

## 时标正弦动力学方程稳定性与分岔分析\*

胡文<sup>1)2)†</sup> 赵广浩<sup>1)</sup> 张弓<sup>1)</sup> 张景乔<sup>1)</sup> 刘贤龙<sup>2)</sup>

1) (南京航空航天大学电子信息工程学院, 南京 210016)

2) (南京长江电子信息产业集团有限公司, 南京 210037)

(2011年11月19日收到; 2012年2月25日收到修改稿)

本文研究时标上正弦动力学方程的平衡点稳定性和分岔现象. 研究表明随时标参数的变化, 正弦动力学方程展现出完全不同的解, 会产生  $n$  倍周期分岔和平衡点分裂等特有现象. 同时, 不增加系统参数, 仅改变时标的复杂性就能扩展动力学方程处于混沌状态的参数空间, 这为时标上动力学方程在混沌加密和雷达波形设计等领域的应用提供了潜在的优势.

**关键词:** 正弦映射, 分岔, 混沌, 时标动力学方程

**PACS:** 05.45.-a

## 1 引言

正弦动力学方程是描述许多重要非线性物理过程的模型<sup>[1]</sup>. 这些物理过程通常涉及由周期外力驱动的非线性振荡现象, 广泛存在于受迫振荡的单摆<sup>[2]</sup>, 超导体<sup>[3]</sup>, 生物心律<sup>[4]</sup>, 和光电振荡系统<sup>[5]</sup>等研究课题中. 这些物理过程的连续时间演化是由正弦微分方程描述的, 为便于分析通常简化为以下的正弦离散映射<sup>[1]</sup>:

$$x_{t+1} = x_t + a + b \sin(2\pi x_t) \equiv S(x_t, a, b). \quad (1)$$

许多文献深入详细的研究了这个映射<sup>[6-14]</sup>. 早期的文献研究参数  $a$  和  $b$  为不同取值范围时, 映射的动力学特征和从周期过渡到混沌的途径<sup>[8-12]</sup>.

近期的一些文献研究基于正弦映射的各种推广形式和耦合系统, 更深入细致的分析正弦映射的特征, 以及研究基于正弦映射的应用技术. 例如文献<sup>[7]</sup>研究分数阶微积分定义下的广义正弦方程. 文献<sup>[6, 15]</sup>研究二维正弦平方映射和高维正弦平方映射. 文献<sup>[16]</sup>分析正弦映射分岔图的模式. 文

献<sup>[17]</sup>分析比较了正弦映射处于混沌和准周期状态时迭代值和的概率分布. 文献<sup>[18]</sup>研究耦合正弦映射格子中的混合状态. 文献<sup>[19]</sup>研究参数扰动下正弦平方映射的统计特性. 文献<sup>[20]</sup>研究基于正弦映射的混沌电路及其应用.

本文研究时标上的正弦方程, 分析时标上正弦方程的平衡点稳定性、分岔、和混沌等动力学现象. 由于时标动力学方程的特殊性, 我们重点研究粒度函数  $\mu$  对系统状态的影响, 本文发现随着时标参数的变化正弦动力学方程产生  $n$  倍周期分岔, 平衡点分裂, 吸引子共存等丰富的动力学现象, 其中  $n$  倍周期分岔和平衡点分裂是时标动力学方程中的特有现象, 在已有的文献中鲜见报道.

本文第二部分介绍时标动力学方程预备知识, 包括  $\delta$  导数的概念和时标动力学方程的稳定性条件; 第三部分是时标正弦方程的分析, 讨论时标正弦方程的解和稳定性, 以及  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$  时标下的分岔和混沌现象; 第四部分研究复杂时标下的特殊分岔现象; 第五部分通过电路实验验证理论; 第六部分为结论, 在总结动力学现象的同时指出时标上动

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61071163, 61001151), 南京航空航天大学科研启动金, 南京航空航天大学基本科研业务费专项科研项目 (批准号: NS2010096) 和航空科学基金 (批准号: 2009ZC52038, 2008ZC52026) 资助的课题.

† E-mail: hwfeng118@163.com

力学方程的潜在应用价值.

## 2 时标动力学方程

时标动力学方程是一个较新的数学研究领域, 统一的描述了连续微分方程和离散差分方程 [21]. 时标是一种测度链, 简单来说就是实数域的一个闭子集, 用符号  $\mathbb{T}$  表示. 连续微分系统的时标为  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , 离散差分方程的时标为  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ . 因此微分动力学方程和差分动力学方程是时标动力学方程的两个特例, 时标上的动力学方程在更一般的时标上研究动力学方程, 扩展了动力学方程的一些结论 [21-26]. 例如文献 [23, 24] 将动力学方程的稳定性理论推广到一般的时标上, 文献 [25, 26] 研究时标上动力学方程的振荡和周期解.

### 2.1 时标与 delta 导数

**定义 1** 时标是实数的一个非空闭子集, 通常用符号  $\mathbb{T}$  表示 [21].

两个常见的时标是  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  和  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ . 对于定义在  $\mathbb{T}$  中的函数  $f$ , 可以定义一个 delta 导数  $f^\Delta$ , 下面先介绍几个预备性概念.

**定义 2** 定义前向和后向转移运算符  $\sigma, \rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  [21]

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{T} | s > t\}, \\ \rho(t) &= \sup\{s \in \mathbb{T} | s < t\},\end{aligned}$$

对应于  $\sigma(t) > t$ ,  $\sigma(t) = t$ ,  $\rho(t) < t$ ,  $\rho(t) = t$ , 点  $t \in \mathbb{T}$  分别称为右离散, 右致密, 左离散, 左致密. 如果  $\mathbb{T}$  没有左离散的最大值, 则定义集合  $\mathbb{T}^k$  为  $\mathbb{T}$ ; 否则定义  $\mathbb{T}^k$  是没有左离散最大值的  $\mathbb{T}$ .

**定义 3** 定义粒度函数  $\mu: \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t, \quad (2)$$

如果  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  粒度函数为常数 0, 如果  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  粒度函数为常数 1, 但更一般的时标  $\mathbb{T}$  粒度可以不是常数 [21].

**定义 4** 令  $f$  是定义在  $\mathbb{T}$  上的一个函数, 我们称  $f$  在  $t \in \mathbb{T}^k$  内是 delta 可微的, 如果在  $t$  的一个  $\mathcal{N}$  邻域内, 对所有的  $\varepsilon > 0$  都存在  $\alpha$  满足 [21]

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \alpha(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|,$$

对于所有的  $s \in \mathcal{N}$ .

