

## Fisher 方程的有界衰减振荡解\*

李向正†

(河南科技大学数学与统计学院, 洛阳 471003)

(2012 年 1 月 2 日收到; 2012 年 2 月 12 日收到修改稿)

为了研究非线性发展方程的有界衰减振荡解, 特选取 Fisher 方程为例. Fisher 方程在描述激发介质的非数值模型(如 Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反应)中, 其解的振幅取负值是有意义的. 应用平面动力系统理论, 研究了 Fisher 方程有界行波解存在的条件, 利用 LS 解法和线性化解法给出了其有界衰减振荡解的近似解析表达式, 并进行了误差估计.

**关键词:** Fisher 方程, 平面动力系统, 衰减振荡解, 误差估计

**PACS:** 05.45.-a, 03.65.Ge, 04.20.Jb

Fisher 方程<sup>[18-23]</sup>

$$u_t = Du_{xx} + u(a - bu)$$

## 1 引言

衰减振荡现象在许多系统中都存在, 如球体的落地运动, 弹簧受压后的自由振荡, 短路时的电压振荡等等. 对应这些衰减振荡现象的非线性发展方程 (NEE) 有很多, 然而至今尚未见有文献给出其有界衰减振荡解的精确表达式. 由此可见分析并求解 NEE 的衰减振荡解是困难而具有挑战性的工作. 已有的一些求解 NEE 的有效的方法, 如反散射方法<sup>[1]</sup>, Hirota 方法<sup>[2]</sup>, 齐次平衡方法<sup>[3,4]</sup>, 线性化解法<sup>[5]</sup>, 双曲正切函数展开方法<sup>[6]</sup>及其扩展方法<sup>[7]</sup>, Jacobi 椭圆函数展开方法<sup>[8]</sup>, F 展开法<sup>[9-11]</sup>, (G'/G) 展开法<sup>[12-14]</sup>, LS 解法<sup>[15]</sup>等, 多用来求解 NEE 的孤立波解和周期解. 最近 Zhang 等利用待定系数法给出了一些带耗散项的 NEE 的衰减振荡解的近似表达式, 并给出了其误差分析<sup>[16,17]</sup>. 本文改进了文献<sup>[16, 17]</sup>中的方法, 利用 LS 解法<sup>[15]</sup>和线性化解法<sup>[5]</sup>的思想来给出 Fisher 方程衰减振荡解的近似解析表达式, 并给出误差分析. 本文的线性化解法, 指利用线性常微分方程的精确解, 通过一个对接条件, 来给出非线性常微分方程的近似解.

是著名的反应扩散方程之一, 这类方程建立了人口中有利基因的传播以及调节单双分子化学反应扩散的动力学模型, 其中  $D, a, b$  是非负系数. Fisher 方程还被广泛应用于人口增长模型, 热传导, 神经生理学, 自身催化的化学反应, 布朗运动过程和核反应理论. Fisher 方程还用来描述流体力学、等离子体物理和传染病传播等问题中的非线性现象<sup>[20]</sup>. 更多有关 Fisher 方程的信息请查看文献<sup>[21, 22]</sup>.

本文考虑正规化的 Fisher 方程<sup>[18,19]</sup>

$$u_t - u_{xx} = u(1 - u), \quad (1)$$

作为描述人口中有利基因传播的动力学模型<sup>[18]</sup>, Fisher 于 1937 年提出 Fisher 方程. 直到 1979 年, Abolowitz 和 Zeppetella 首先注意到 Fisher 方程具有 Painleve 性质, 然后他们利用 Laurent 展开获得了方程 (1) 的一个精确行波解<sup>[23]</sup>. Pavel 等<sup>[21]</sup>利用定性理论分析了平方 Fisher 方程的静态解, 给出了一些近似解. 文献<sup>[19]</sup>将有限差分方法和配置法相结合给出了 Fisher 方程的数值解. 文献<sup>[20]</sup>用待定系数法得到 Fisher 方程的新的行波解及行波波速.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10871129), 河南省教育厅自然科学基金项目 (批准号: 2011B110013) 和河南科技大学科研创新能力培育基金项目 (2010CZ0016) 资助的课题.

