方程退化为经典 Langevin 方程, 此时布朗粒子受到的阻尼力只与粒子当前速度有关; 而在非均匀介质中, 扩散过程具有记忆性, 粒子的运动轨迹是一个非马尔科夫过程, 此时随机力 $F(t)$ 应建模为色噪声, 由于在真实的物理和生化环境中介质对历史速度的记忆通常表现为幂律衰减的“长拖尾”状, 因此本文将随机力 $F(t)$ 建模为具有幂律型自相关函数的分数阶高斯噪声 [10,11,14-18].

2.2 分数阶高斯噪声

分数阶布朗运动 $B_H(t)$, $t \in R^+$ 是一个零均值的高斯过程, 对任意参数 H :

$$\begin{aligned} \langle B_H(t)B_H(s) \rangle & = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \\ & t, s \in R^+, \end{aligned}$$

其中, H 取值范围为 $0 < H < 1$, 称为 Hurst 指数 [14,15].

分数阶高斯噪声 $W_H(t)$ 是作为 $B_H(t)$, $t \in R^+$ 的广义导数而引入的概念 [16], 这里我们采用文献 [11] 给出的定义 $W_H(t) = \sqrt{2k_B T} \frac{dB_H(t)}{dt}$, 则 $W_H(t)$ 是零均值的平稳过程, 通过 $\langle B_H(t)B_H(s) \rangle$ 可推导出 $W_H(t)$ 的自相关函数:

$$\begin{aligned} \langle W_H(t)W_H(s) \rangle & = 2k_B T H(2H-1) |t-s|^{2H-2}, \\ & t, s \in R^+. \end{aligned} \quad (4)$$

2.3 线性过阻尼分数阶 Langevin 方程

将 (1) 式中的系统内噪声 $F(t)$ 选定为分数阶高斯噪声 $W_H(t)$, 结合 (3), (4) 两式, 此时的阻尼核函数 $K_H(t)$ 为

$$\begin{aligned} K_H(t) & = \frac{\langle W_H(0)W_H(t) \rangle}{k_B T} \\ & = 2H(2H-1) \cdot t^{2H-2}, \quad t \in R^+. \end{aligned} \quad (5)$$

为了保证阻尼核函数 $K_H(t) > 0$, 本文分数阶高斯噪声 $W_H(t)$ 的 Hurst 指数取值范围限制为 $1/2 < H < 1$ [10,11,17,18]. 根据 (4) 式, 此时 $W_H(t)$ 的自相关函数随着时间间距 $|t-s|$ 的增加而幂律衰减, Hurst 指数 H 越小衰减越快, H 越大衰减越慢.

将阻尼核函数 $K_H(t)$ 的表达式 (5) 代入 (1) 式,

推导得到了线性过阻尼分数阶 Langevin 方程

$$\begin{aligned} & \bar{\gamma} \frac{d^{2-2H}}{dt^{2-2H}} x(t) + [\omega^2 + Z(t)] x(t) \\ & = A_0 \sin(\Omega t) + W_H(t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{d^{2-2H}}{dt^{2-2H}} x(t) & = \frac{1}{\Gamma(2H-1)} \int_0^t (t-u)^{-(2-2H)} \\ & \times \dot{x}(u) du, \end{aligned}$$

$1/2 < H < 1$ 为 Caputo 意义下的分数阶导数 [19].

$\bar{\gamma} = \gamma \cdot \Gamma(2H+1) > 0$ 为广义阻尼系数 [20].

由 Caputo 分数阶导数的定义可知, 粒子位移 $x(t)$ 的分数阶导数相当于对其速度 $\dot{x}(t)$ 加权积分, 并且距离当前时刻越近的 $\dot{x}(t)$ 被赋予更大的权值, 距离当前时刻越远的权值越小, 具有衰减记忆性. 其权值减小的速率与分数阶导数的阶数 $2-2H$ 有关, 本质上是由驱动系统的分数阶高斯噪声 $W_H(t)$ 的 Hurst 指数 $H, 1/2 < H < 1$ 所确定. 特别地, 当 $H \rightarrow 1/2$ 时, 阻尼核函数 $K_H(t)$ 退化为单位冲激函数 $\delta(t)$, 系统失去记忆性, 分数阶导数退化为整数阶导数. 当 $H \rightarrow 1$ 时, 阻尼核函数 $K_H(t)$ 退化为常值函数, 系统对各个时刻速度的记忆能力完全相同. 由于 H 不同的系统可以刻画不同程度的记忆性, 因此分数阶高斯噪声 $W_H(t)$ 驱动广义 Langevin 方程所得到的分数阶 Langevin 方程具有更广泛的研究价值.

本文的主要工作是推导 (6) 式所刻画的线性过阻尼分数阶 Langevin 方程系统响应的一、二阶稳态矩和稳态响应振幅、方差的解析表达式, 并探究其共振行为.