在这种情况下我们用  $f^\Delta(t)$  表示  $\alpha$ , 如果对每一个  $t \in \mathbb{T}^k$  来说  $f$  都是可微的, 那么  $f$  在  $\mathbb{T}$  内是可微的. 如果  $f$  在  $t \in \mathbb{T}^k$  上是可微的, 那么容易得到 [21]

$$f^\Delta(t) = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow t, s \in \mathbb{T}} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}, & \mu(t) = 0, \\ \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}, & \mu(t) > 0. \end{cases} \quad (3)$$

然而, 时标微积分学的目的是避免单独讨论  $\mu(t) = 0$  和  $\mu(t) > 0$  两种情况, 因此证明中应避免使用 (3) 式. 我们给出另一种形式 [21]:

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t). \quad (4)$$

使用 (4) 式时, 我们就没有必要区分  $\mu(t) = 0$  和  $\mu(t) > 0$  两种情况. 根据 (4) 式两个可微函数  $f$  和  $g$  相乘的 delta 导数 [21]:

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t). \quad (5)$$

**定义 5** 定义函数  $F$  是  $f$  的反 delta 导数, 如果  $F^\Delta(t) = f(t)$ ,  $t \in \mathbb{T}$ , 柯西 delta 积分定义为 [21]

$$\int_a^t f(s)\Delta s = F(t) - F(a). \quad (6)$$

### 2.2 时标动力学方程及其稳定性

对于定义在  $\mathbb{T}$  中的可微函数  $y$ , 根据 (4) 式可以求其 delta 导数  $x^\Delta$ , 那么我们可以研究动力学方程组 [23]

$$x^\Delta = f(t, x), \quad t \geq 0, \quad (7)$$

其中变量  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{T}$ ,  $f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是一个连续函数. 注意到, 当  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  时, (7) 式是微分方程组, 当  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  时, (7) 式是差分方程组. 其他常见的时标还包括  $q$  差分方程

$$\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}} := \{q^k | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}, \quad q > 1, \quad (8)$$

具有恒定步长的差分方程:

$$\mathbb{T} = h\mathbb{Z} := \{hk | k \in \mathbb{Z}\}, \quad h > 0. \quad (9)$$

对离散分析方面有用的时标

$$\mathbb{T} = \{t_k | k \in \mathbb{Z}\}, \quad t_k \in \mathbb{R}, \quad \text{且 } k \in \mathbb{Z} \text{ 有 } t_k < t_{k+1}. \quad (10)$$

**引理 1** 设  $f(t, 0) = 0$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  包含原点, 如果存在 I 型 Lyapunov 函数  $V: D \rightarrow [0, \infty)$  对所

有  $(t, x) \in [0, \infty) \times D$  满足

$$\begin{aligned} & \lambda_1(t) \|x\|^p \\ & \leq V(x) \leq \lambda_2(t) \|x\|^q, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & V^\Delta(t, x) \\ & \leq \frac{-\lambda_3(t) \|x\|^r - L(M \ominus \delta)(t)e_{\ominus\delta}(t, 0)}{1 + M\mu(t)}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$V(x) - V^{r/q}(x) \leq 0, \quad (13)$$

其中  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$ , 和  $\lambda_3(t)$  是正函数, 且  $\lambda_1(t)$  是非降函数;  $p, q, r$  是正常数;  $L$  是一非负常数, 且  $\delta > M := \inf_{t \geq 0} \lambda_3(t)/[\lambda_2(t)]^{r/q} > 0$ . 那么 (7) 式的  $0$  解在  $[0, \infty)$  上是指稳定的.

引理 1 给出了方程 (7) 稳定性的充分条件, 引理 1 的证明详见参考文献 [23]. 同时文献 [24] 中证明了方程 (7) 不稳定的充分条件, 可以表述为以下引理.

**引理 2** 设  $f(t, 0) = 0$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  包含原点, 如果存在 Lyapunov 函数  $V : D \rightarrow [0, \infty)$  对所有  $(t, x) \in [0, \infty) \times D$  满足  $V^\Delta(t, x)$  正定, 那么 (7) 式的平衡点不稳定.

### 3 时标正弦动力学方程

从 (1) 式的正弦映射出发, 我们定义本文提出的时标正弦动力学方程

$$x^\Delta = a + b \sin(2\pi x) \equiv f(x), \quad (14)$$

其中  $a, b$  为非负常数, 且满足  $a < b$ ,  $x(0) \in [0, 1]$ ,  $t \in \mathbb{T}$ . 显然 (14) 式中含有两个参数  $a, b$ , 同时也隐含着粒度  $\mu(t)$ . 将 (14) 式重写为差分的形式

$$x(\sigma(t)) = x + \mu(t)[a + b \sin(2\pi x)] \equiv g(x), \quad (15)$$

其中粒度函数  $\mu(t)$  随着时标  $\mathbb{T}$  而改变. 显然, 当  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  时, (15) 式退化为 (1) 式, 即正弦映射是上述定义在时标为  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  的特例. 换句话说, 时标正弦动力学方程应具有正弦映射的所有特征, 而它是否表现出其他新的特征将是本节讨论的重点.

#### 3.1 平衡点与稳定性

由 (14) 式容易得到平衡点位置, 由于  $f(x)$  的周期性, 下面只讨论在  $[1, 7]$  区间内的平衡点. 容易得到, 当  $a = 0$  时 (14) 式有三个平衡点分

别为  $0, 0.5$  和  $1$ , 当  $a > 0$  时 (14) 式有两个平衡点  $0.5 + \arcsin(a/b)/2\pi, 1 - \arcsin(a/b)/2\pi$ . 显然由于  $f(x)$  周期为  $1$ ,  $a = 0$  和  $a > 0$  时的平衡点可以统一的由表达式  $S_1 = 0.5 + \arcsin(a/b)/2\pi, S_2 = 1 - \arcsin(a/b)/2\pi$  描述. 下面, 本文分析平衡点  $S_1$  和  $S_2$  的稳定性.

为分析平衡点  $S_1$  的稳定性, 对 (14) 式做变量代换  $x = y + S_1$  将平衡点  $S_1$  移到原点, 得到

$$y^\Delta = a + b \sin[2\pi(y + S_1)] \equiv g_1(y), \quad (16)$$

(16) 式满足  $g_1(0) = 0$ , 平衡点的邻域  $D_1 = [-\varepsilon, \varepsilon]$ , 其中  $\varepsilon$  是无穷小的实数, 显然 (16) 式原点邻域  $D_1$  内的稳定性与 (14) 式  $S_1$  点邻域  $D = [S_1 - \varepsilon, S_1 + \varepsilon] \subset \mathbb{R}$  内的稳定性等价. 令 Lyapunov 函数  $V = \|y\|^2$ ,  $\lambda_1(t) = 1, \lambda_2(t) = 1, p = 2, q = 2, \lambda_3(t) = 1, r = 2, L = 0$ . 显然,  $V$  满足 (11) 式和 (13) 式. 根据 (5) 式的求导规则, 对函数  $V$  求 delta 导数

$$V^\Delta = 2y \cdot g_1(y) + \mu(t) \|g_1(y)\|^2. \quad (17)$$

将 (17) 式代入 (12) 式, 根据引理 1 得到 (16) 式稳定的充分条件

$$2y \cdot g_1(y) + \mu(t) \|g_1(y)\|^2 \leq \frac{-\|y\|^2}{1 + \mu(t)}. \quad (18)$$

令  $G = g_1(y)/y$ , 代入 (18) 式, 经整理得

$$2(1 + \mu)G + \mu(1 + \mu)G^2 + 1 \leq 0. \quad (19)$$

在  $y \in D_1$  时

$$G = \lim_{y \rightarrow 0} g(y)/y = -2\pi\sqrt{b^2 - a^2}. \quad (20)$$

将 (20) 式代入 (19) 式, 得到方程 (14) 在平衡点  $S_1$  邻域  $D$  内指数稳定的充分条件

$$\begin{aligned} & 4\pi^2\mu(1 + \mu)(b^2 - a^2) \\ & - 4\pi(1 + \mu)\sqrt{b^2 - a^2} + 1 \\ & \leq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