† E-mail: lylxz@mail.haust.edu.cn

文献 [18—23] 均只考虑了 Fisher 方程波速  $c > 0$  的耗散系统, 而没有考虑  $c < 0$  的扩张系统. 然而, 到目前为止, 我们没有发现有关求出 Fisher 方程衰减振荡解的精确解或近似解的报道, 也没有定性分析衰减振荡解的演化的文献. 本文要研究的问题是, Fisher 方程有无衰减振荡解? 衰减振荡解是如何形成的? 如何求出?

在化学媒介中函数  $u(x, t)$  指反应浓度时  $0 \leq u(x, t) \leq 1$ , 在此情况下一般不考虑衰减振荡解, 而只是求出其扭状孤波解. 然而 Fisher 方程在描述激发介质的非数值模型 (如 Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反应, 神经肌肉组织) 中,  $u(x, t)$  取负振幅是有意义的 [21]. 此时研究 Fisher 方程的有界衰减振荡解就具有重要意义了.

## 2 Fisher 方程的有界衰减振荡解对应的相图及其成因

我们要寻找 Fisher 方程 (1) 的行波解

$$u(x, t) = u(x - ct), \quad \xi = x - ct, \quad (2)$$

其中常数  $c$  为波速. 将 (2) 式代入方程 (1) 得  $u$  满足的常微分方程

$$u'' + cu' + u(1 - u) = 0. \quad (3)$$

方程 (3) 属于 Liénard 方程 [24].

令  $y_1 = u, y_2 = \dot{y}_1$ , 则方程 (3) 等价于系统

$$\dot{y}_1 = y_2 \equiv F_1(y_1, y_2), \quad (4a)$$

$$\dot{y}_2 = -cy_2 - y_1(1 - y_1) \equiv F_2(y_1, y_2). \quad (4b)$$

系统 (4) 由 Fisher 方程 (1) 经行波约化得到, 因而我们称系统 (4) 为行波系统. 系统 (4) 有两个有限奇点  $(0, 0), (1, 0)$ . 根据平面动力系统理论 [24],  $(1, 0)$  点为鞍点, 无论  $c$  取何值. 当  $c > 2$  时,  $(0, 0)$  点为稳定结点; 当  $c = 2$  时,  $(0, 0)$  点为稳定退化结点; 当  $0 < c < 2$  时,  $(0, 0)$  点是稳定焦点; 当  $c = 0$  时  $(0, 0)$  点为中心; 当  $-2 < c < 0$  时,  $(0, 0)$  点是不稳定焦点; 当  $c = -2$  时,  $(0, 0)$  点是不稳定退化结点; 当  $c < -2$  时,  $(0, 0)$  点是不稳定结点.

根据定性分析的结果, 下面我们按照  $c$  的取值来绘出部分相图.

参数  $0 < c < 2$  时系统 (4) 对应的相图见图 1; 参数  $c = 0$  时系统 (4) 对应的相图见图 2; 参数  $-2 < c < 0$  时系统 (4) 对应的相图见图 3.