最后说明, 本文将 $Z(t)$ 视为系统外噪声, $W_H(t)$ 视为系统内噪声, 内、外噪声起源各不同, 因此假设 $W_H(t)$ 和 $Z(t)$ 不相关, 即 $\langle W_H(t)Z(s) \rangle = 0$.

3 系统响应一、二阶稳态矩及稳态响应振幅、方差

3.1 系统响应一阶稳态矩及稳态响应振幅

对 (6) 式两边取平均, 得到系统响应一阶矩 $\langle x(t) \rangle$ 满足的微分方程

$$\bar{\gamma} \frac{d^{2-2H}}{dt^{2-2H}} \langle x(t) \rangle + \omega^2 \langle x(t) \rangle + \langle Z(t)x(t) \rangle$$

$$= A_0 \sin(\Omega t). \quad (7)$$

由于 (7) 式中出现了新的耦合项 $\langle Z(t)x(t) \rangle$, 需要对该项进行解耦. 利用 Shapiro-Loginov 公式 [21] 可得 $\langle Z(t)x(t) \rangle$ 所满足的微分方程

$$\frac{d}{dt} \langle Z(t)x(t) \rangle = \langle Z(t)\dot{x}(t) \rangle - v \langle Z(t)x(t) \rangle. \quad (8)$$

此时 (8) 式中又出现了新的耦合项 $\langle Z(t)\dot{x}(t) \rangle$, 需要继续寻找其所满足的方程. 将 (6) 式的两边乘以 $Z(t)$ 并取平均得到

$$\begin{aligned} & \bar{\gamma} e^{-vt} \frac{d^{2-2H}}{dt^{2-2H}} (\langle Z(t)x(t) \rangle e^{vt}) \\ & + \omega^2 \langle Z(t)x(t) \rangle + \langle Z^2(t)x(t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

(9) 式中出现了新的高阶相关项 $\langle Z^2(t)x(t) \rangle$, 利用双态噪声 $Z(t)$ 的性质: $\langle Z^2(t)x(t) \rangle = a^2 \langle x(t) \rangle$, 可将 (9) 式化简为

$$\begin{aligned} & \bar{\gamma} e^{-vt} \frac{d^{2-2H}}{dt^{2-2H}} (\langle Z(t)x(t) \rangle e^{vt}) \\ & + \omega^2 \langle Z(t)x(t) \rangle + a^2 \langle x(t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

(7), (8), (10) 式为关于 $\langle x(t) \rangle$, $\langle Z(t)x(t) \rangle$, $\langle Z(t)\dot{x}(t) \rangle$ 的方程组, 为简化记号设: $x_1 = \langle x(t) \rangle$, $x_2 = \langle Z(t)x(t) \rangle$, $x_3 = \langle Z(t)\dot{x}(t) \rangle$, 对方程组做 Laplace 变换 [19,22]

$$\begin{aligned} & (\bar{\gamma} s^{2-2H} + \omega^2) X_1(s) + X_2(s) \\ & = \frac{A_0 \Omega}{s^2 + \Omega^2} + \bar{\gamma} s^{1-2H} x_1(0), \\ & (s+v) X_2(s) - X_3(s) = x_2(0), \\ & a^2 X_1(s) + [\bar{\gamma}(s+v)^{2-2H} + \omega^2] X_2(s) \\ & = \bar{\gamma}(s+v)^{1-2H} x_2(0), \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $X_i(s) = \int_0^{+\infty} x_i(t) e^{-st} dt$, $i = 1, 2, 3$, $x_1(0), x_2(0)$ 为初值条件.

由方程组 (11) 式看出, 系统响应的一阶矩所满足的方程在 s 域为一个三元非齐次线性方程组, 解方程组可得 $X_i(s), i = 1, 2, 3$ 的解析表达式

$$\begin{aligned} X_i(s) & = \hat{H}_{i1}(s) \cdot \frac{A_0 \Omega}{s^2 + \Omega^2} \\ & + \left[\hat{H}_{i1}(s) \cdot \bar{\gamma} s^{1-2H} x_1(0) \right. \\ & + \hat{H}_{i2}(s) \cdot x_2(0) + \hat{H}_{i3}(s) \\ & \left. \times \bar{\gamma}(s+v)^{1-2H} x_2(0) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

将 (12) 式做逆 Laplace 变换, 得到系统响应一阶矩 $x_1 = \langle x(t) \rangle, x_2 = \langle Z(t)x(t) \rangle, x_3 = \langle Z(t)\dot{x}(t) \rangle$

的解析表达式

$$x_i(t) = A_0 \int_0^t H_{i1}(t-u) \sin(\Omega u) du + [G_{i1}(t)x_1(0) + G_{i2}(t)x_2(0)], \quad (13)$$

其中, $\hat{G}_{i1}(s) = \hat{H}_{i1}(s) \cdot \bar{\gamma} s^{1-2H}$, $\hat{G}_{i2}(s) = \hat{H}_{i2}(s) + \hat{H}_{i3}(s) \cdot \bar{\gamma}(s+v)^{1-2H}$, $i = 1, 2, 3$.