进一步, 根据引理 2, 从 (17) 式和 (20) 式容易得到 (16) 式在原点邻域  $D_1$  内不稳定的条件

$$\begin{aligned} & V^\Delta \geq 0 \\ & \Rightarrow \mu(t) \geq -2y/g_1(y) \\ & \Rightarrow \mu(t) \geq \frac{1}{\pi\sqrt{b^2 - a^2}}. \end{aligned} \quad (22)$$

从 (21) 式可以得到

$$\sup \left\{ \frac{1 + \mu - \sqrt{1 + \mu}}{\mu(1 + \mu)} \right\}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2\pi\sqrt{b^2 - a^2} \\ &\leq \inf \left\{ \frac{1 + \mu + \sqrt{1 + \mu}}{\mu(1 + \mu)} \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

(23) 式说明  $\mu$  一定时 (16) 式稳定状态处于  $a$ - $b$  参数平面上的两条双曲线之间, 这个结果是对正弦映射相关文献 [1] 中已知结论的推广. 由 (21) 式, 进一步整理也可得到不等式

$$\begin{aligned} &\frac{-1 - 0.5G + 0.5\sqrt{G^2 - 4G}}{G} \\ &\leq \mu \leq \frac{-1 - 0.5G - 0.5\sqrt{G^2 - 4G}}{G}. \end{aligned} \quad (24)$$

(24) 式给出了参数  $a, b$  一定时保证 (14) 式稳定的充分条件. (22) 式和 (24) 式说明 (14) 式的稳定性受到时标的影响, 即受粒度函数  $\mu$  的影响.

为分析平衡点  $S_2$  的稳定性, 对 (14) 式做变量代换  $x = y + S_2$  将平衡点  $S_2$  移到原点, 得到

$$y^\Delta = a + b \sin[2\pi(y + S_2)] \equiv g_2(y). \quad (25)$$

(25) 式满足  $g_2(0) = 0$ , 令

$$D_2 = [\arcsin(a/b)/2\pi - 0.25, \arcsin(a/b)/2\pi],$$

由于  $a < b$ ,  $D_2$  是平衡点原点的邻域, 显然 (25) 式在原点邻域  $D_2$  内的稳定性与原 (14) 式  $S_2$  点邻域  $[S_2 + \arcsin(a/b)/2\pi - 0.25, S_2 + \arcsin(a/b)/2\pi]$  内的稳定性等价. 令 Lyapunov 函数  $V = \|y\|^2$ , 根据 (5) 式的求导规则, 对函数  $V$  求 delta 导数

$$V^\Delta = 2y \cdot g_2(y) + \mu(t) \|g_2(y)\|^2. \quad (26)$$

由正弦函数的特性容易得到在邻域  $D_2$  内

$$\begin{aligned} g_2(y) &> 0, \quad y > 0, \\ g_2(y) &= 0, \quad y = 0, \\ g_2(y) &< 0, \quad y < 0, \end{aligned} \quad (27)$$

因此  $2y \cdot g_2(y)$  在邻域  $D_2$  内正定, 又由定义 3 容易得到粒度  $\mu \geq 0$ , 因此 (26) 式在邻域  $D_2$  内正定. 根据引理 2, 可以判断平衡点  $S_2$  邻域  $[S_2 + \arcsin(a/b)/2\pi - 0.25, S_2 + \arcsin(a/b)/2\pi]$  内不稳定.

由上述分析可知, (14) 式的平衡点  $S_1$  和  $S_2$  中, 只有  $S_1$  在特定参数下可能是稳定的, 即在特定参数下, (14) 式有唯一的稳定平衡点  $S_1 = 0.5 + \arcsin(a/b)/2\pi$ . 平衡点的位置由参数  $a, b$  确定, 由 (22) 式和 (24) 式可知平衡点的稳定性受到粒度函数  $\mu(t)$  的影响, 也就是系统状态受时标参数的

影响. 这意味着, 在某些复杂时标下, 时变的粒度函数  $\mu(t)$  将引起复杂的动力学行为. 反之时变系统的复杂行为可能通过简历等效的时标动力学模型, 利用时标微分工具得以分析和理解.

### 3.2 $h\mathbb{Z}$ 时标上的平衡点稳定性和分岔

下面将讨论时标正弦动力学方程在  $a = 0.1, b = 0.25, \mathbb{T} = h\mathbb{Z}$  时的分岔现象. 在  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$  时,  $\mu = h$ , 由 (14) 式表示的正弦动力学方程可重写为差分形式

$$x(\sigma(t)) = x + h[a + b \sin(2\pi x)] \equiv g(x). \quad (28)$$

正弦动力学方程的平衡点和稳定性可以由 (28) 式的迭代曲线分析得到.

图 1(a) 和 (b) 中给出了时标参数  $h \in [0, 2.3]$  区间内时标正弦动力学方程的分岔图和对应的 Lyapunov 指数谱. 当  $h \geq 2.171$  时, 系统状态不能保持在  $^{[17]}$  区间内, 下面本文研究  $h \in [0, 2.171)$  区间内系统状态的演变.

根据定义 3,  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$  时粒度  $\mu = h$ , 从 (24) 式可以得到在  $h \in [0, 1.166]$  区间内时标正弦动力学方程有一个稳定平衡点  $S_1 \approx 0.565$ , 从 (22) 式可以得到在  $h > 1.389$  时平衡点  $S_1$  不再稳定. 由 (28) 式和  $|g'(S_1)| < 1$  得到在  $h = 1.389$  附近, 迭代曲线 (28) 式的平衡点  $S_1$  有斜率  $-1$ , 对比图 1 可以看到, 平衡点  $S_1$  的稳定区间约为  $h \in [0, 1.388]$ , 在  $h > 1.388$  时平衡点  $S_1$  不稳定, 验证了 (24) 式和 (22) 式分别描述平衡点  $S_1$  稳定和不稳定的充分条件.

从图 1 中看到, 在  $h = 1.388$  附近, 时标正弦动力学方程的唯一稳定平衡点  $S_1$  转变为不稳定平衡点, 产生了倍周期分岔, 产生了 2 周期轨道. 在  $h = 1.742$  和  $h = 1.816$  附件再次发生倍周期分岔, 分别产生 4 周期轨道和 8 周期轨道. 同样可以看出, 倍周期分岔的间隔将越来越窄, 可以统计出倍周期分岔时所对应参数值  $h_n (n = 1, 2, \dots)$  序列间隔比的极限为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n - h_{n-1}}{h_{n+1} - h_n} \approx 4.727. \quad (29)$$

(29) 式的值与 Feigenbaum 常数  $4.669 \dots$  十分接近, 说明时标  $h\mathbb{Z}$  上的正弦动力学方程在通向混沌道路

的一系列倍周期分岔过程中, 在参数空间中表现出自相似性.

