

一类非线性神经网络系统的超阈值随机共振现象*

郭永峰[†] 谭建国

(天津工业大学理学院数学系, 天津 300387)

(2012年1月6日收到; 2012年2月23日收到修改稿)

超阈值随机共振可用来解释一些生物现象. 本文对一类非线性多阈值神经网络模型的超阈值随机共振现象进行了探讨. 首先推导出了系统输出互信息的表达式, 然后分析了系统参数及噪声对互信息量的影响. 通过数值计算发现, 在阈值系统的信息传递过程中, 根据乘性噪声和加性噪声对系统信息传递影响的不同, 对系统的阈值进行恰当选取是至关重要的. 此外, 还发现系统的阈值单元数目越多, 超阈值随机共振现象就越容易出现.

关键词: 超阈值随机共振, 多阈值系统, 互信息, 噪声

PACS: 05.40.-a, 02.50.-r, 87.10.+e

1 引言

目前, 人们对随机共振相关理论及试验做了大量的研究工作^[1-10], 但这些研究工作主要集中在外加输入信号为周期变化的情形, 其主要关注的对象是系统输出的信噪比. 为进一步研究非周期信号在系统传输中的输出效应, Hu等^[11]利用电子线路模拟研究了脉冲非周期信号的随机共振现象. 他们根据噪声的概率密度分布及通过大数定律得出了信息的接收率, 发现随着噪声强度的不断增加, 脉冲非周期信号的接收率出现了共振型的峰值现象, 这正是随机共振现象的典型特征. 紧接着 Collins^[12]在1995年提出了非周期共振的概念, 他在研究可激励神经模型时引入互相关测量方法和信息理论的测量方法, 将随机共振与信息理论结合起来, 把随机共振研究推向了更广阔的领域. 其中有关非周期随机共振理论的提出是随机共振走向应用的标志, 是与信息理论相结合的开端. 与周期随机共振相比, 非周期随机共振研究模型更为丰富, 且更具有实际意义. 与此同时, 更多的测度方法也被引入到非周期随机共振的研究中, 例如 Shannon 互信息、动态熵、Fisher 信

息、Kullback 信息、信道容量和误码率等等.

随着更多测量方法被引入到随机共振的研究, 随机共振的概念得到了进一步的发展. 对于经典的随机共振, 一般认为只有系统的信号幅值小于系统的阈值时, 也就是说系统输入的信号为亚阈值信号时, 在噪声的帮助下系统中才能出现随机共振现象, 但对于系统输入的信号为超阈值信号时, 会不会也出现随机共振呢? 2000年, Stocks在文献[13]中提出了超阈值随机共振的概念, 他继续研究了 Collins设计的神经网络模型, 并利用 Shannon 互信息作为度量工具, 发现对于由许多阈值单元组成的网络系统, 即使当信号幅值大于阈值时, 也可以观察到随机共振现象, 且随着阈值单元的增加, 系统在共振点处获得的互信息也越多, 并出现了类似于经典随机共振的共振峰. 由于超阈值随机共振可作为经典随机共振理论在大幅值信号情况下的有益补充, 并可用来解释一些生物现象, 因此超阈值随机共振及其相关问题的研究得到了人们的广泛重视^[14-19].

在本文的研究中, 我们将对文献[14-17]中所研究的多阈值网络模型做进一步的分析. 其中, 文献[14-16]中作者研究了该系统模型在受到加性噪声时的超阈值随机共振现象, 而文献[17]对该系统模型只受到乘性噪声时的超阈值随机共振现象,

* 国家自然科学基金(批准号: 11102132, 10902085 和 11002110)资助的课题.

[†] E-mail: guoyongfeng@mail.nwpu.edu.cn

然而对于一真实的神经网络系统,其阈值单元肯定会同时受到加性与乘性噪声的共同干扰^[20],因此有必要对加性和乘性噪声共同作用下非线性多阈值神经网络系统的随机共振现象进行探讨.

2 具有 N 个阈值单元的非线性神经网络模型

加性和乘性噪声共同作用下具有 N 个阈值单元的神经网络模型如图 1 所示^[17,20].