$\hat{H}_{ik}(s)$, $i, k = 1, 2, 3$ 为 $H_{ik}(t)$ 的 Laplace 变换, 即 $\hat{H}_{ik}(s) = \int_0^\infty H_{ik}(t)e^{-st} dt$, 而 $\hat{H}_{ik}(s)$, $i, k = 1, 2, 3$ 可以通过方程组 (11) 确定, 特别地,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{11}(s) &= \frac{1}{H(s)} [\bar{\gamma}(s+v)^{2-2H} + \omega^2], \\ \hat{H}_{21}(s) &= \frac{1}{H(s)} (-a^2), \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$H(s) = (\bar{\gamma} s^{2-2H} + \omega^2) \times [\bar{\gamma}(s+v)^{2-2H} + \omega^2] - a^2.$$

为保证 (13) 式所给出的系统响应一阶矩的稳定性 (意味着 $H(s) = 0$ 不能有正实根), 系统参数需满足如下不等式 [12,23]:

$$a^2 < a_{cr}^2 = \omega^2 (\bar{\gamma} v^{2-2H} + \omega^2). \quad (15)$$

本文的后续讨论都是基于条件 (15) 成立的情况下进行的, 此时, $t \rightarrow \infty$ 初始条件对系统响应的影响将逐渐消失, 系统响应的一阶稳态矩分别为

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle_{as} &= \langle x(t) \rangle |_{t \rightarrow \infty} \\ &= A_0 \int_0^t H_{11}(t-u) \sin(\Omega u) du, \\ \langle Z(t)x(t) \rangle_{as} &= \langle Z(t)x(t) \rangle |_{t \rightarrow \infty} \\ &= A_0 \int_0^t H_{21}(t-u) \sin(\Omega u) du. \end{aligned} \quad (16)$$

(16) 式中的系统响应一阶稳态矩 $\langle x(t) \rangle_{as}$, $\langle Z(t)x(t) \rangle_{as}$ 可以从信号处理的角度理解, 即周期信号 $A_0 \sin(\Omega t)$ 输入已知系统函数为 $\hat{H}_{11}(s)$, $\hat{H}_{21}(s)$ 的线性时不变系统的输出, 因此 (16) 式可进一步表示为 [22,24]

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle_{as} &= A_1 \sin(\Omega t + \varphi_1), \\ \langle Z(t)x(t) \rangle_{as} &= A_2 \sin(\Omega t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (17)$$

其中 A_1 , A_2 和 φ_1 , φ_2 为系统响应一阶稳态矩 $\langle x(t) \rangle_{as}$, $\langle Z(t)x(t) \rangle_{as}$ 的振幅和相移, A_1 又称为系统稳态响应振幅, 它们可根据 $\hat{H}_{11}(s)$, $\hat{H}_{21}(s)$

的表达式 (14) 得到

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{f_3^2 + f_4^2}}, \quad \varphi_1 = \arctan \left(\frac{f_2 f_3 - f_1 f_4}{f_1 f_3 + f_2 f_4} \right), \\ A_2 &= A_0 \sqrt{\frac{a^4}{f_3^2 + f_4^2}}, \quad \varphi_2 = \arctan \left(-\frac{f_4}{f_3} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{\gamma} b^{2-2H} \cos[(2-2H)\theta] + \omega^2, \\ f_2 &= \bar{\gamma} b^{2-2H} \sin[(2-2H)\theta], \\ f_3 &= \bar{\gamma}^2 (\Omega b)^{2-2H} \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) (2-2H) \right] \\ &\quad + \omega^2 \bar{\gamma} \Omega^{2-2H} \cos \left[\frac{\pi}{2} (2-2H) \right] \\ &\quad + \omega^2 \bar{\gamma} b^{2-2H} \cos[(2-2H)\theta] + \omega^4 - a^2, \\ f_4 &= \bar{\gamma}^2 (\Omega b)^{2-2H} \sin \left[\left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) (2-2H) \right] \\ &\quad + \omega^2 \bar{\gamma} \Omega^{2-2H} \sin \left[\frac{\pi}{2} (2-2H) \right] \\ &\quad + \omega^2 \bar{\gamma} b^{2-2H} \sin[(2-2H)\theta], \\ b &= \sqrt{v^2 + \Omega^2}, \quad \theta = \arctan \left(\frac{\Omega}{v} \right). \end{aligned}$$

3.2 系统响应的二阶稳态矩及稳态响应方差

下面用类似的方法来求系统响应的二阶稳态矩. 将 (6) 式的两边乘以 $x(t)$ 并取平均得到积分方程

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} e^{-vt} \int_0^t \frac{(t-u)^{2H-2}}{\Gamma(2H-1)} \langle x(u)\dot{x}(u) \rangle e^{vu} du \\ + \omega^2 \langle x^2(t) \rangle + \langle Z(t)x^2(t) \rangle \\ = A_0 \sin(\Omega t) \langle x(t) \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