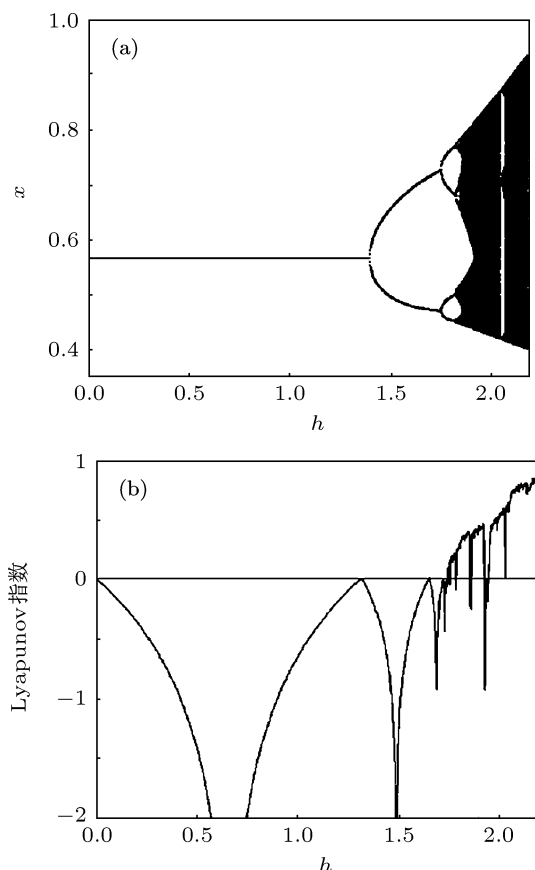


图1 时标正弦动力学方程分岔图和 Lyapunov 指数

### 3.3 $h\mathbb{Z}$ 时标上的切分岔

图 1 所示的分岔图在混沌区域内出现了 3 个明显的周期窗, 一个较大的周期 3 窗口, 两个较小的周期 5 和周期 6 窗口, 其局部分岔图如图 2(a), (b) 和 (c) 所示. 周期窗中 3 周期、5 周期和 6 周期轨道遍历相似的倍周期分岔后通向了混沌, 并在窗口结束位置发生混沌危机, 引起混沌状态的突变, 由致密的窄带突变为较稀疏的一个宽带. 观察图 2(a), 当参数  $h$  增大到 2.031 附近时,  $h\mathbb{Z}$  时标上的正弦动力学方程发生了切分岔, 引发了阵发混沌, 出现了周期 3 窗口. 图 2(d) 给出了  $h = 2.031$  附近的三次映射迭代曲线. 三次迭代曲线与对角线刚好相切, 产生了三个切点  $A, B, C$  和两个不稳定交点  $D, E$ . 随着参数  $h$  的增加, 三个切点形成三条稳定的周期

轨道和三条不稳定轨道, 三条不能观察到的不稳定轨道在窗口结束处与次级混沌带相遇, 从而引起混沌危机. 图 2(e) 给出了  $h = 1.957$  附近的五次映射迭代曲线. 五次迭代曲线与对角线相切产生了五个切点  $A, B, C, D, E$  和两个不稳定交点  $F, G$ . 五个切点就形成五条稳定的周期轨道和五条不稳定轨道. 图 2(f) 给出了  $h = 1.879$  附近的六次映射迭代曲线, 六次迭代曲线与对角线相切产生了六个切点和三个不稳定交点, 六个切点就形成六条稳定的周期轨道和六条不稳定轨道.

## 4 复杂时标上的动力学行为

### 4.1 复杂时标

时标  $\mathbb{T}$  可以是实数上的任意非空闭子集, 除了上述简单的固定步长时标  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ , 还可能有很多较复杂的时标. 例如可以是满足 (10) 式的步长不固定时标, 连续闭区间和离散点混合的集合, 甚至可以是 Cantor 集一类的分形集合. 下文研究一种满足 (10) 式的时标

$$\mathbb{T} = \{t_k | t_{k+1} = t_k + h_k, \quad k \in \mathbb{N}^0\},$$

其中

$$h_k = \begin{cases} c_1, & k = nl, \\ c_2, & k = nl + 1, \\ \vdots \\ c_n, & k = nl + n - 1, \end{cases} \quad l \in \mathbb{N}^0, \quad (30)$$

其中  $\{c_1, \dots, c_n\}$  是  $n$  个大于 0 的常数,  $\mathbb{N}^0$  表示非负整数集合,  $t_0 = 0$ . 在 (30) 式的时标下, (15) 式对应着周期键控系统, 可以表示为差分形式

$$x(\sigma(t)) = x + \mu[a + b \sin(2\pi x)] = g(\mu, x), \quad (31)$$

其中  $\mu(t_k) = h_k$ . 当  $\{c_1, \dots, c_n\}$  是  $n$  个不同的数时, (31) 式表示  $n$  条不同的一次迭代曲线. 同样其二次、三次到  $k$  次迭代曲线都有  $n$  种不同的可能, 每条可能的迭代曲线都可能产生不同的  $k$  周期平衡点, 从而产生特殊的分岔现象. 下文以  $n = 2$  为例, 阐述 (30) 式时标下系统展现的特殊现象.