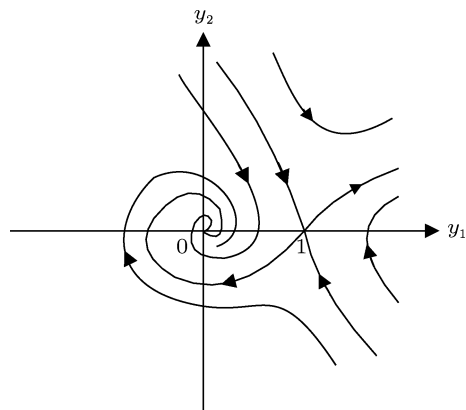


图 1  $0 < c < 2$  时系统 (4) 的相图

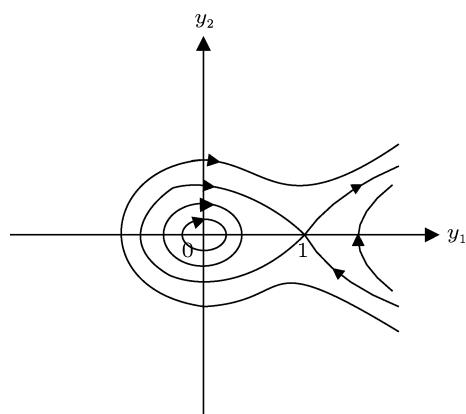


图 2  $c = 0$  时系统 (4) 的相图

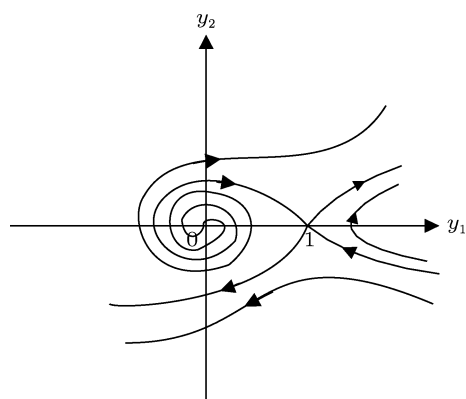


图 3  $-2 < c < 0$  时系统 (4) 的相图

注意到图 1 中的鞍 - 焦轨线  $L_1$  (从  $(1, 0)$  点出发运动到  $(0, 0)$  点的轨线) 是在传播速度项  $cu'$  的作用下 (即传播速度  $0 < c < 2$  时) 由图 2 中同宿轨  $L_2$  (从  $(1, 0)$  点出发回到  $(1, 0)$  点的轨线) 破裂产生的, 即有界衰减振荡解是在波速较小 ( $0 < c < 2$ ), 非线性项作用较弱的情况下产生的. 图 3 中的有界衰减振荡解与此类似.

### 3 Fisher 方程的有界衰减振荡解的近似解析表达式

方程 (1) 对应鞍 - 焦轨线  $L_1$  有界衰减振荡解的非振荡部分可用图 2 中同宿轨  $L_2$  对应的解 (利用 LS 解法 [15] 可以求出同宿轨  $L_2$  对应的解)

$$u = 1 - \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}x\right)$$

来近似表示, 即

$$u^*(\xi) = 1 - \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\xi\right), \quad \xi \leq 0, \quad (5)$$

其中  $\xi = x - ct$ . 轨线  $L_1$  充分接近焦点  $(0,0)$  时, 解的性质趋于系统 (4) 在  $(0,0)$  点的线性近似系统的解的性质. 这是因为根据 Hartman-Grobman 定理 [24], 双曲奇点附近轨线的性质主要由该点的线性近似系统决定, 因而对应鞍 - 焦轨线  $L_1$  有界衰减振荡解的振荡部分的解可用焦点  $(0,0)$  对应的线性方程

$$u'' + cu' + u = 0 \quad (6)$$

的解来近似表出, 即

$$u(\xi) = e^{-\frac{c}{2}\xi} (A_1 \cos B\xi + A_2 \sin B\xi), \quad \xi > 0, \quad (7)$$

其中  $B = \sqrt{4 - c^2}/2$ ,  $A_1$  和  $A_2$  由 (5) 式和 (7) 式所满足的对接条件

$$u(0) = u^*(0), u_\xi(0) = u_\xi^*(0)$$

来确定, 即得

$$A_1 = -\frac{1}{2}, A_2 = -\frac{c}{2\sqrt{4 - c^2}}. \quad (8)$$

(7) 式既具有衰减性也具有震荡性, 衰减性由  $e^{-\frac{c}{2}\xi}$  体现, 震荡性由  $A_1 \cos B\xi + A_2 \sin B\xi$  体现. 当  $\xi \rightarrow +\infty$  时,  $u(\xi) \rightarrow 0$ .

将 (8) 式代入 (7) 式, 联合 (5) 式, 即得图 1 中对应鞍 - 焦轨线  $L_1$  的有界衰减振荡解的近似解析表达式. 综上所述, 可得如下定理.

**定理 1** 当波速  $0 < c < 2$  时, Fisher 方程 (1) 有对应鞍 - 焦轨线  $L_1$  (图 1 中从  $(1,0)$  点出发运动到  $(0,0)$  点的轨线) 的有界衰减振荡解, 其近似解析

表达式为

$$u(\xi) \approx \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\xi\right), & \xi \leq 0, \\ e^{-\frac{c}{2}\xi} \left[ -\frac{1}{2} \cos \frac{\sqrt{4 - c^2}}{2} \xi \right. \\ \left. - \frac{c}{2\sqrt{4 - c^2}} \sin \frac{\sqrt{4 - c^2}}{2} \xi \right], & \xi > 0. \end{cases} \quad (9)$$