(19) 式中出现了新的耦合项 $\langle x(t)\dot{x}(t) \rangle$, $\langle Z(t)x^2(t) \rangle$, 分别建立如下方程:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle &= 2 \langle x(t)\dot{x}(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle Z(t)x^2(t) \rangle &= 2 \langle Z(t)x(t)\dot{x}(t) \rangle \\ &\quad - v \langle Z(t)x^2(t) \rangle \end{aligned} \quad (20)$$

此时 (21) 式中又出现了新的耦合项 $\langle Z(t)x(t)\dot{x}(t) \rangle$, 需要继续寻找其所满足的方程, 将 (6) 式的两边乘以 $Z(t)x(t)$ 并取平均, 得

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\gamma} e^{-vt}}{2} \frac{d^{2-2H}}{dt^{2-2H}} (\langle Z(t)x^2(t) \rangle e^{vt}) \\ + \omega^2 \langle Z(t)x^2(t) \rangle + a^2 \langle x^2(t) \rangle \end{aligned}$$

$$= A_0 \sin(\Omega t) \langle Z(t)x(t) \rangle. \quad (22)$$

(19), (20), (21), (22) 组成关于 $\langle x^2(t) \rangle$, $\langle x(t)\dot{x}(t) \rangle$, $\langle Z(t)x^2(t) \rangle$, $\langle Z(t)x(t)\dot{x}(t) \rangle$ 的一个微分 - 积分方程组. 为求解此方程组, 继续利用 Laplace 变换, 设 $y_1 = \langle x^2(t) \rangle$, $y_2 = \langle x(t)\dot{x}(t) \rangle$, $y_3 = \langle Z(t)x^2(t) \rangle$, $y_4 = \langle Z(t)x(t)\dot{x}(t) \rangle$, 对方程组 (19), (20), (21), (22) 分别作 Laplace 变换

$$\begin{aligned} & \omega^2 Y_1(s) + \bar{\gamma}(s+v)^{1-2H} Y_2(s) + Y_3(s) \\ &= \int_0^{+\infty} A_0 \sin(\Omega t) x_1(t) e^{-st} dt, \\ & sY_1(s) - 2Y_2(s) = y_1(0), \\ & (s+v)Y_3(s) - 2Y_4(s) = y_3(0), \quad (23) \\ & a^2 Y_1(s) + \left[\frac{\bar{\gamma}}{2}(s+v)^{2-2H} + \omega^2 \right] Y_3(s) \\ &= \int_0^{+\infty} A_0 \sin(\Omega t) x_2(t) e^{-st} dt \\ & + \frac{\bar{\gamma}}{2}(s+v)^{1-2H} y_3(0), \end{aligned}$$

其中, $Y_i(s) = \int_0^{+\infty} y_i(t) e^{-st} dt$, $i = 1, 2, 3, 4$, $y_1(0)$, $y_3(0)$ 为初值条件.

求解四元非齐次线性方程组 (23) 可得 $Y_i(s)$, $i = 1, 2, 3, 4$ 的解析表达式, 再做逆 Laplace 变换可得系统响应二阶矩 $y_1 = \langle x^2(t) \rangle$, $y_2 = \langle x(t)\dot{x}(t) \rangle$, $y_3 = \langle Z(t)x^2(t) \rangle$, $y_4 = \langle Z(t)x(t)\dot{x}(t) \rangle$ 的稳态 ($t \rightarrow \infty$) 表达式

$$\begin{aligned} y_i^{(as)}(t) &= y_i(t) |_{t \rightarrow \infty} \\ &= N_i + J_{2i} \sin(2\Omega t) \\ & \quad + J_{2i-1} \cos(2\Omega t), \\ & i = 1, 2, 3, 4, \quad (24) \end{aligned}$$

其中常数 N_i , J_k 可由 (13), (23) 式所确定.

特别地, 二阶稳态矩 $y_1^{(as)}(t) = \langle x^2(t) \rangle_{as}$ 的时齐部分 N_1 的解析表达式为

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{A_0}{2} \left[\frac{A_1(\bar{\gamma}v^{2-2H} + 2\omega^2)}{\omega^2(\bar{\gamma}v^{2-2H} + 2\omega^2) - 2a^2} \cos \varphi_1 \right. \\ & \quad \left. - \frac{2A_2}{\omega^2(\bar{\gamma}v^{2-2H} + 2\omega^2) - 2a^2} \cos \varphi_2 \right], \quad (25) \end{aligned}$$

其中, $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ 见 (18) 式.

进一步, 粒子位移 $x(t)$ 的稳态响应方差的时齐部分可以表示为

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \left\{ \langle x^2(t) \rangle_{as} - [\langle x(t) \rangle_{as}]^2 \right\} dt \\ &= N_1 - \frac{A_1^2}{2}. \quad (26) \end{aligned}$$

为了保证 (24) 式所给出的系统响应二阶稳态矩 $y_i^{(as)}(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ 的稳定性, 系统参数需满足如下不等式:

$$a^2 < a_{cr}^2 = \omega^2 \left(\frac{\bar{\gamma}v^{2-2H}}{2} + \omega^2 \right). \quad (27)$$

结合一阶矩、二阶矩的稳定性条件 (15), (27) 式, 本文后续仿真实验都基于条件 $a^2 < \omega^4$ 进行的.