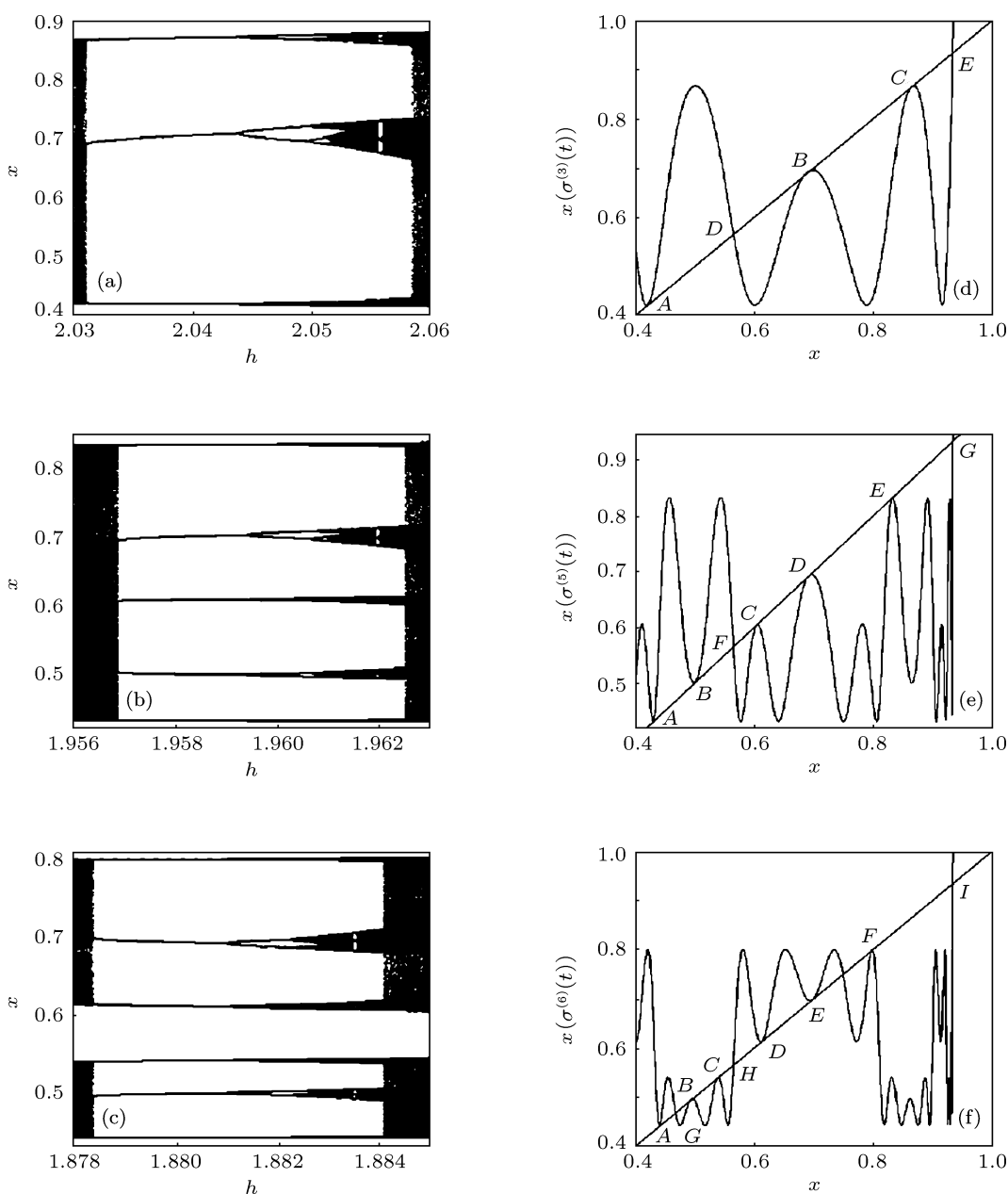


图2 (a) 周期3窗; (b) 周期5窗; (c) 周期6窗; (d) 三次迭代曲线; (e) 五次迭代曲线; (f) 六次迭代曲线

### 4.2 动力学行为分布与平衡点稳定性

时标正弦动力学方程在  $a = 0.1, b = 0.25, n = 2$  时, 二参数  $c_1$  和  $c_2$  同时变化, 时标  $\mathbb{T}$  上的正弦动力学方程的动力学行为分布如图3所示. 图3根据正弦动力学方程周期数的大小使用相应的黑白灰度在  $c_1$  和  $c_2$  二参数平面上绘出, 图中白色区域代表周期1, 黑色区域代表混沌, 周期数越大则

灰度越深. 可以看出, 大周期数和混沌区域主要集中在  $c_1, c_2$  参数较大的区间内, 在此区间内还夹杂着小周期数区域, 说明在混沌区域内存在周期窗口. 此外, 与  $h\mathbb{Z}$  时标上的分岔图相比, 混沌状态的参数分布空间从一维变为了二维, 混沌状态下的参数空间显著扩展. 这意味着在不改变系统本身, 仅仅通过增加时标的周期数  $n$ , 就能扩展方程处于混沌状态的参数空间, 而参数空间的扩大对基于混沌的加

密算法有重要的意义 [27].

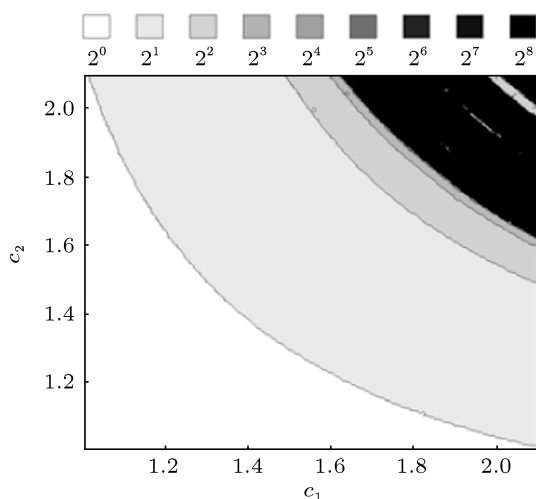


图3 时标 T 上的正弦动力学方程的动力学行为分布图

由 3.1 节的分析可知,(31) 式描述的正弦动力学方程只有一个平衡点  $S_1 \approx 0.565$  可能是稳定的. 由于  $\mu$  不再是常数, 平衡点处迭代函数一阶导数的绝对值大小无法判断系统稳定性, 但这时 (22) 式和 (24) 式的结论仍然是有效的, 根据 (24) 式可得到平衡点  $S_1$  稳定的充分条件

$$\max\{c_1, c_2\} \leq 1.166. \quad (32)$$

根据 (22) 式可得到平衡点  $S_1$  不稳定的充分条件

$$\min\{c_1, c_2\} > 1.389. \quad (33)$$

### 4.3 n 倍周期分岔与平衡点分裂

注意到图 3 的对角线对应着图 1(a) 中的分岔图, 而在图 3 上取水平直线, 就可以得到不同参数  $c_1$  下随参数  $c_2$  变化时正弦动力学方程的分岔图, 如图 4 所示. 从图 4(a) 可以看到,  $c_1 = 0.1$  时, 在  $c_2 = 1.505$  附近正弦动力学方程由周期 1 轨道分岔为周期 4 轨道. 当  $c_2 = 1.505$  时, 图 5(a) 中的四次迭代曲线上两个切点在点 A 重合, 随着参数  $c_2$  增加, 此重合的切点分裂成五个交点 A, B, C, D, E, 其中四个交点 A, B, C, D 为稳定点, 产生了四条稳定轨道, 两个重合在 E 处的交点为不稳定, 产生一条不能观察到的不稳定轨道, 如图 5(b) 的四次迭代曲线所示. 本文称这种分岔为 2 倍周期分岔, 该分岔是 (30) 式时标下动力学方程的特殊现象, 因为  $n = 2$  时 (30) 式时标决定了粒度函数在两

个值  $c_1$  和  $c_2$  间切换, 引起 (15) 式描述的正弦动力学方程在两种状态间切换, 产生的两条迭代曲线各自同时发生了倍周期分岔. 显然,  $n$  为其他整数时 (30) 式可能发生类似的分岔, 我们称为  $n$  倍周期分岔.

$c_1 = 1.5$  时,  $c_2 \in [0, 0.2]$  区间的分岔图如图 4(b) 所示, 在  $c_2 = 0$  处稳定的周期 2 轨道分岔为稳定的周期 4 轨道, 在  $c_2 = 0.096$  附近稳定的周期 4 轨道 2 倍周期逆分岔为周期 1 轨道. 当  $c_2 = 0$  时, 只有一条可能的四次迭代曲线见图 5(c), 产生三个重合的交点 A, B, C, 其中交点 A, B 为稳定点, 产生了两个稳定轨道. 随着参数  $c_2$  增加, 此四次迭代曲线分裂成两条, 三个交点分裂成五个交点 A, B, C, D, E, 其中四个交点 A, B, C, D 为稳定点, 产生了周期 4 稳定轨道, 两个重合在 E 处的交点为不稳定, 产生一条不能观察到的不稳定轨道, 如图 5(d) 的四次迭代曲线所示.  $c_1 = 1.5, c_2 = 0$  处的分岔现象由迭代曲线的分裂产生.