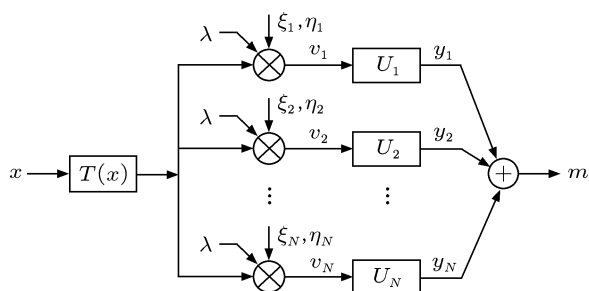


图 1 具有 N 个阈值单元的神经网络模型

上述系统中,每个阈值单元的输出信号 y 可用 Heavside 函数表示为

$$y_i = \begin{cases} 1, & v_i \geq U_i, \\ 0, & v_i < U_i, \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$v_i = \lambda T(x) + D\xi_i T(x) + Q\eta_i. \quad (2)$$

$i = 1, 2, \dots, N, \xi_i, \eta_i$ 为相互独立的高斯噪声,且满足

$$\langle \xi_i \xi_j \rangle = 0, \langle \eta_i \eta_j \rangle = 0, \langle \xi_i \eta_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad (3)$$

这里, D, Q 分别为乘性噪声强度和加性噪声强度, λ 为确定性信号在系统中的耦合强度, U_i 为系统设定的阈值, x 代表系统所输入的信号. 在这里我们选取 x 为高斯信号,其概率密度函数为

$$P_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4)$$

上述模型在 $D \rightarrow 0$ 时转化为文献 [14—16] 中只含有加性噪声的情形,当 $Q \rightarrow 0$ 时则转化为文献 [17] 中只含有乘性噪声的情形.

在输入信号为 x 的条件下,系统输出信号总量为 m 的概率可有二项分布密度函数给出^[17],求其概率为

$$P\left\{\sum_{i=1}^N y = m \mid x\right\} = C_N^m q_x^m (1 - q_x)^{N-m}, \quad (5)$$

其中

$$C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!}, \quad (6)$$

$$q_x = P\{y_i = 1 \mid x\}.$$

为方便计算,我们假设高斯噪声 ξ_i, η_i 的概率密度函数均服从标准的高斯分布,并且上述系统中每个阈值单元中所设定的阈值大小都是一样的,即 $U_1 = U_2 = \dots = U_N = U$.

在这里,我们取分段函数

$$T(X) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (7)$$

在输入信号 $x > 0$ 时, v_i 所满足的条件概率密度亦为高斯型的,其表达式为

$$P_{v|x}(v_i|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(D^2x^2 + Q^2)}} \times \exp\left(-\frac{(v_i - \lambda x)^2}{2(D^2x^2 + Q^2)}\right). \quad (8)$$

此时,

$$\begin{aligned} q_x &= f_x = P\{y_i = 1 \mid x > 0\} = P\{v_i > U \mid x > 0\} \\ &= \int_U^\infty P_{v|x}(v_i|x) dv_i \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{U - \lambda x}{\sqrt{2(D^2x^2 + Q^2)}}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

在输入信号 $x \leq 0$ 时, v_i 所满足的条件概率密度表达式为

$$P_{v|x}(v_i|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Q^2}} \exp\left(-\frac{v_i^2}{2Q^2}\right). \quad (10)$$

此时,可得到 q_x 的表达式为

$$\begin{aligned} q_x &= g_x = P\{y_i = 1 \mid x \leq 0\} \\ &= P\{v_i > U \mid x \leq 0\} = \int_U^\infty P_{v|x}(v_i|x) dv_i \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{U}{\sqrt{2Q^2}}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

上述表达式 (9) 和 (11) 中 erf 为误差函数.