4 数值结果

表达式 (18) 和 (26) 分别给出了系统稳态响应振幅 A_1 、方差 σ^2 的解析表达式. 下面我们讨论系统内、外噪声参数 (Hurst 指数, 强度, 相关率)、周期激励信号频率 Ω 及系统阻尼系数 γ 对 A_1, σ^2 的影响.

4.1 系统稳态响应振幅 A_1 的随机共振现象

图 1(a), (b), (c), (d) 分别绘制了以噪声 $Z(t)$ 的强度 a^2 、相关率 v 、阻尼系数 γ 和周期信号频率 Ω 为参数的 A_1 - H 曲线.

图 1(a), (b) 分别绘制了 A_1 - H 随噪声 $Z(t)$ 强度 a^2 和相关率 v 的变化曲线. 从响应曲线看出, 曲线都有不同程度的共振峰, 即对应的分数阶 Langevin 系统都出现了广义的随机共振现象, 并且随着强度 a^2 的增大, 相关率 v 的减小, 共振峰更加明显, 随着 a^2 的增大, 共振峰位置右移; 随着 v 的减小, 共振峰位置左移.

图 1(c) 绘制了以阻尼系数 γ 为参数的 A_1 - H 曲线, 三条曲线都有共振峰, 即系统出现了广义的随机共振, 随着 γ 的减小, 共振峰更明显, 共振峰位置右移.

图 1(d) 绘制了以周期激励信号频率 Ω 为参数的 A_1 - H 曲线. 图中的三条曲线都呈现非单调的变化, 即对应的系统都出现了广义的随机共振现象. 同时, 当外部激励周期信号的频率 Ω 变化时, A_1 - H 的曲线有三种不同的变化形式, 即系统稳态响应振幅 A_1 随噪声 Hurst 指数 H 的变化曲线显示出类相变现象. 当 $\Omega = 0.9$ 时, 曲线有一个极大值, 即单峰相; 当 $\Omega = 1.1$ 时, 曲线有一个极小值和一个极大

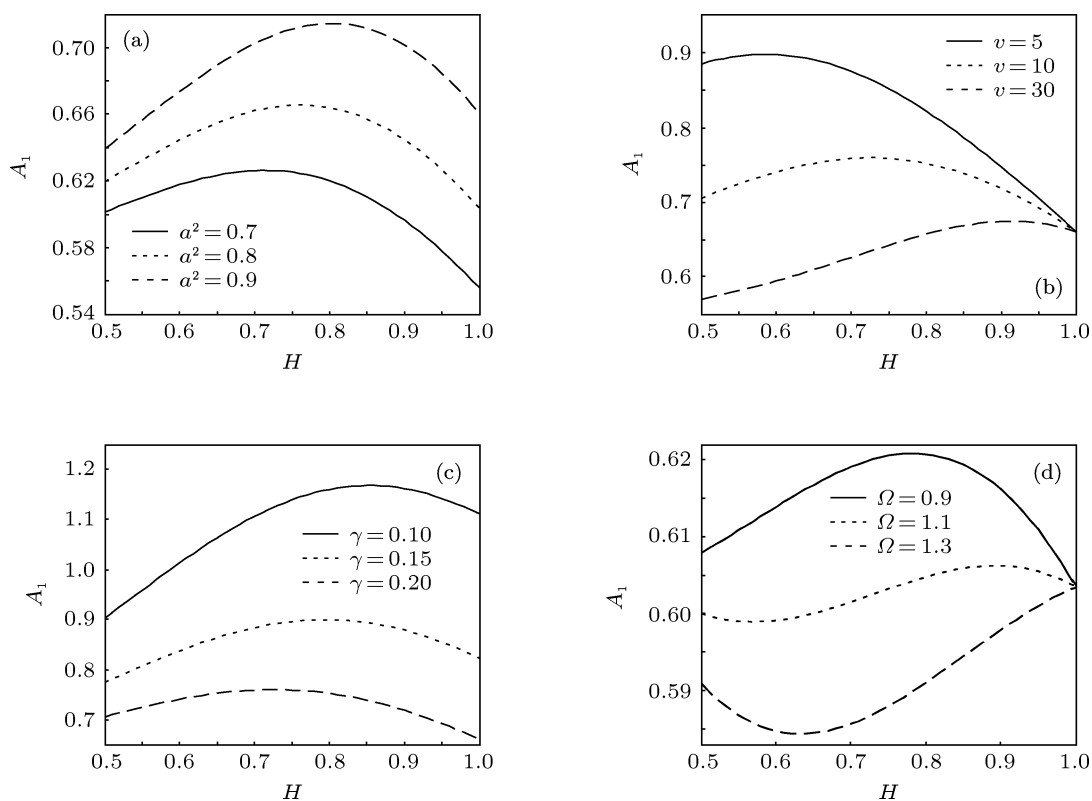


图1 A_1 - H 变化曲线 $A_0 = 0.5, \omega = 1$ (a) $\Omega = 0.5, v = 15, \gamma = 0.2$; (b) $\Omega = 0.5, a^2 = 0.9, \gamma = 0.2$; (c) $\Omega = 0.5, a^2 = 0.9, v = 10$; (d) $a^2 = 0.8, v = 15, \gamma = 0.2$