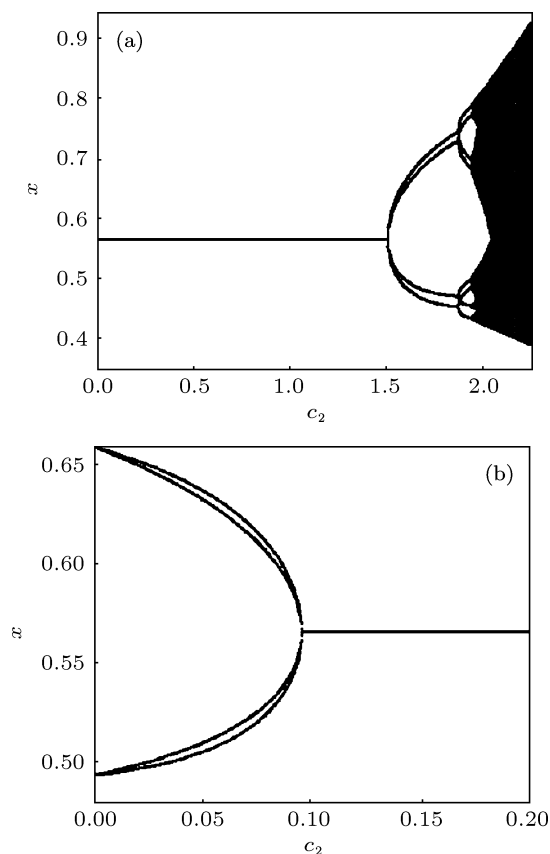


图4 在不同参数  $c_1$  下参数  $c_2$  变化时的分岔图 (a)  $c_1 = 0.1$ ; (b)  $c_1 = 1.5$

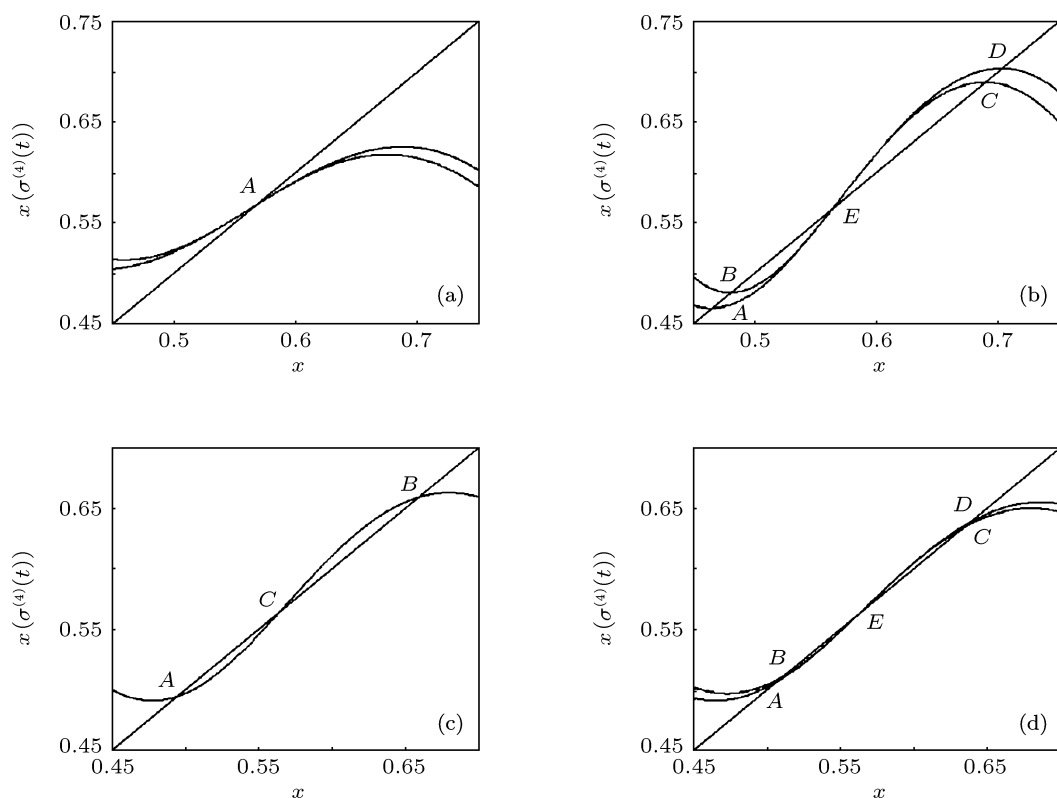


图5 平衡点演变的四次迭代曲线图

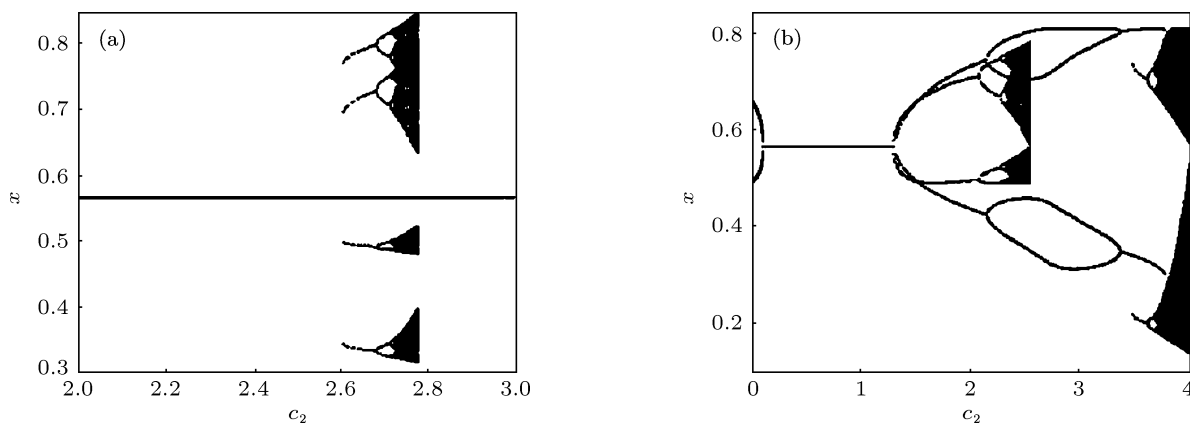


图6 (a)  $c_1 = 0.5$ ; (b)  $c_1 = 1.5$

#### 4.4 吸引子共存现象

从图 6(a) 可以看到,  $c_1 = 0.5$  时, 在  $c_2 = 2.6$  附近正弦动力学方程经切分岔由 1 周期突变为 1 周期轨道与 4 周期轨道共存. 在  $c_2 = 2.6$  处, 图 7(a) 中的四次迭代曲线上出现四个切点 A, B, C, D, 和一个稳定的交点 E, 随参数增加四个切点 A, B, C,

D 就产生四个稳定交点和四个不稳定交点, 产生了四条稳定轨道, 而稳定的交点 E 产生一条 1 周期稳定轨道.

从图 6(b) 可以看到,  $c_1 = 1.5$  时, 在  $c_2 = 1.293$  附近正弦动力学方程由一个稳定轨道倍周期分岔为两个独立共存的周期 2 轨道. 当  $c_2 = 1.293$  时, 二次迭代曲线上两个切点在点 E 重合, 随着参数  $c_2$



增加,此重合的切点分裂成五个交点  $A, B, C, D, E$ , 其中四个交点  $A, B, C, D$  为稳定点, 产生了两个独立的周期 2 稳定轨道, 两个重合在  $E$  处的交点为不稳定, 产生一条不能观察到的不稳定轨道, 如图 7(b) 的二次迭代曲线所示. 从图 6(b) 看到, 随着  $c_2$  的继续增大, 两个独立的周期 2 轨道在  $c_2 = 1.5$  处碰撞产生稳定的周期 2 轨道,  $c_2$  继续增大, 稳定的周期 2 轨道再次分裂为两个独立的周期 2 轨道. 两个独

立的稳定周期 2 轨道中, 一个周期 2 轨道经过倍周期分岔产生阵发混沌后在  $c_2 = 2.5$  附近消失, 另一个周期 2 轨道在  $c_2 = 2.142$  附近倍周期分岔为稳定的周期 4 轨道, 在  $c_2 = 3.361$  附近逆倍周期分岔为周期 2 轨道, 在  $c_2 = 3.774$  附近消失. 同时, 注意到, 在  $c_2 = 3.472$  附近出现了另一个独立的稳定周期 2 轨道, 该轨道经过倍周期分岔产生混沌.