3 系统输出的互信息

下面将进一步计算系统输出的互信息,系统的互信息可表示为

$$I = H(m) - H(m|x), \quad (12)$$

其中, $H(m)$ 表示系统输出的信息量 (或信息熵), $H(m|x)$ 表示在输入信号为 x 时系统损失的信息量 (或输出的条件熵), 其具体表达式为

$$H(m) = - \sum_{m=0}^N Q_m \log_2 Q_m, \quad (13)$$

$$H(m|x) = - \int_{-\infty}^{\infty} P_x(x) \times \sum_{m=0}^N B_m \log_2 B_m dx, \quad (14)$$

这里

$$\begin{aligned} B_m &= P \left\{ \sum_{i=1}^N y = m \mid x \right\} \\ &= P \left\{ \sum_{i=1}^N y = m \mid x > 0 \right\} \\ &\quad + P \left\{ \sum_{i=1}^N y = m \mid x \leq 0 \right\} \\ &= C_N^m \left[f_x^m (1 - f_x)^{N-m} \right. \\ &\quad \left. + g_x^m (1 - g_x)^{N-m} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} Q_m &= P \left\{ \sum_{i=1}^N y = m \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(x) B_m dx \\ &= C_N^m \int_{-\infty}^{\infty} P_x(x) \left[f_x^m (1 - f_x)^{N-m} \right. \\ &\quad \left. + g_x^m (1 - g_x)^{N-m} \right] dx. \end{aligned} \quad (16)$$

4 系统参数对互信息量的影响

为便于研究, 我们取定 $\lambda = 1.0$ 且 $x > 0$, 图 2—5 分别给出了互信息 I 作为 D 以及 Q 的函数随不同 U 和 N 的变化情况.

图 2 我们给出了互信息 I 作为 D 的函数在 $Q = 0.5, \sigma = 1.0, N = 8$ 时随不同 U 的变化曲线. 从图 2 中我们可以看出, 当确定性信号存在时, 对于较小的阈值, I 随 D 的增加是单调减小的, 然而随着阈值的进一步增大, I 随 D 的增加出现了类似于经典随机共振现象的单峰, 这意味着发生了超阈值随机共振现象, 同时可以看到峰值随着阈值的增大而减小, 且峰的位置向右发生移动.

图 3 我们给出了互信息 I 作为 Q 的函数在 $D = 0.5, \sigma = 1.0, N = 8$ 时随不同 U 的变化曲线. 从图 3 中我们可以看出, 当确定性信号存在时, 对于较小的阈值, I 随 D 的增加是单调减小的,

然而随着阈值的进一步增大, I 随 D 的增加出现了超阈值随机共振现象, 并且随着阈值的进一步增大, 峰值逐渐减小, 位置向右发生移动.

通过对图 2 和图 3 的分析可以发现, 阈值的增加会使得超阈值随机共振现象更容易发生, 这表明在阈值系统的信息传递过程中, 阈值的选择是至关重要的. 此外, 超阈值随机共振现象发生时所需的乘性噪声强度明显大于加性噪声强度, 这表明改变加性噪声强度更容易使系统达到随机共振, 亦即改变加性噪声强度比改变乘性噪声强度更有利于信息的传递.

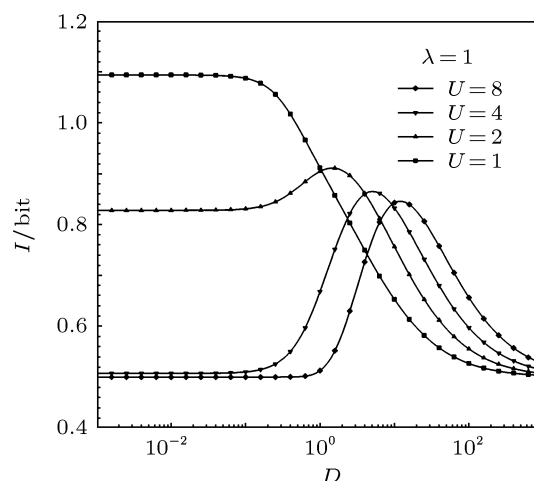


图 2 互信息 I 作为 D 的函数随不同 U 的变化曲线 (参数: $\lambda = 1.0, Q = 0.5, \sigma = 1.0, N = 8$)