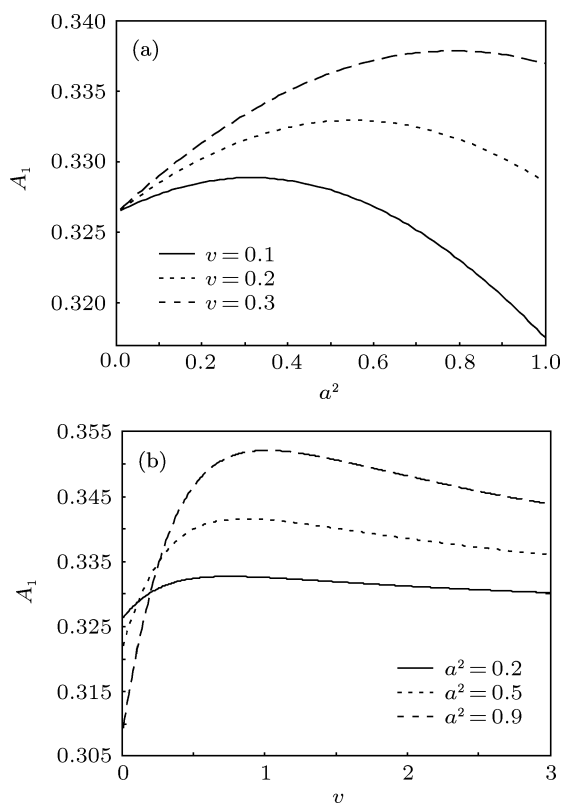


图2 稳态响应振幅 A_1 曲线 (参数: $A_0 = 0.5, \omega = 1, \Omega = 0.5, H = 0.53, \gamma = 2$) (a) A_1 - a^2 ; (b) A_1 - v

值, 即一谷一峰相; 随着 Ω 增大至 $\Omega = 1.3$ 时, 曲线有一个极小值, 即单谷相.

图 2(a), (b) 分别绘制在系统阶数固定情况下, A_1 随噪声 $Z(t)$ 强度 a^2 和相关率 v 的变化曲线, 各条曲线都存在不同程度的共振峰, 即分数阶系统出现了广义的随机共振现象, 同时随着 a^2, v 的增大, 共振峰更加明显, 共振峰的位置右移.

4.2 系统稳态响应方差 σ^2 的随机共振现象

图 3(a), (b) 分别绘制了 σ^2 - H 随噪声 $Z(t)$ 强度 a^2 、相关率 v 的变化曲线. 从响应曲线看出, 曲线都有不同程度的共振峰, 即对应系统都出现了广义的随机共振现象, 并且随着强度 a^2 的增大, 相关率 v 的减小, 共振峰更加明显, 随着 a^2 的增大, 共振峰位置右移; 随着 v 的减小, 共振峰位置左移.

图 3(c) 绘制了以阻尼系数 γ 为参数的 σ^2 - H 曲线, 三条曲线都有共振峰, 即系统出现了广义的随机共振, 并且随着 γ 的减小, 共振峰变高变窄, 位置右移.

图 3(d) 绘制了以周期激励信号频率 Ω 为参数的 σ^2-H 曲线, 曲线都有共振峰, 即出现了广义的随

机共振现象, 随着 Ω 的减小, 共振峰变高变窄, 位置左移.