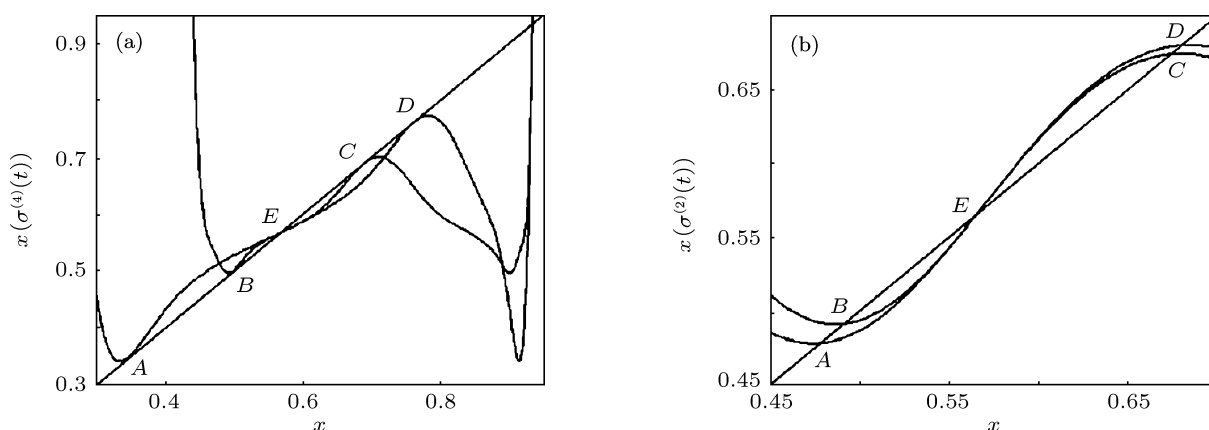


图 7 (a) 为四次迭代曲线; (b) 为二次迭代曲线

### 5 实验

时标正弦动力学方程的差分形式由 (15) 式描述

$$x(\sigma(t)) = x + \mu(t)[a + b \sin(2\pi x)],$$

时标  $\mathbb{T}$  满足 (30) 式时, (15) 式可以用自反馈的调频电路实现. 如图 8 所示, 压控振荡器 (VCO) 在  $t$  时刻的值  $\sin(2\pi x)$  采样后经过变换器得到  $a + b \sin(2\pi x)$ , 由  $\mu(t)$  时间的电平保持后控制 VCO 的频率, VCO 在  $\sigma(t)$  时刻采样输出的值就是  $\sin[2\pi x(\sigma(t))]$ . (15) 式的解可以从  $t$  时刻的采样值中取出相位并除以常数  $2\pi$  得到. 在实验电路中, 由数字频率合成 (DDS) 技术构建 VCO, 采样由 A/D 器件实现, 变换、相位提取和除以  $2\pi$  等操作利用基于 FPGA 的数字电路实现, 电平保持效果由 D/A 器件实现, 实验电路见图 9.

实验中, 测试了时标正弦动力学方程在  $a = 0.1, b = 0.25, n = 2$  时, 二参数  $c_1$  和  $c_2$  取不同参数下的情况, 实验结果由优利德 200M 数字示波

器 4202c 测量, 如图 10 所示.