**定理 2** 当波速  $-2 < c < 0$  时, Fisher 方程 (1) 有对应焦 - 鞍轨线  $L_3$  (图 3 中从  $(0,0)$  点出发运动到  $(1,0)$  点的轨线) 的有界衰减振荡解, 其近似解析表达式为

$$u(\xi) \approx \begin{cases} e^{-\frac{c}{2}\xi} \left[ -\frac{1}{2} \cos \frac{\sqrt{4 - c^2}}{2} \xi \right. \\ \left. - \frac{c}{2\sqrt{4 - c^2}} \sin \frac{\sqrt{4 - c^2}}{2} \xi \right], & \xi \leq 0, \\ 1 - \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\xi\right), & \xi > 0. \end{cases} \quad (10)$$

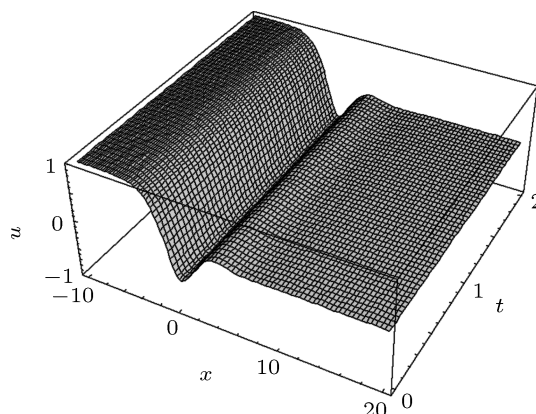


图 4  $c = 1$  时的衰减振荡解

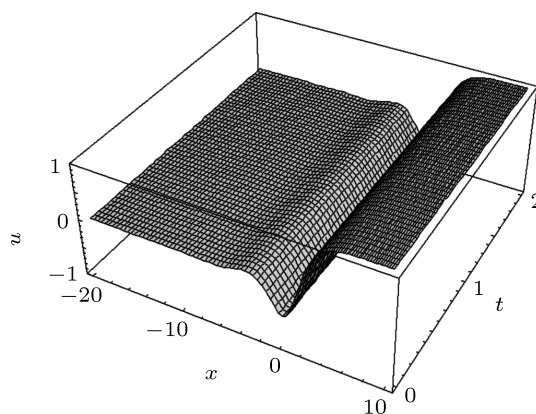


图 5  $c = -1$  时的衰减振荡解

下面给出连接  $(0,0)$  点的衰减振荡解的图形.  $c = 1$  时 Fisher 方程 (1) 的有界衰减振荡解 (9) 见

图 4.  $c = -1$  时 Fisher 方程 (1) 的有界衰减振荡解 (10) 见图 5.

### 4 Fisher 方程的有界衰减振荡解的误差估计

本节利用齐次化原理 [25] 研究有界衰减振荡解 (9) 的误差估计.

求初值问题

$$u'' + cu' + u = u^2, \quad (11)$$

$$u(0) = -1/2, u'(0) = 0 \quad (12)$$

的精确解. 依据齐次化原理 [25], 可以解得上述初值问题 (11), (12) 的隐式精确衰减振荡解

$$u(\xi) = e^{-\frac{c}{2}\xi} \left[ -\frac{1}{2} \cos \frac{\sqrt{4-c^2}}{2} \xi - \frac{c}{2\sqrt{4-c^2}} \sin \frac{\sqrt{4-c^2}}{2} \xi \right] + \frac{2}{\sqrt{4-c^2}} \int_0^\xi e^{-\frac{c}{2}(\xi-\tau)} \sin \frac{\sqrt{4-c^2}}{2} \times (\xi-\tau) u^2(\tau) d\tau, \quad \xi > 0. \quad (13)$$

(13) 式反映了对应图 1 中的鞍 - 焦轨线  $L_1$  的衰减振荡解的近似解与精确解之间的关系.