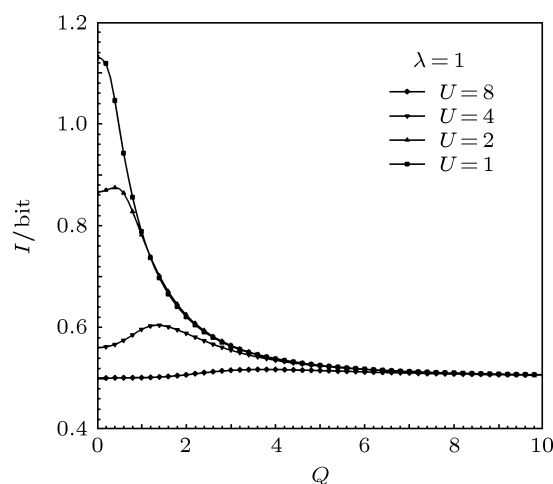


图 3 互信息 I 作为 Q 的函数随不同 U 的变化曲线 (参数: $\lambda = 1.0, D = 0.5, \sigma = 1.0, N = 8$)

图 4 我们给出了互信息 I 作为 D 的函数在 $Q = 0.5, U = 1.0, \sigma = 1.0$ 时随不同 N 的变化曲线. 从图 4 中我们可以看出, 当确定性信号存在时, 对于较小的 N 值, 互信息 I 随着 D 的增加是单调减小的, 这一现象不同于 $T(X)$ 为线性连续函数时

的情形.

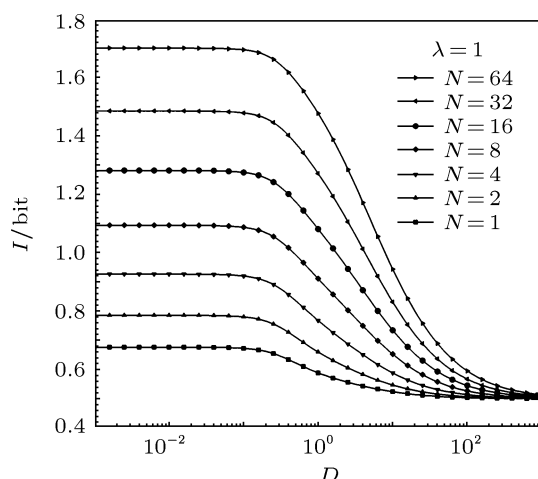


图4 互信息 I 作为 D 的函数随不同 N 的变化曲线 (参数: $\lambda = 1.0, Q = 0.5, U = 1.0, \sigma = 1.0$)

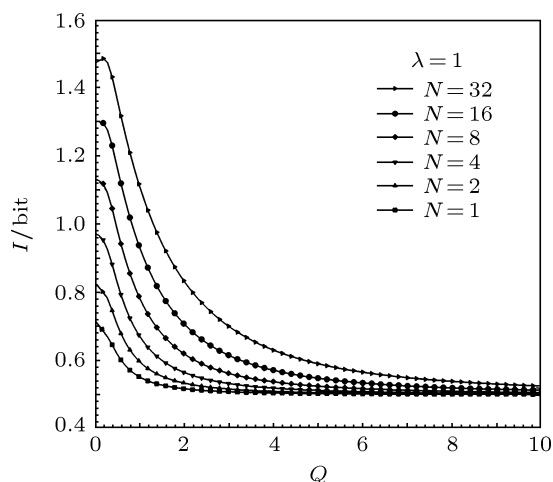


图5 互信息 I 作为 Q 的函数随不同 N 的变化曲线 (参数: $\lambda = 1.0, D = 0.5, U = 1.0, \sigma = 1.0$)

图5 我们给出了互信息 I 作为 Q 的函数在 $D = 0.5, U = 1.0, \sigma = 1.0$ 时随不同 N 的变

化曲线. 通过图5可以看出, 当 N 的取值较小时, 互信息 I 随着 Q 的增加而单调减小, 没有出现超阈值随机共振现象, 然而当 N 的取值较大时, 互信息 I 随着 Q 的增加均出现了单峰, 发生了超阈值随机共振现象. 这表明 N 的增加使得系统传输的互信息量增大, 这更有助于信息的传递

通过图4和图5的对比可以发现, 加性噪声的存在使系统出现超阈值随机共振的可能性变大, 同时结合图1和图2的研究可知根据乘性噪声和加性噪声对系统信息传递影响的不同, 对系统的阈值进行恰当选取, 会更有利于系统中信息的传递. 此外, 系统阈值单元数目越多, 超阈值随机共振现象就越容易出现.