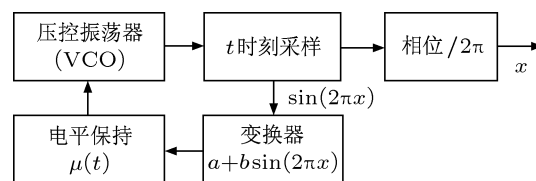


图 8 时标正弦动力学方程电路实验系统框图

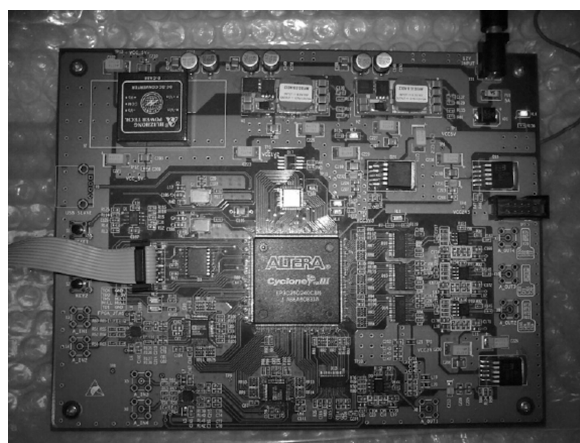


图 9 实验电路照片

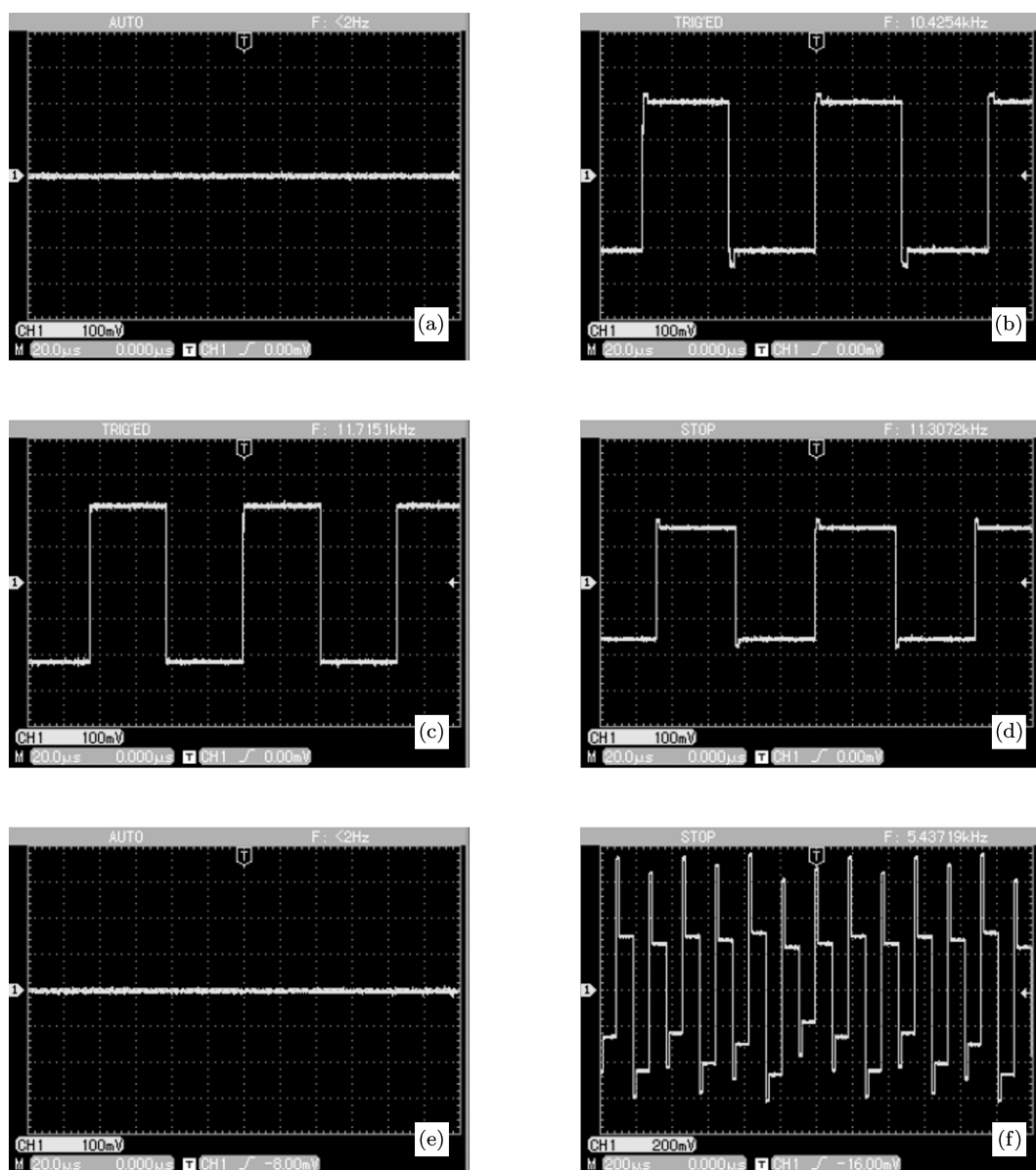


图10  $a = 0.1, b = 0.25, n = 2$  时输出信号 (a)  $c_1 = 0.1, c_2 = 1$ ; (b)  $c_1 = 0.1, c_2 = 1.6$ ; (c)  $c_1 = 1.5, c_2 = 0$ ; (d)  $c_1 = 1.5, c_2 = 0.055$ ; (e)  $c_1 = 0.5, c_2 = 2.75$ , 初始值为 0.58; (f)  $c_1 = 0.5, c_2 = 2.75$ , 初始值为 0.8

## 6 结论

本文研究了时标上的正弦动力学方程, 分析了时标正弦动力学方程的平衡点、平衡点稳定性和分岔现象等, 研究表明平衡点稳定性和分岔现象受粒度函数的影响. 当粒度函数不为常数时, 产生了  $n$  倍周期分岔和平衡点分裂等特有现象. 同时倍周期分岔, 切分岔, 吸引子共存等丰富的动力学现象也出现在时标正弦动力学方程中. 本文通过数值仿真

和电路实验验证了理论分析的结果.

此外, 时标参数的引入扩展了动力学方程的参数空间, 将混沌状态的参数分布区域从低维扩展到高维, 混沌状态下的参数空间显著增大. 这意味着不改变系统本身, 仅仅通过增加时标的周期数  $n$ , 就能扩展方程处于混沌状态的参数空间, 而参数空间的扩大对提高混沌加密算法安全性<sup>[27]</sup> 和增加混沌雷达波形设计灵活性<sup>[28]</sup> 有重要的意义.

- [1] Schell M, Fraser S, Kapral R 1983 *Physical Review A* **28** 373
- [2] Chirikov B V 1979 *Physics reports* **52** 263
- [3] Huberman B A 1980 *Appl. Phys. Lett.* **37** 750
- [4] Winfree A T 2001 *The geometry of biological time*(New York: Springer) p101
- [5] Larger L, Udaltsov V S, Poinsot S 2005 *Journal of optical technology* **72** 378
- [6] Jie X, Ke-Ping L, Dani Le F 2010 *Chinese Physics Letters* **27** 020504
- [7] Tarasov V E, Edelman M 2010 *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **20** 023127
- [8] Arnol'd V I 1961 *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya* **25** 21
- [9] Feigenbaum M J, Kadanoff L P, Shenker S J 1982 *Physica D: Non-linear Phenomena* **5** 370
- [10] Ruelle D, Takens F 1971 *Commun. Math. Phys.* **20** 167
- [11] Glass L, Perez R 1982 *Physical Review Letters* **48** 1772
- [12] Schell M, Fraser S, Kapral R 1982 *Physical Review A* **26** 504
- [13] Fraser S, Kapral R 1982 *Physical Review A* **25** 3223
- [14] Chang S J, Wortis M, Wright J A 1981 *Physical Review A* **24** 2669
- [15] Xu J, Long K P, Fournier-Prunaret D 2010 *Chinese Phys. Lett.* **27** 080506
- [16] Lalescu C C 2010 *Arxiv preprint arXiv* **1011** 6552
- [17] Afsar O, Tirnakli U 2010 *Physical Review E* **82** 046210
- [18] Nayak C R, Gupte N 2010 *Arxiv preprint arXiv* **1011** 5492
- [19] Santhiah M, Philominathan P 2010 *Pramana* **75** 403
- [20] Xu J, Charg P, Fournier-Prunaret D 2010 *SCIENCE CHINA Information Sciences* **53** 129
- [21] Agarwal R, Bohner M, O'regan D 2002 *Journal of Computational and Applied Mathematics* **141** 1
- [22] Agarwal D 2000 *Applied Mathematics Letters* **13** 7
- [23] Peterson A C, Raffoul Y N 2005 *Advances in Difference Equations* **2005** 133
- [24] Hoffacker J, Tisdell C C 2005 *Computers & Mathematics with Applications* **49** 1327
- [25] Li T, Han Z, Sun S 2009 *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* **60** 1
- [26] Grace S R, Agarwal R P, Kaymak Alan B 2010 *Journal of Applied Mathematics and Computing* **32** 205
- [27] Alvarez G, Li S 2006 *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering* **16** 2129
- [28] Willsey M S, Cuoco K M, Oppenheim A V 2011 *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, Cambridge, July 2011, p1974

# Stabilities and bifurcations of sine dynamic equations on time scale\*

Hu Wen<sup>1)2)†</sup> Zhao Guang-Hao<sup>1)</sup> Zhang Gong<sup>1)</sup> Zhang Jing-Qiao<sup>1)</sup> Liu Xian-Long<sup>2)</sup>

1) (*College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China*)

2) (*Nanjing Changjiang Electronics Group CO., LTD, Nanjing 210037, China*)

(Received 19 November 2011; revised manuscript received 25 February 2012)

## Abstract

A time scale is a nonempty closed subset of the real numbers  $\mathbb{R}$ . Recently, the dynamic equations on time scale have received much attention, which have the generalized forms of differential and differential dynamic equations. In this paper, we study the stabilities of fixed points and bifurcations of the sine dynamic equations on time scale. The results show that the solutions of the sine dynamic equations become different with the time scale parameter changing. And  $n$ -period-doubling bifurcations and splits of fixed points are observed. Moreover, the chaotic parameter spaces of the dynamic equations are expanded by the increase of complexity of time scale but without increasing the system parameter, thus providing a potential advantage for chaos encryption, radar waveform design and other application areas.

**Keywords:** sine map, bifurcation, chaos, dynamic equations on time scales

**PACS:** 05.45.-a

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61071163, 61001151), the Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Scientific Research Fund, the NUAA Research Funding (Grant No. NS2010096), and the Aeronautical Science Foundations of China (Grant Nos. 2009ZC52038, 2008ZC52026).

† E-mail: hwfeng118@163.com