因我们研究的衰减振荡解具有有界性, 故存在  $M_1 > 0$ , 使得  $|u(\xi)| < M_1$ .

$$|u(\xi)| \leq K_1 e^{-\frac{c}{2}\xi} + \frac{2M_1}{\sqrt{4-c^2}} \times \int_0^\xi e^{-\frac{c}{2}(\xi-\tau)} |u(\tau)| d\tau, \quad \xi > 0.$$

其中  $K_1 = \frac{1}{2} + \frac{c}{2\sqrt{4-c^2}}$ . 因  $0 < c < 2$ , 故对任意满足  $0 < \xi_1 \leq \xi$  的  $\xi_1$ , 有

$$|u(\xi)| \leq K_1 e^{-\frac{c}{2}\xi_1} + \frac{2M_1}{\sqrt{4-c^2}} \times \int_0^\xi e^{-\frac{c}{2}(\xi_1-\tau)} |u(\tau)| d\tau, \quad \xi > 0.$$

于是, 根据 Gronwall 不等式, 可证

$$|u(\xi)| \leq K_1 e^{-\frac{c}{2}\xi_1} \exp \left[ \frac{4M_1}{c\sqrt{4-c^2}} \left( e^{-\frac{c}{2}(\xi_1-\xi)} - e^{-\frac{c}{2}\xi_1} \right) \right], \quad \xi > 0.$$

由于  $\xi_1$  的任意性, 我们令  $\xi_1 \rightarrow \xi$ , 得

$$|u(\xi)| \leq K_1 e^{-\frac{c}{2}\xi} \exp \left[ \frac{4M_1}{c\sqrt{4-c^2}} \left( 1 - e^{-\frac{c}{2}\xi} \right) \right] \leq K_2 e^{-\frac{c}{2}\xi}, \quad \xi > 0. \quad (14)$$

其中  $K_2 = K_1 e^{\frac{4M_1}{c\sqrt{4-c^2}}}$ . (14) 式表明当  $\xi \rightarrow +\infty$  时,  $u(\xi) \rightarrow 0$ .

进一步, 由 (13) 式和 (14) 式可得如下定理.

**定理 3** 对应鞍 - 焦轨线  $L_1$  (图 1 中从 (1,0) 点出发运动到 (0,0) 点的轨线) 的近似衰减振荡解与真解之间的误差为

$$\left| u(\xi) - e^{-\frac{c}{2}\xi} \left[ -\frac{1}{2} \cos \frac{\sqrt{4-c^2}}{2} \xi - \frac{c}{2\sqrt{4-c^2}} \sin \frac{\sqrt{4-c^2}}{2} \xi \right] \right| \leq \frac{4K_2^2}{c\sqrt{4-c^2}} e^{-\frac{c}{2}\xi} \left( 1 - e^{-\frac{c}{2}\xi} \right) \leq \frac{4K_2^2}{c\sqrt{4-c^2}} e^{-\frac{c}{2}\xi}, \quad \xi > 0. \quad (15)$$

(15) 式表明鞍 - 焦轨线  $L_1$  的衰减振荡解的近似解与真解之间的误差小于  $\varepsilon(\xi) = \frac{4K_2^2}{c\sqrt{4-c^2}} e^{-\frac{c}{2}\xi} = o(e^{-\frac{c}{2}\xi})$ ,  $\xi \rightarrow +\infty$  时  $\varepsilon(\xi) \rightarrow 0$ .

有界衰减振荡解 (10) 的近似解与真解之间的误差可用类似办法估计.

### 5 结论

本文引入常微分方程定性理论对 Fisher 方程的行波系统进行了定性分析, 根据反应扩散速度  $dx/dt = c$  满足的各种参数条件, 判断出了 Fisher 方程存在对应各个参数条件的行波解, 分析了 Fisher 方程衰减振荡解的成因, 而后利用 LS 解法求出了行波系统的同宿轨对应的钟状孤波解, 同时借助线性化解法给出了 Fisher 方程在波速较小的情况下对应的有界衰减振荡解的近似解析表达式, 并利用齐次化原理给出了近似解与真解的误差估计, 其误差随参数的变化呈指数下降趋势. 本文的研究方法和结果对定性及定量研究衰减振荡现象具有一定的意义.

感谢上海理工大学理学院张卫国教授的指导与帮助.