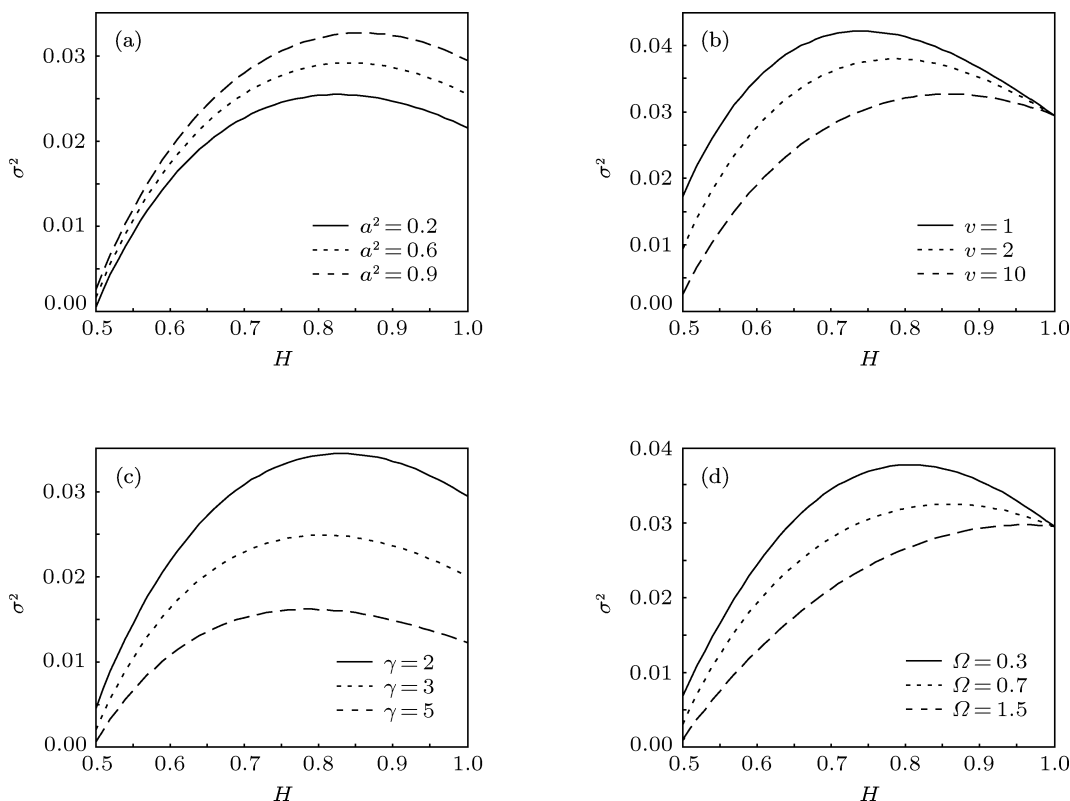


图 3 σ^2-H 变化曲线 ($A_0 = 0.5, \omega = 1$) (a) $\Omega = 0.5, v = 10, \gamma = 2$; (b) $\Omega = 0.5, a^2 = 0.9, \gamma = 2$; (c) $\Omega = 0.5, a^2 = 0.9, v = 5$; (d) $a^2 = 0.9, v = 5, \gamma = 2$

图 4(a), (b) 分别绘制了 σ^2 随噪声 $Z(t)$ 的强度 a^2 、相关率 v 的变化曲线. 从图 4(a) 的响应曲线看出, 随着噪声强度 a^2 的增大, 稳态响应方差 σ^2 单调增加, 未产生随机共振现象; 从图 4(b) 的响应

曲线看出, 对于给定噪声强度 a^2 的曲线, 随着噪声相关率 v 的增大, 曲线出现了一个极小值, 即出现了单谷相, 并且噪声强度 a^2 越大, 谷的形状越明显, 谷底位置变高.

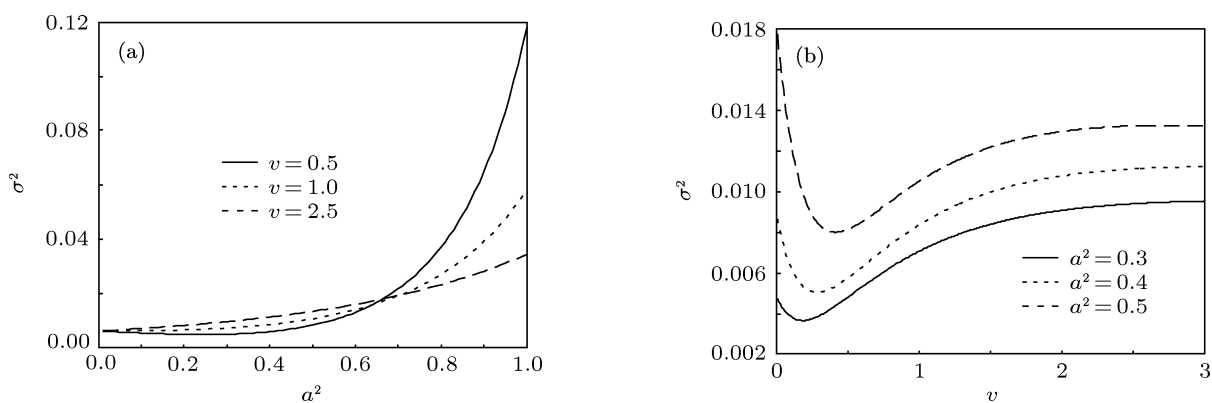


图 4 稳态响应方差 σ^2 曲线 (参数: $A_0 = 0.5, \omega = 1, \Omega = 0.5, H = 0.54, \gamma = 1$) (a) σ^2-a^2 ; (b) σ^2-v

5 结论

本文通过将广义 Langevin 方程的系统内噪声建模为分数阶高斯噪声推导得到了分数阶 Langevin 方程, 并研究了周期激励信号作用下的线性过阻尼分数阶 Langevin 方程的随机共振行为,

推导出系统响应的一、二阶稳态矩和稳态响应振幅、方差的解析表达式, 讨论了噪声、周期激励信号和系统参数对系统响应的影响, 发现在适当参数下线性过阻尼分数阶 Langevin 方程存在广义随机共振现象, 并且发现了多种不同的共振行为.