5 结论

为更好的说明信息熵理论在随机共振现象中的应用, 我们在已有的研究基础上对文献 [14—17] 中所研究的多阈值网络模型做了进一步探讨, 研究了该系统模型在加性和乘性噪声共同作用下的超阈值随机共振现象. 文中首先推导出了系统输出互信息的表达式, 然后分析了系统参数及噪声对互信息量的影响. 通过数值计算发现, 在阈值系统的信息传递过程中, 阈值的选择是至关重要的, 根据乘性噪声和加性噪声对系统信息传递影响的不同, 对系统的阈值进行恰当选取, 则更有利于系统的信息传递. 此外, 超阈值随机共振现象发生时所需的乘性噪声强度明显大于加性噪声强度, 这表明改变加性噪声强度比改变乘性噪声强度更有利于信息的传递. 并且系统阈值单元数目越多, 超阈值随机共振现象就越容易出现.

[1] Fauve S, Heslot F 1983 *Phys. Lett. A* **97** 5
 [2] McNamara B, Wiesenfeld K, Roy R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2626
 [3] Dykman M I, Mannella R, McClintock P V E, Stocks N G 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 2606
 [4] Hu G, Nicolis G, Nicolis C 1990 *Phys. Rev. A* **42** 2030
 [5] Zhou T, Moss F, Jung P 1990 *Phys. Rev. A* **42** 3161
 [6] Li J H, Huang Z C, Wang C Y 1998 *Acta. Phys. Sin.* **47** 0382 (in Chinese) [李静辉, 黄祖洽, 王存玉 1998 *物理学报* **47** 0382]
 [7] Xu W, Jin Y F, Li W, Ma S J 2005 *Chin. Phys.* **14** 1077
 [8] Jia Y, Yu S N, Li J R 2000 *Phys. Rev. E* **62** 1869
 [9] Chen L M, Cao L, Wu D J 2007 *Chin. Phys.* **16** 123
 [10] Luo X, Zhu S Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1201
 [11] Hu G, Gong D C, Wen X D, Yang C Y, Qing G R, Li R 1992 *Phys. Rev. A* **46** 3250
 [12] Collins J J, Chow C C, Imhoff T T 1995 *Phys. Rev. E* **52** R3321
 [13] Stocks N G 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2310
 [14] Stocks N G 2001 *Phys. Lett. A* **279** 308
 [15] Stocks N G 2001 *Phys. Rev. E* **63** 041114
 [16] Stocks N G 2001 *Phys. Rev. E* **64** 030902
 [17] Nikitin A, Stocks N G, Morse R P 2007 *Phys. Rev. E* **75** 021121
 [18] Das A, Stocks N G, Hines E L 2009 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **14** 223
 [19] McDonnell M D, Stocks N G, Pearce C E M, Abbott D 2006 *Phys. Lett. A* **352** 183
 [20] Lindner B, Schimansky-Geier L 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2934

Suprathreshold stochastic resonance of a non-linear multilevel threshold neuronal networks system*

Guo Yong-Feng[†] Tan Jian-Guo

(School of Science, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300387, China)

(Received 6 January 2012; revised manuscript received 23 February 2012)

Abstract

Suprathreshold stochastic resonance can be used to explain some biologic phenomena. In this paper, the suprathreshold stochastic resonance of a non-linear multilevel threshold neuronal network system is studied. The expression of the mutual information is derived, and the effects of the noise intensity and the system parameter on mutual information are discussed. The numerical computation results show that in the process of information transmission the selection of the threshold is very important according to the different effects of additive noise and multiplicative noise on system. Moreover, we also find that the more the number of devices, the more apparent the phenomenon of suprathreshold stochastic resonance is.

Keywords: suprathreshold stochastic resonance, multilevel threshold system, mutual information, noises

PACS: 05.40.-a, 02.50.-r, 87.10.+e

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11102132, 10902085 and 11002110).

[†] E-mail: guoyongfeng@mail.nwpu.edu.cn