- [1] Ablowitz M J, Clarkson P A 1991 *Solitons, Nonlinear evolution equations and inverse scattering transform* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [2] Hirota R A 1974 *Progr. Theor. Phys.* **52** 1498
- [3] Wang M L 1995 *Phys. Lett. A* **199** 169
- [4] Li Z B 2002 *Acta Mathematica Scientia* **22B** 138
- [5] Li X Z, Zhang X Y, Zhao L Y 2007 *J. Henan Univ. Sci. Techn.* **28(2)** 70 (in Chinese) [李向正, 张小勇, 赵丽英 2007 河南科技大学学报 **28(2)** 70]
- [6] Lan H B, Wang K L 1990 *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** 4097
- [7] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Phys. Lett. A* **246** 403
- [8] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Phys. Lett. A* **289** 69
- [9] Wang M L, Zhou Y B 2003 *Phys. Lett. A* **318** 84
- [10] Zhou Y B, Wang M L, Wang Y M 2003 *Phys. Lett. A* **308** 31
- [11] Li X Z, Zhang J L, Wang Y M, Wang M L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4045 (in Chinese) [李向正, 张金良, 王跃明, 王明亮 2004 物理学报 **53** 4045]
- [12] Wang M L, Li X Z, Zhang J L 2008 *Phys. Lett. A* **372(4)** 417
- [13] Wang M L, Zhang J L, Li X Z 2008 *Appl. Math. Comp.* **206** 321
- [14] Zhao Y L, Liu Y P, Li Z B 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030306
- [15] Li X Z, Zhang W G, Yuan S L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 744 (in Chinese) [李向正, 张卫国, 原三领 2010 物理学报 **59** 744]
- [16] Zhang W G, Bian L Y, Zhao Y 2010 *Proceed. Royal Soc. Edinburgh* **140A** 241
- [17] Zhao Y, Zhang W G 2010 *Acta Math. Appl. Sinica* **26(3)** 415
- [18] Fisher R A 1937 *Ann. Eugen.* **7** 353
- [19] Bi H, Lu T C 2004 *J. Shandong Univ. (Sci. Edit.)* **39(2)** 41 (in Chinese) [闭海, 鲁统超 2004 山东大学学报(理学版) **39(2)** 41]
- [20] Tao T, Zhang W G, Feng L P 2004 *J. Univ. Shanghai Sci. Techn.* **26(2)** 111 (in Chinese) [陶涛, 张卫国, 冯丽萍 2004 上海理工大学学报 **26(2)** 111]
- [21] Pavel K B, John J T 1999 *SIAM J. Appl. Math.* **60(2)** 371
- [22] Tan Y, Xu H, Liao S J 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **31** 462
- [23] Ablowitz M J, Zeppetella A 1979 *Bull. Math. Biol.* **41** 835
- [24] Ma Z E, Zhou Y C 2001 *Qualitative and Stability Methods of Ordinary Differential Equations* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [马知恩, 周义仓编著 2001 常微分方程定性方法与稳定性方法 (北京: 科学出版社)]
- [25] Liang K M 2006 *Methods of Mathematical Physics* (Beijing: Higher Education Press) p206 (in Chinese) [梁昆淼 2006 数学物理方法 (北京: 高等教育出版社) 第 206 页]

# Bounded damped oscillatory solutions of Fisher equation\*

Li Xiang-Zheng<sup>†</sup>

(College of Mathematics and Statistics, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471003, China)

(Received 2 January 2012; revised manuscript received 12 February 2012)

## Abstract

To research the bounded damped oscillatory solutions of nonlinear evolution equation, we choose the Fisher equation as an example. The solutions with negative amplitudes of Fisher equation may become meaningful in the context of nonscalar models describing excitable media (e.g. the Belousov-Zhabotinsky (BZ) reaction). The theory of planar dynamical systems is used to study the existence conditions of bounded traveling wave solutions of Fisher equation. The bounded approximate damped oscillatory analytic solution is given by using LS method and linearization method. And its error is also estimated.

**Keywords:** Fisher equation, planar dynamic system, damped oscillatory solutions, error estimate

**PACS:** 05.45.-a, 03.65.Ge, 04.20.Jb

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.10871129), the Natural Science Foundation of Education Department of Henan Province, China (Grant No. 2011B110013), and the Science Foundation for Cultivating Innovation Ability of Henan University of Science and Technology (Grant No. 2010CZ0016).

<sup>†</sup> E-mail: lyxz@mail.haust.edu.cn