-
- [1] Bao J D 2009 *Random Simulation Method of Classical and Quantum Dissipation System* (1st Ed.) (Beijing: Science Press) p79, 84, 147 (in Chinese) [包景东 2009 经典和量子耗散系统的随机模拟方法 (第一版)(北京: 科学出版社) 第 79, 84, 147 页]
- [2] Gong Y B, Hou Z H, Xin H W 2004 *Chemical Journal of Chinese Universities* **25** 1477 (in Chinese) [龚玉兵, 候中怀, 辛厚文 2004 高等学校化学学报 **25** 1477]
- [3] Guo Y F, Xu W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6081 (in Chinese) [郭永峰, 徐伟 2008 物理学报 **57** 6081]
- [4] Huang F, Liu F 2005 *The Anziam Journal.* **46** 317
- [5] Liu F, Anh V, Turner I, Zhuang P 2003 *J. Appl. Math. & Computing* **13** 233
- [6] Benson D A, Wheatcraft S W, Meerschaert M M 2000 *Water Resources Research* **36** 1403
- [7] Gitterman M 2005 *Physical A* **352** 309
- [8] Jin Y F, Hu H Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2895 (in Chinese) [靳艳飞, 胡海岩 2009 物理学报 **58** 2895]
- [9] Ning L J, Xu W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2889 (in Chinese) [宁丽娟, 徐伟 2009 物理学报 **58** 2889]
- [10] Kou S C 2008 *Institute of Mathematical Statistics in The Annals of Applied Statistics* **2** 7, 8
- [11] Kou S C, Xie X S 2004 *Physical Review Letters* **93** 180603
- [12] Laas K, Mankin R, Reiter E 2011 *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* **5** 281, 283
- [13] Zhang J Q, Xin H W 2001 *Progress in Chemistry* **13** 241 (in Chinese) [张季谦, 辛厚文 2001 化学进展 **13** 241]
- [14] Rao B P 2010 *Statistical Inference for Fractional Diffusion Processes* (1st Ed.) (India: A John Wiley and Sons) p7, 23
- [15] Mishura Y S 2008 *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes* (1st Ed.) (German: Springer) p7
- [16] Mandelbrot B B, Van Ness J W 1968 *Siam Review* **10** 427
- [17] Rekker A, Mankin R 2010 *Wseas Transactions on Systems* **9** 207
- [18] Deng W H, Barkai E 2009 *Physical Review E* **79** 01112
- [19] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (1st Ed.) (San Diego: Academic Press) p79
- [20] Burov S, Barkai E 2008 *Physical Review E* **78** 031112
- [21] Shapiro V E, Loginov V M 1978 *Physica A* **91** 563
- [22] Oppenheim A V, Willsky A S, Nawab S H (Translated by Liu S T) 2005 *Signals and Systems* (9th Ed.) (Xian: Prentice Hall) pp128, 471, 497–500 (in Chinese) [奥本海姆. A. V. 著 刘树棠译 2005 信号与系统 (第九版)(西安: 西安交通大学出版社) 第 128, 471, 497–500 页]
- [23] Soika E, Mankin R 2010 *Advances in Biomedical Research* **1790–5125** 442
- [24] Sauga A, Mankin R, Ainsaar A 2010 *Wseas Transactions on Systems* **9** 1021

The resonant behavior of an over-damped linear fractional Langevin equation*

Zhong Su-Chuan¹⁾²⁾ Gao Shi-Long¹⁾³⁾ Wei Kun¹⁾ Ma Hong^{1)†}

1) (College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

2) (Sichuan University Jincheng College, Sichuan University, Chengdu 611731, China)

3) (College of Mathematics and Information Science, Leshan Normal University, Leshan 614000, China)

(Received 8 January 2012; revised manuscript received 20 February 2012)

Abstract

By choosing the internal noise as a fractional Gaussian noise, we obtain the fractional Langevin equation. We explore the phenomenon of stochastic resonance in an over-damped linear fractional Langevin equation subjected to an external sinusoidal forcing. The influence of fluctuations of environmental parameters on the dynamics of the system is modeled by a dichotomous noise.

Using the Shapiro-Logvinov formula and the Laplace transformation technique, we obtain the exact expressions of the first and second moment of the output signal, the mean particle displacement and the variance of the output signal in the long-time limit $t \rightarrow \infty$.

Finally, the numerical simulation shows that the over-damped linear fractional Langevin equation reveals a lot of dynamic behaviors and the stochastic resonance (SR) in a wide sense can be found with internal noise and external noise.

Keywords: fractional Langevin equations, over-damped linear oscillator, fractional Gaussian noise, stochastic resonance

PACS: 05.10.Gg, 05.40.-a, 02.50.-r

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238).

† E-mail: zsczsc48@hotmail.com; mahong@scu.edu.cn